
Ciclos para el Estudio Dinámico de Foliaciones



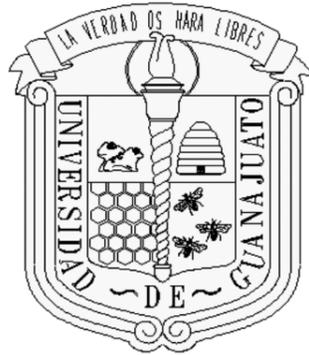
JORGE ALBARRÁN



UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
Facultad de Matemáticas

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

FACULTAD DE MATEMÁTICAS



TESIS

que para obtener el grado de
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presenta:

JORGE AGUSTÍN ALBARRÁN MORALES

Ciclos para el Estudio
Dinámico de Foliaciones

Delante del jurado conformado por:

DR. GONZALO CONTRERAS. Director.
DR. XAVIER GÓMEZ-MONT. Presidente.
DR. MANUEL CRUZ. Secretario.

Agosto de 2004
Guanajuato, Gto. México

*A mis padres:
Mery y José Luis.*

*Y a mis abuelos:
Cristina, Esperanza y Jorge.*

Agradecimientos

“Llovió cuatro años, once meses y dos días.”
Gabriel García Márquez.
(En “Cien Años de Soledad”).

Durante casi cinco años llovieron conocimientos sobre mí en una ciudad nueva. Este trabajo es la señal de que ha escampado en esta etapa de mi vida, y significa para mí más que un simple manuscrito que me llevó un año realizar. Significa el trabajo de toda una vida de estudio, desde comenzar a interesarme en las ciencias hasta llegar a la vida profesional. Por esta razón agradezco lo más sincera y honestamente a una extensa lista de personas, como una simple atención para aquellos que han aportado algo a mi vida.

En primer lugar quiero agradecer a mi familia por su apoyo incondicional: a mis padres por la educación que me dieron, por sus consejos y por haberme traído a este mundo; a mis abuelos, por haber sido también mis padres; a mis tios y a mis primos, por haber sido también mis amigos; a mis sobrinos, por recordarme que nunca he querido dejar de ser un niño, y muy especialmente a mis hermanos José Luis y Luis Fernando por tantas riñas y tantas risas.

En la parte académica, quiero agradecer enormemente a quienes, sin saberlo, encaminaron mi educación hacia lugares que ni yo mismo pensé alcanzar: Teresa Sedano y Ma. Luisa Kwata, mil gracias por haber aparecido en mi vida.

A tres grandes personajes que han influido muchísimo en mí y gracias a quienes he logrado entender y disfrutar la matemática más de lo que esperaba: Alberto Verjovsky, Xavier Gómez-Mont y José Seade por su estilo inigualable, su apoyo constante, por animarme a seguir cuando pensé que no podría seguir haciéndolo y por su visión de las matemáticas que han compartido conmigo, a los tres porque no sólo han sido mis profesores, sino porque también han sido mis guías matemáticos y mis amigos.

A otro gran personaje que me llamó la atención por saber siempre hacer la pregunta interesante (la que va a la yugular, como dice Alberto), a alguien con una gran visión de la matemática, con una enorme paciencia y una caligrafía impecable, mi director de tesis: Gonzalo Contreras, a quien le pregunté un día si podía dirigirme una tesis y se negó, pero días después se arrepintió y aceptó... espero que el resultado final no lo haya hecho arrepentirse de nuevo, mil gracias Gonzalo.

A todos mis profesores en el CIMAT y en la Facultad de Matemáticas (FAMAT) por haber compartido sus conocimientos, por confiar en mí y por realizar una gran labor de

formación matemática en mi persona, en especial a: José Carlos Gómez, Renato Iturriaga, Luis Hernández, Omegar Calvo, Pedro Luis del Angel, Ricardo Vila, Daniel Massart, Gil Bor que fue por quien conocí al CIMAT gracias al Taller de Ciencia para Jóvenes; Berta Gamboa, Helga Fetter, Maite Fdz., a mi tocayo Jorge Olivares por haberme siempre sugerido que no llevara tantas materias (e hizo bien) y al invaluable apoyo de Ignacio e Ingrid Baradas. A dos personas muy importantes sin las cuales esta tesis tuviera otro sabor: Manuel Cruz por el escrutinio sesudo con que encontró todos los errores en los manuscritos, desde matemáticos hasta tipográficos; y a Matilde Martínez por haber organizado el seminario que me llevó a conocer los ciclos foliados, por sus claras explicaciones y su energía al hablar de matemáticas. A todos mis compañeros y amigos de la FAMAT. Por último a Osvaldo Osuna por sus consejos, amistad y apoyo.

A Genoveva Aguilera, nuestro angel guardian en la Facultad: cuántas veces me habrían expulsado de la universidad sin haberme dado cuenta si no fuera por ti... infinitamente gracias. A Lourdes Navarro y Toquina Carrillo por su indispensable ayuda desde hace tanto tiempo.

En la UAEM, a Radmila Bulajich por haber sido quien me puso en la senda de las matemáticas, a Ana Alberro por haberme acercado a la teoría de números, por su buen humor y su energía contagiosa. En el IMATE, Cuernavaca, a Rolando Jiménez por el interés en que yo aprendiera cada vez más; a José Luis Cisneros por su gran ayuda y apoyo; y muy especialmente a Liz por su gran labor y por haberme ayudado siempre que lo he necesitado.

A Susan Goldstein y Mara que hicieron que mi paso por OHIO STATE UNIVERSITY fuera más agradable. A toda la gente que me ayudó y me animó en tantas ocasiones en L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE: Claude Viterbo por sus explicaciones, por confiar en mi y por sus consejos; a Pascale Fuseau sin cuya ayuda hubiera terminado muriéndome de hambre en alguna estación del metro parisino; a todos mis amigos que me abrieron las puertas de un mundo políglota y multicultural. Por último un agradecimiento muy muy especial a mi angel guardian francés, Gérard Rivaud: *merci mon cher ami*.

Quiero agradecer la gran ayuda de diversas personas que han aparecido en mi vida y que me han ayudado de muy diversas formas: a Lorena, por su amistad, por lo que hizo en mí, por haberme hecho subir a una montaña rusa de sentimientos y salir sonriendo, en fin... por el camino recorrido juntos y por ser un lindo prelude a una importante parte de mi vida, también a su familia por haberme adoptado tantas veces; a mis hermanos nacidos junto conmigo en la prepa y que han seguido siendo mis hermanos hasta la fecha; a Lilia y su familia por las tantas veces que fueron mi familia en Guanajuato, y a la Sra. Rosy por permitirme hacer de su casa mi casa.

Por último a quien conforma mi familia, la que hemos formado poco a poco, la que convive todos los días con mi humor (el bueno y el malo), con mi distracción, con frases bárbaras como “toda hoja no cerrada en el infinito de una foliación sobre una variedad compacta soporta un ciclo foliado no trivial”, con mis manías, etc.: a Kleine quien me cambió la vida y a Ana, por su paciencia, porque a veces hace que yo pierda la mía, por su ternura, sus regaños, su sabiduría innata, por su habilidad en la cocina, en la costura, en el deporte, en Mathematica, en todos lados, por su corazón, sus ojos, su sonrisa, en fin... por su simple existencia: *¡no se qué hubiera hecho sin ti!*

Prefacio

*“ On n’étudie pas la nature parce que c’est utile,
mais parce qu’elle est source de joie,
et elle est source de joie parce qu’elle est belle.
Je ne parle bien sûr pas ici de cette beauté qui frappe
les sens, celle des qualités et des apparences,
non que je sous-estime une telle beauté, loin s’en faut,
mais elle n’a rien à voir avec la science:
j’ai à l’esprit la beauté profonde
qui vient de l’ordre harmonieux des parties...”*

Henri Poincaré.

(Citado por Marc Julia en Pour la Science n°159).

En la primavera de 2003 Xavier Gómez-Mont y Matilde Martínez organizaron un seminario para leer el artículo de Dennis Sullivan: *Cycles for the Dynamical Study of Foliations and Complex Manifolds*. Por recomendación del Dr. Gómez-Mont asistí a dicho seminario, el cual, desafortunadamente, se suspendió luego de unas pocas sesiones. Poco después platiqué con Gonzalo Contreras para que dirigiera mi tesis de licenciatura, él sugirió terminar la misión del seminario, es decir, leer y explicar el artículo arriba mencionado. Esta empresa duró casi un año.

El presente trabajo es producto de muchas discusiones, conferencias, correos electrónicos y reuniones intensas con muchas personas, en particular con las siguientes, gracias a cuyas ideas pude enriquecer este manuscrito un poco más: Alberto Verjovsky, José Seade, Xavier Gómez-Mont y, por supuesto, Gonzalo Contreras.

La idea fue de elaborar un manuscrito de consulta fácil, con bibliografía suficiente y precisa, que diera las ideas y demostraciones claves de la identificación de los ciclos foliados con las medidas transversas invariantes; así como varias de las aplicaciones de este resultado, tanto las que aparecen en el artículo de Sullivan como otras más novedosas.

Los prerequisites son propios de un estudiante graduado interesado en sistemas dinámicos como por ejemplo: un primer curso de sistemas dinámicos,

teoría general de foliaciones, análisis funcional, teoría de la medida, geometría riemanniana, topología algebraica y topología diferencial. Para entender ciertos ejemplos se requieren también algunos temas más específicos como teoría de distribuciones, álgebras y grupos de Lie.

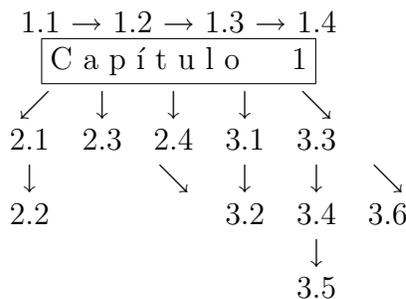
El manuscrito está organizado en tres capítulos y dos apéndices. El primer capítulo es el pilar de la tesis, explicaremos los principios básicos de la teoría de corrientes, las corrientes foliadas y demostraremos el teorema central: *la identificación de las corrientes foliadas con las medidas invariantes por holonomía*.

En el segundo capítulo daremos tres importantes aplicaciones de esta teoría en el crecimiento de las hojas, la recurrencia y la existencia de ciclos evanescentes.

En el tercer capítulo nos restringiremos a foliaciones de codimensión y dimensión uno. Daremos aplicaciones en estos casos particulares, redemostrando tanto teorema de Novikov, como ciertos resultados acerca de una conjetura de A. Verjovsky; así mismo estudiaremos aplicaciones a la existencia de transversales globales y flujos de tipo contacto.

El apéndice A expone de manera resumida las nociones básicas de medida transversa invariante, pseudogrupo de holonomía y un ejemplo de una foliación que no admite medidas transversas invariantes. El apéndice B presenta una muy breve introducción a la teoría de espacios foliados.

El cuadro siguiente ilustra la dependencia de las secciones.



La numeración indica el capítulo y la sección y avanza de manera lineal, es decir *Ejemplo 2.1.4* indica un ejemplo en el capítulo dos, sección uno, el 4 es simplemente para numerar los apartados de dicha sección. Todas las definiciones, ejemplos, observaciones y resultados están numerados para que el lector pueda abordar el texto desde cualquier punto y regresar sólo a puntos clave en caso de ser necesario.

Los cuadrados que encierran a algunos resultados y definiciones, por ejemplo:

Teorema 1.4.1 Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión p , transversalmente...

indican que dicha definición o resultado es de crucial importancia en la teoría y, en algunos casos, que será utilizado más adelante, los únicos resultados importantes que están dentro de un recuadro son los que su demostración está incluida en el texto.

Por último, las notas importantes se indican con el símbolo \square y las preguntas abiertas con el símbolo $?$.

Se ha realizado un gran esfuerzo para que las referencias sean lo más explícitas posibles, de modo que el lector interesado pueda ahondar en un tema o simplemente consultar detalles sin mucho esfuerzo.

Varias de las demostraciones a lo largo de este trabajo son originales y se plantean algunas preguntas abiertas.

*Jorge Albarrán,
Guanajuato, Gto. a 28 de Julio de 2004.*

ÍNDICE GENERAL

Prefacio	III
Índice general	VII
Introducción	1
1. Ciclos Foliados y Medidas Transversas	9
1.1. Corrientes	10
1.2. Corrientes Foliadas	18
1.3. El cono $\mathcal{C}_\mathcal{F}$	24
1.4. Las Medidas Transversas son Ciclos Foliados	30
2. Geometría de las Hojas	39
2.1. Crecimiento	40
2.2. Crecimiento de las Hojas	48
2.3. Recurrencia	54
2.4. Ciclos Evanescientes	57
3. Codimensión y Dimensión Uno	61
3.1. Codimensión Uno	62
3.2. Demostración Homológica del Teorema de Novikov	67
3.3. Foliaciones de Dimensión Uno	68
3.4. Secciones Transversas Globales	76
3.5. Flujos de Anosov: una conjetura de Verjovsky	79
3.6. Flujos de Contacto	82

A. Medidas Transversas Invariantes	87
A.1. Medidas Transversas Invariantes por Holonomía	87
A.2. Una foliación que no admite medidas transversas invariantes .	90
B. Espacios Foliados	93
B.1. Definiciones Básicas	93
B.2. Pseudogrupo de Holonomía y Medidas Transversas Invariantes	95
B.3. Teoría de DeRham	96
Bibliografía	99
Índice de figuras	103
Índice alfabético	105

Introducción

*“La science a eu de merveilleuses applications,
mais la science qui n’aurait en vue que les applications
ne serait plus de la science, elle ne serait plus que de la cuisine.”*
Henri Poincaré

Al integrar un campo vectorial no singular, definido sobre una variedad M , se obtiene una partición de M por curvas (1-variedades diferenciables). Dicha partición se llama una *foliación de dimensión uno* de M y a las órbitas del flujo se les llama las *hojas de la foliación* (ver la Figura 1).

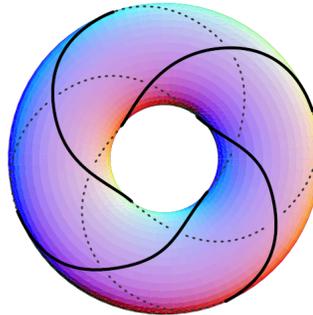


Figura 1: Una hoja (o una órbita) de una foliación de dimensión uno en el toro (flujo racional del toro).

El estudio de estos objetos cobró mucha importancia a finales del siglo XIX y principios del siglo XX. La generalización natural a dimensiones más altas es considerar la solución no de una, sino de un sistema de ecuaciones diferenciales definidas sobre M con una cierta condición de integrabilidad¹. Intuitivamente, una *foliación* de M de dimensión p es una descomposición de

¹El teorema de Frobenius.

M en subvariedades diferenciables conexas de dimensión p , llamadas las *hojas de la foliación*, que se pegan como las hojas de un libro (ver Figura 2). La teoría de foliaciones actual se inicia en la década de los 40's con los trabajos de G. Reeb, que intentaba responder a una pregunta hecha por E. Hopf sobre campos de vectores en \mathbb{S}^3

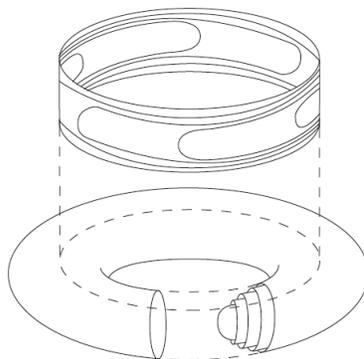


Figura 2: La foliación de Reeb en el toro sólido y un corte transversal de ésta.

Por otro lado, las medidas invariantes por un flujo resultaron ser un objeto de gran importancia y utilidad para estudiar la dinámica de flujos. La generalización de estas medidas en foliaciones se consigue considerando medidas en el espacio transversal a la foliación en donde se identifican los puntos que pertenezcan a una misma hoja y pidiendo que sean invariantes bajo el “flujo de las hojas”. Las medidas transversas han sido objeto de estudio desde hace más de 50 años y han demostrado ser muy útiles para la comprensión de la dinámica de las foliaciones.

En 1957 S. Schwartzmann publica un revolucionario artículo, en donde proporciona una manera de asociar a una medida invariante por el flujo una clase en la homología de la variedad. Dichas clases de homología fueron bautizadas bajo el nombre de *ciclos asintóticos*.

La idea en la construcción de los ciclos asintóticos es la siguiente: una medida ergódica define una clase en homología. En efecto, recordando el teorema ergódico, tomamos un punto genérico², entonces, podemos construir un elemento de $(H^1(M; \mathbb{R}))^* \cong H_1(M; \mathbb{R})$ tomando el límite de promedios de “órbitas largas casi cerradas”. Ahora, via el teorema de representación de Riesz, el espacio de medidas invariantes se identifica con un subespacio convexo y débil*-compacto de las funciones continuas de M a \mathbb{R} . Los puntos extremos de dicho conjunto son precisamente las medidas ergódicas; aplicando

²Es decir, que la integral sobre M de toda función continua es límite, cuando el tiempo tiende a infinito, del promedio de las integrales de línea sobre la órbita de x .

el teorema de Choquet, toda medida invariante se puede aproximar por combinaciones lineales con coeficientes positivos de medidas ergódicas.

La *teoría de corrientes* resultó útil para generalizar esta asociación de clases de homología a las medidas transversas invariantes en foliaciones de dimensión arbitraria, ya que una medida es, en particular, una corriente.

—

La teoría de corrientes es la generalización hecha por G. DeRham [DR] de la *teoría de distribuciones* de L. Schwartz [Sc]. Una corriente es un funcional lineal continuo definido en el espacio \mathcal{D}_p de p -formas diferenciales con soporte compacto cuando se ha dotado a este último de una topología conveniente. Si consideramos los espacios duales \mathcal{D}'_p de \mathcal{D}_p obtenemos un complejo de cadenas con el operador adjunto de la derivada exterior, este complejo nos permite definir la *homología de DeRham* u *homología con soporte compacto* que es isomorfa a la homología singular.

D. Ruelle y D. Sullivan [RS] en 1975 definen las corrientes geométricas en variedades, lo cual fue generalizado y publicado el año siguiente en [Sul], en donde se definen las *corrientes de estructura*, que en el caso particular de variedades foliadas son llamadas *corrientes foliadas*.

Las corrientes foliadas se construyen de la siguiente manera: consideremos las corrientes de Dirac en el conjunto de p -vectores tangentes a las hojas de la foliación; esto es, los funcionales C_v definidos en $H^1(M; \mathbb{R})$ por:

$$\langle C_v, \omega \rangle = \omega(v),$$

donde v es un p -vector tangente a una hoja. Definimos entonces el cono $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ como la cerradura topológica en el espacio de corrientes del cono convexo formado por las corrientes de Dirac. A los puntos de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ se les llama *corrientes foliadas*.

En el capítulo uno se explica con detalle la construcción de la homología de DeRham y de las corrientes foliadas. Un primer resultado es el siguiente.

Teorema I *Las corrientes foliadas se corresponden biunívocamente con las medidas de Borel acotadas y no negativas.*

Un *ciclo foliado* es una corriente foliada que se anula en las p -formas exactas. El teorema principal del primer capítulo (y de la tesis) es:

Teorema II *Los ciclos foliados están en correspondencia canónica con las medidas transversas invariantes.*

La “correspondencia canónica” mencionada en el teorema consiste en asignar a cada medida transversa invariante μ una corriente C_μ definida como sigue: dada una p -forma, en una carta foliada regular, la integral en las placas con respecto a la forma de volumen es una función continua del espacio transverso a \mathbb{R} . Integramos entonces dicha función en el espacio transverso contenido en la placa con respecto a μ . Por último, pegamos estas integrales con una partición de la unidad asociada a un atlas foliado regular finito.

Aplicaciones sencillas del teorema de Hahn-Banach nos permiten demostrar un importante teorema en §I.3, que relaciona la posición relativa del cono de corrientes foliadas $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ con respecto a los subespacios de p -formas exactas y cerradas, con información sobre la existencia de medidas transversas invariantes y formas positivas en la dirección de la foliación (ver Figura 3). Este resultado, al reinterpretarlo via el teorema anterior, nos proporciona una herramienta poderosísima cuyas aplicaciones se explican en los siguientes dos capítulos.

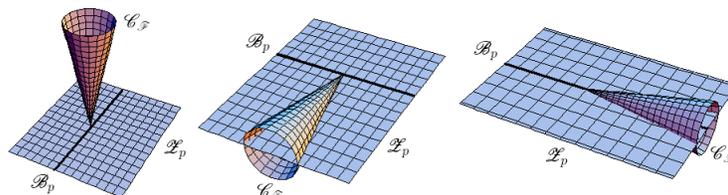


Figura 3: La manera en que el cono de corrientes foliadas $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ intersecta a los espacios de p -formas cerradas y exactas nos da información sobre la existencia de medidas transversas invariantes y formas positivas en la dirección de la foliación.

=

La primera aplicación del teorema II tiene que ver con la geometría de las hojas de una foliación.

En 1975, J. Plante publica un bello artículo en donde relaciona el crecimiento de las hojas de una foliación con la existencia de medidas transversas invariantes por holonomía. Él demuestra lo siguiente: *una hoja con crecimiento subexponencial soporta una medida transversa invariante no trivial.*

La idea principal es considerar sucesiones de regiones cuyo volumen crece más rápido que el área de su frontera; dichas sucesiones son conocidas como

secuencias promediantes y son una manera muy útil de construir ciclos foliados.

Sullivan introduce un invariante casi isométrico que está cercanamente relacionado con el crecimiento: una hoja es *no cerrada en el ∞* si la forma de volumen es el coborde de una forma acotada.

Es posible demostrar que si una hoja es *no cerrada en el ∞* , entonces tiene crecimiento exponencial, mientras que el recíproco no es cierto (ver Figura 5). Esto nos permite generalizar el resultado de Plante y demostrar el teorema principal de §2.2, que enunciamos a continuación.

Teorema III *La cerradura de una hoja cerrada en el ∞ soporta una medida transversa invariante.*

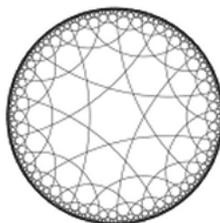


Figura 4: Los ciclos foliados tienen una estrecha relación con el crecimiento de las hojas. El plano hiperbólico es “no cerrado en el ∞ ”, por lo que tiene crecimiento exponencial.

La segunda aplicación es al *conjunto de recurrencia de Poincaré* $P(\mathcal{F})$, definido como la unión de los soportes de los ciclos foliados, que generaliza al conjunto de puntos recurrentes del clásico teorema de recurrencia de Poincaré para flujos. Demostraremos dos propiedades interesantes de este conjunto:

1. El conjunto $P(\mathcal{F})$ es cerrado e invariante.
2. La propiedad $P(\mathcal{F}) = \emptyset$ es una propiedad estable.

En §2.4, estudiamos la tercera aplicación, la cual está motivada en el trabajo de Novikov [N] en donde se demuestra que en dimensión tres la presencia de un ciclo evanescente implica la existencia de una componente de Reeb (como en la Figura 2). El teorema principal de esta sección es.

Teorema IV *Un ciclo evanescente de dimensión uno menos que la hoja implica la existencia de un ciclo foliado no trivial.*

Al final planteamos dos preguntas para las cuales el autor ignora si existe respuesta alguna.

Existe un número mayor de aplicaciones interesantes cuando estudiamos foliaciones de codimensión o dimensión uno. Esto, gracias a la existencia de transversales y a la identificación de las medidas transversas con las medidas invariantes por el flujo, respectivamente.

En el caso de codimensión uno, estudiado en §3.1, demostramos el siguiente teorema.

Teorema V *Un ciclo foliado no trivial en codimensión uno es distinto de cero en homología o soportado por hojas compactas.*

La idea de la demostración de este resultado reside en dos resultados clásicos y un teorema de Plante [P] que demostramos con detalle. Así mismo demostraremos el resultado siguiente.

Teorema VI *La propiedad de que cada hoja de la foliación tenga crecimiento exponencial es una propiedad estable.*

Una bonita aplicación de la herramienta de ciclos foliados en codimensión uno es la demostración homológica del notable teorema de Novikov, la cual realizamos en §3.2.

Teorema VII (Novikov) *Una foliación de codimensión uno de \mathbb{S}^3 de clase C^2 posee una hoja compacta.*

Ahora, en el caso en que la foliación es de dimensión uno, existen muchas ventajas como el resultado siguiente: *toda foliación de dimensión uno en una variedad compacta posee un ciclo foliado no trivial.*

Más aún, en dimensión uno, la foliación está dada por el flujo ϕ de un campo vectorial no singular (simplemente nos olvidamos del tiempo) y tenemos las identificaciones:

$$\begin{array}{c} \text{Ciclos Foliosos} \\ \updownarrow \\ \text{Medidas Invariantes por Holonomía} \\ \updownarrow \\ \text{Medidas } \phi\text{-invariantes.} \end{array}$$

Una *dirección en homología* es un ciclo foliado que se corresponde con una medida ergódica, entonces, aplicando el teorema de Choquet tenemos la proposición siguiente.

Proposición VIII *Todo ciclo foliado en dimensión uno puede ser arbitrariamente aproximado por combinaciones lineales con coeficientes positivos de direcciones en homología.*

Esta herramienta nos permite estudiar la existencia de *secciones transversas globales* y dar varias equivalencias que implican su existencia, eso se resume en la siguiente proposición.

Proposición IX *Si \mathcal{F} es una foliación de dimensión uno generada por las órbitas de un flujo C^1 no-singular, entonces son equivalentes:*

- i) *Existe una fibración suave $\pi : M \rightarrow \mathbb{S}^1$.*
- ii) *\mathcal{F} es transversal a una foliación de clase C^2 con holonomía trivial.*
- iii) *\mathcal{F} no tiene ciclos foliados que se anulen en las formas exactas.*
- iv) *\mathcal{F} admite una transversal total.*
- v) *Existe una 1-forma cerrada positiva en las direcciones tangentes a las hojas de \mathcal{F} .*

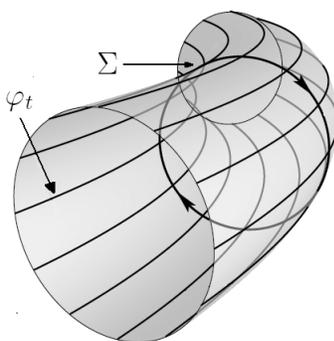


Figura 5: Los ciclos foliados sirven para determinar la existencia de secciones transversas globales a un flujo. En la figura Σ es una sección transversal global al flujo φ_t .

En 1974, Alberto Verjovsky [V] propone la siguiente conjetura: *todo flujo de Anosov de codimensión uno en una variedad de dimensión mayor que tres posee una sección transversal global.*

Motivados en ella hemos decidido incluir un apartado de flujos de Anosov en donde demostramos el siguiente teorema en §3.5.

Teorema X *Si la distribución de planos $E^s \oplus E^u$ genera una foliación de clase C^2 , entonces el flujo de Anosov posee una sección trasnversa global.*

Así mismo, utilizando la maquinaria de ciclos foliados podemos dar una desmotración alternativa al resultado siguiente, que aparece en [V].

Proposición XI *Un flujo de Anosov de codimensión uno en una variedad compacta de dimensión mayor que tres posee una sección transversa global si y sólo si existe una 1-forma cerrada ω tal que*

$$\int_{\gamma} \omega > 0,$$

para toda órbita periódica γ .

La última aplicación que consideramos es a variedades de tipo contacto. En un artículo de McDuff [Mc] se dan condiciones necesarias y suficientes en los ciclos foliados para que una variedad sea de tipo contacto. Este año Contreras, Macarini y Paternain [CMP] retomaron este resultado de McDuff y lo demostraron en otro contexto, dando condiciones sobre la “acción de una medida invariante” para que una variedad sea de tipo contacto.

El resultado principal de esta sección es:

Teorema XII (McDuff) *Sea M una variedad compacta de clase C^{∞} y X un campo vectorial no singular sobre M . Si θ es una 1-forma en M y si X no admite una sección transversa global entonces son equivalentes:*

i) *Existe una 1-forma cerrada φ tal que*

$$\theta(X) + \varphi(X) \neq 0.$$

ii) *La integral $\int \theta(X)d\mu$ nunca se anula para toda medida μ con homología cero.*

Este resultado está ligado con la famosa conjetura de Alan Weinstein [We] que dice: *el flujo de Reeb en una variedad de tipo contacto posee una órbita periódica.*

Ambas conjeturas, la de Verjovsky y la de Weinstein son aún problemas abiertos.

零

CAPÍTULO 1

Ciclos Foliados y Medidas Transversas

Los *ciclos foliados* definidos por Sullivan [Sul] generalizan los *ciclos asintóticos* de Schwartzmann [Sch]. Estos ciclos adquieren gran importancia cuando el propio Sullivan demuestra que están en correspondencia bi-unívoca con las medidas transversas invariantes. Este capítulo está dedicado al estudio de este importante resultado.

En la primera sección daremos una introducción general a la teoría de corrientes, y a la homología de DeRham, algunas demostraciones serán simplemente referidas ya que no están dentro del interés de este trabajo. En la segunda sección definiremos las *corrientes foliadas* y demostraremos que están en correspondencia con las *corrientes de integración*.

En la tercera sección estudiaremos al cono de corrientes foliadas $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ y las implicaciones que tiene su posición en el espacio de corrientes. La última sección está dedicada a demostrar el teorema de Sullivan que identifica los ciclos foliados con las medidas transversas y bajo esta identificación reinterpretaremos ciertos resultados importantes de la sección 3. Las referencias principales de este capítulo son [CC, D, DR, G, L, Sul].

Las medidas transversas invariantes son un tema clásico de la teoría de foliaciones, por lo cual únicamente hemos incluido en el apéndice A una pequeña introducción con las definiciones y propiedades básicas de dichas medidas, siguiendo [S] en su mayoría.

1.1. Corrientes

La teoría de *corrientes* de DeRham [DR] elaborada en los años 50 es un análogo de la teoría de distribuciones de Shwartz [Sc] creada a finales de 1940. Las *distribuciones* son funcionales continuos definidos en el espacio de funciones con soporte compacto cuando se ha dotado a dicho espacio con una topología adecuada. De la misma manera, cuando hemos dotado con una topología conveniente al espacio de formas con soporte compacto Ω_c^p , las *p-corrientes* se definen como funcionales continuos definidos en Ω_c^p , e.g. las distribuciones son 0-corrientes. Más aún, dicha topología hace a la derivada exterior un operador lineal continuo, por lo que podemos definir su operador adjunto y a partir de éste definir la *homología de DeRham*, también llamada *homología con soporte compacto*. En esta sección definiremos las corrientes y la homología de DeRham.

A lo largo de esta sección M será una variedad n -dimensional y orientable de clase C^∞ .

Introduciremos una topología en el espacio $\Omega^{p,k}(M) := C^k(M, \Lambda^p(TM)^*)$ (resp. $\Omega^p(M) := C^\infty(M, \Lambda^p(TM)^*)$) de las p -formas diferenciales de clase C^k (resp. de clase C^∞) sobre M .

Tomemos $U \subset M$ un abierto coordinado. Para cada $\omega \in \Omega^{p,k}(M)$ podemos escribir, en coordenadas locales, $\omega(x) = \sum \omega_I(x) dx_I$ para todo $x \in U$, donde $I = (i_1, \dots, i_p)$ es un multiíndice con $i_1 < \dots < i_p$, $i_1, \dots, i_p \in \{1, 2, \dots, n\}$. Luego, para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y cualquier $K \subset U$ compacto definimos la seminorma $\|\cdot\|_K^k$ por

$$\|\omega\|_K^k = \sup_{x \in K} \sum_{|\alpha| \leq k, |I|=p} |D^\alpha \omega_I(x)|, \quad (1.1)$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ y $D^\alpha = \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$ es la derivada de orden $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

La topología \mathcal{T}^k definida por esta seminorma cuando U y K varían hace a $\Omega^{p,k}(M)$ un espacio topológico Hausdorff localmente convexo. Ahora, notemos que $\mathcal{T}^k \subseteq \mathcal{T}^{k+1}$, esto nos da una topología $\mathcal{T} = \cup_k \mathcal{T}^k$ para el espacio $\Omega^p(M)$ que es la topología definida por las seminormas de 1.1 cuando U, K y k varían. Es claro que $\Omega^p(M)$ con esta topología es también un espacio Hausdorff localmente convexo. Podemos entonces hacer la siguiente definición.

Definición 1.1.1

a) Definimos al espacio \mathcal{E}_p (respectivamente \mathcal{E}_p^k) como el espacio $\Omega^p(M)$ (resp. $\Omega^{p,k}(M)$) con la topología \mathcal{T} (resp. \mathcal{T}^k).

b) Si $K \subset M$ es un compacto, definimos

$$\mathcal{D}_p(K) := \{\omega \in \mathcal{E}_p \mid \text{supp}(\omega) \subseteq K\},$$

con la topología inducida de $\mathcal{E}_p(M)$ y $\mathcal{D}_p := \mathcal{D}_p(M) := \cup_K \mathcal{D}_p(K)$, es decir, todas las formas con soporte compacto. Los espacios $\mathcal{D}_p^k(K)$ y $\mathcal{D}_p^k := \mathcal{D}_p^k(M)$ se definen de manera similar.

Observaciones 1.1.2

i) Dado un compacto $K \subseteq M$, una sucesión $\{\omega_i\}$ converge a $\omega \in \mathcal{D}_p(K)$ si y sólo si converge a ω en $\mathcal{D}_p^k(K)$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

ii) Una sucesión $\{\omega_i\}$ converge a $\omega \in \mathcal{D}_p$ si y sólo si $\{\omega_i\}$ está contenida en $\mathcal{D}_p(K)$ para algún $K \subseteq M$ compacto tal que $\{\omega_i\}$ converge a ω en $\mathcal{D}_p(K)$. En particular, si M es compacta, la condición de la observación anterior es suficiente.

iii) Un funcional lineal $C : \mathcal{D}_p \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo si y sólo si para cada compacto $K \subseteq M$ existen $c > 0$ y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que

$$|\langle C, \omega \rangle| \leq c \|\omega\|_K^k, \quad \forall \omega \in \mathcal{D}_p(K), \quad (1.2)$$

donde $\langle C, \omega \rangle$ denota la evaluación de C en la forma ω . Cuando el entero k puede ser elegido independientemente del compacto K se dice que C es de *orden finito* y el mínimo k para el cual se cumple lo anterior se le llama el *orden de C* (ver [L, p. 17, Définition II.1.1]).

iv) Un funcional C de \mathcal{D}_p a \mathcal{D}_r (resp. \mathbb{R}) es continuo si y sólo si $\{C(\omega_i)\}_{i \in I} \subset \mathcal{D}_p$ converge a $C(\omega)$ en \mathcal{D}_r (resp. en \mathbb{R}) para toda sucesión $\{\omega_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{D}_p$ convergente a $\omega \in \mathcal{D}_p$ (ver [K, p. 103 Theorem 4.2]).

Ahora, decimos que $S \subset \mathcal{D}_p$ es *acotado* si es acotado relativo a la norma $\|\cdot\|_K^k$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y todo compacto $K \subseteq M$. De la misma manera, una aplicación lineal C de \mathcal{D}_p a \mathcal{D}_r (resp. a \mathbb{R}) se dice acotada si es acotada con respecto a la norma $\|\cdot\|_K^k$, es decir, si para toda sucesión acotada en \mathcal{D}_p , la imagen de dicha sucesión bajo C es una sucesión acotada en \mathcal{D}_r (resp. en \mathbb{R}).

Observación 1.1.3 La derivada exterior $d : \mathcal{D}_{p-1} \rightarrow \mathcal{D}_p$ es acotada, ya que los elementos de \mathcal{D}_p son formas con soporte compacto cuyos coeficientes son de clase C^∞ , entonces la imagen de una sucesión acotada bajo d es acotada.

El siguiente resultado es una consecuencia simple de estas definiciones y de las observaciones anteriores.

Lema 1.1.4 *Una función lineal acotada $C : \mathcal{D}_p \rightarrow \mathcal{D}_r$ es continua. Una función lineal $C : \mathcal{D}_p \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si y sólo si es acotada.*

Demostración. Ver [CC, p. 233 Lemma 10.1.4]. □

Un corolario inmediato es el siguiente.

Corolario 1.1.5 *La derivada exterior $d : \mathcal{D}_{p-1} \rightarrow \mathcal{D}_p$ es una aplicación lineal continua.*

Podemos definir ahora al espacio de p -corrientes.

Definición 1.1.6

Definimos el espacio de **p-corrientes** en M como el espacio de transformaciones lineales de \mathcal{D}_p a \mathbb{R} , tales que su restricción a $\mathcal{D}_p(K)$ es continua para todo $K \subseteq M$ compacto. Es decir,

$$\mathcal{D}'_p = \{C : \mathcal{D}_p \rightarrow \mathbb{R} \mid C|_{\mathcal{D}_p(K)} \text{ es lineal y continuo } \forall K \subseteq M \text{ compacto}\}.$$

Denotaremos por $\langle C, \cdot \rangle := C(\cdot)$ la evaluación de C en p -formas.

Notemos que el lema 1.1.4 nos permite definir una corriente de manera equivalente como una función continua $C : \mathcal{D}_p \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple con 1.2.

Ejemplo 1.1.7

Sea $x \in M$ y $v_x \in \Lambda^p(T_x M)$, definimos el funcional C_{v_x} por

$$\langle C_{v_x}, \omega \rangle := \omega(v_x), \quad \forall \omega \in \mathcal{D}_p. \quad (1.3)$$

Este funcional define una p -corriente de orden 0 llamada *corriente de Dirac*¹.

En la siguiente sección consideraremos sumas convexas de estas corrientes para definir el concepto de corrientes foliadas.

Ejemplo 1.1.8

Supongamos que M es compacta y sea μ una medida de probabilidad definida en ella. Consideremos un campo continuo de p -vectores X en M . Definimos $C_{X,\mu}$ por

$$\langle C_{X,\mu}, \omega \rangle := \int_M \omega(X) d\mu, \quad \forall \omega \in \mathcal{D}_p. \quad (1.4)$$

¹En distribuciones existen las *distribuciones de Dirac* y son definidas por la evaluación de funciones en un punto. Estas distribuciones fueron la formalización matemática del formalismo que el físico Paul Dirac introdujo en 1926 en la mecánica cuántica (ver [L, p. 19, Exemple II.2.1]).

Ésta es una corriente de orden 0 llamada *corriente de integración* y se denota también por

$$C_{X,\mu} = \int X d\mu. \quad (1.5)$$

En la siguiente sección se demostrará que este tipo de corrientes están en correspondencia con las llamadas corrientes foliadas.

Ejemplo 1.1.9

Sea $Z \subseteq M$ una subvariedad cerrada y orientada de M de dimensión p y clase C^1 . Definimos el funcional C_Z por

$$\langle C_Z, \omega \rangle = \int_Z \omega, \quad (1.6)$$

el cual define una p -corriente de orden 0.

Ejemplo 1.1.10

Sea $c = \sum_{i=1}^m c_i \sigma_i$ una p -cadena suave, i.e., $c_i \in \mathbb{R}$ y $\sigma_i : \Delta^p \rightarrow M$ es un p -simplejo singular suave para $1 \leq i \leq m$. Definimos la corriente C_c como

$$\langle C_c, \omega \rangle := \int_c \omega = \sum_{i=1}^m c_i \int_{\Delta^p} \sigma_i^*(\omega), \quad (1.7)$$

donde σ_i^* es el pullback de σ_i , esta p -corriente es referida como *corriente singular*.

Abusando del lenguaje podemos decir que una p -cadena suave es una corriente. Esta observación nos permitirá identificar la homología de DeRham con la homología singular.

Ejemplo 1.1.11

Supongamos que M es orientable y sea η una $(n-p)$ -forma, definimos C_η por

$$\langle C_\eta, \omega \rangle := \int_M \omega \wedge \eta, \quad \forall \omega \in \mathcal{D}_p, \quad (1.8)$$

la cual es una p -corriente llamada *corriente difusa*.

Más generalmente, si η es una $(n-p)$ -forma diferencial con coeficientes L_{loc}^1 la correspondencia $\eta \rightarrow C_\eta$ es inyectiva; al igual que las funciones L_{loc}^1 en \mathbb{R}^n se corresponden con un subespacio del espacio de distribuciones (ver [L, p. 18, Lemme II.1.4]).

Ejemplo 1.1.12**Corriente Asociada a una Medida Transversa.**

Sea \mathcal{F} una foliación p -dimensional transversalmente orientable de M que supondremos es una variedad compacta. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un atlas regular foliado (ver Apéndice A.1 y [G, p. 72 §II, 1.5 Définition]), para el cual denotaremos por $T_\alpha := U_\alpha/\mathcal{F}$ al espacio de hojas de $\mathcal{F}|_{U_\alpha}$ y por $\pi_\alpha : U_\alpha \rightarrow T_\alpha$ a la proyección canónica para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ (ver figura 1.1).

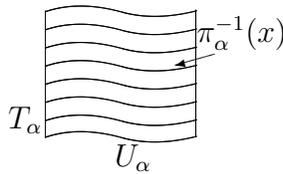


Figura 1.1: Carta foliada U_α de \mathcal{F} . La línea izquierda representa al espacio transversal T_α , mientras que $\pi_\alpha^{-1}(x)$ representa la placa de \mathcal{F} que pasa por el punto $x \in T_\alpha$.

Denotemos por $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{U}}$ al pseudogrupo de holonomía² de \mathcal{F} asociado a la cubierta \mathcal{U} .

Sea μ una medida sobre M invariante por holonomía³. Entonces, para cualquier $U_\alpha \in \mathcal{U}$, podemos integrar una p -forma ω sobre cada placa $\pi_\alpha^{-1}(x)$. Esto define una función continua de T_α a \mathbb{R} , que al ser integrada con respecto a la medida $\mu|_{T_\alpha}$ se obtiene una corriente C_μ como sigue:

Si $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una partición de la unidad asociada a \mathcal{U} , definimos la *corriente asociada a μ* como la corriente:

$$\langle C_\mu, \omega \rangle := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{T_\alpha} \left(\int_{\pi_\alpha^{-1}(x)} \lambda_\alpha \omega \right) d\mu(x). \quad (1.9)$$

Notemos que esta definición no depende de la partición de la unidad elegida, ya que si $\text{supp}(\omega) \subset U_\beta$ para algún $\beta \in \mathcal{A}$, podemos considerar los difeomorfismos locales $\gamma_{\beta\alpha} \in \Gamma$ de U_α a U_β , los cuales son invariantes bajo μ por definición de medida invariante. Luego,

$$\begin{aligned} \langle C_\mu, \omega \rangle &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{T_\alpha} \left(\int_{\pi_\alpha^{-1}(x)} \lambda_\alpha \omega \right) d\mu(x) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{T_\alpha} \left(\int_{\pi_\alpha^{-1}(\gamma_{\beta\alpha}x)} \lambda_\alpha \omega \right) d\mu(x) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{T_\beta} \left(\int_{\pi_\beta^{-1}(x)} \lambda_\beta \omega \right) d\mu(x) \\ &= \int_{T_\beta} \left(\int_{\pi_\beta^{-1}(x)} \omega \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Así mismo, si \mathcal{V} es una cubierta abierta de M más fina que \mathcal{U} , un cálculo similar muestra que la corriente es independiente de la elección de la cubierta.

²El pseudogrupo $\Gamma_{\mathcal{U}}$ es el pseudogrupo generado por los difeomorfismos locales $\gamma_{\alpha\beta} : T_\alpha \rightarrow T_\beta$ (ver Apéndice A. Definición A.1.2 y Definición A.1.3).

³Esto es una medida finita en compactos tal que $\mu(B) = \mu(\gamma(B))$, para todos $\gamma \in \Gamma$ y $B \subset \text{dom}(\gamma)$ boreliano, ver Definición A.1.5.

En la sección 4 demostraremos que las corrientes asociadas a medidas transversas, por medio de la construcción anterior, están en correspondencia biyectiva con las llamadas corrientes foliadas.

A continuación daremos una topología al espacio de corrientes y definiremos la homología de DeRham.

Por definición, el espacio de p -corrientes es el dual continuo del espacio \mathcal{D}_p , lo cual nos permite definir una topología \mathcal{T}' en \mathcal{D}'_p que lo convierte en un espacio Hausdorff localmente convexo de la manera siguiente.

Para $\epsilon > 0$ y $B \subset \mathcal{D}_p$ acotado (usando la seminorma 1.1), definimos los conjuntos

$$V_{B,\epsilon} := \{C \in \mathcal{D}'_p \mid \langle C, B \rangle \subseteq [-\epsilon, \epsilon]\}.$$

Si $C \in \mathcal{D}'_p$ definimos las vecindades de C en la topología \mathcal{T}' como los conjuntos de la forma $S_C = C + S_0$, donde $V_{B,\epsilon} \subseteq S_0$ para algunos B y ϵ , en este caso decimos que S_0 contiene a una *vecindad del 0 en \mathcal{D}'_p* . Definimos entonces un abierto de \mathcal{T}' como un conjunto $W \subset \mathcal{D}'_p$ tal que para cada $C \in W$ existe una vecindad de C , $S_C \subseteq W$. Con esto podemos realizar la siguiente definición.

Definición 1.1.13

Un subconjunto $V \subset \mathcal{D}'_p$ es **acotado** si para cada $B \subset \mathcal{D}_p$ acotado, el conjunto $\{\langle C, b \rangle \mid C \in V, b \in B\} \subset \mathbb{R}$ es acotado.

Si dotamos a \mathcal{D}'_p con la topología \mathcal{T}' tenemos una aplicación bilineal

$$e : \mathcal{D}'_p \times \mathcal{D}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

definido por $e(C, \omega) := \langle C, \omega \rangle$. Esta aplicación identifica \mathcal{D}_p con el espacio \mathcal{D}''_p de funcionales lineales continuos sobre \mathcal{D}'_p ; es decir, \mathcal{D}_p y \mathcal{D}'_p son duales fuertes.

Esta identificación es una de las propiedades más útiles y poderosas de la teoría de corrientes por lo que nos permitiremos la libertad de utilizar indistintamente estos espacios como se aclara en la siguiente nota.

☐ **NOTA 1.1.14** *En lo subsecuente, dada una p -forma $\omega \in \mathcal{D}_p$ denotaremos también por ω al funcional $e(\cdot, \omega) : \mathcal{D}'_p \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$e(C, \omega) := \langle C, \omega \rangle, \quad \forall C \in \mathcal{D}'_p, \quad (1.10)$$

es decir, identificaremos \mathcal{D}_p con su doble dual \mathcal{D}''_p .

La siguiente proposición, demostrada en [Sc, Tome I p. 70 Théorème VII; p. 74 Théorème XII], nos será de mucha utilidad, ya que nos da una condición topológica para saber cuándo un conjunto es acotado en \mathcal{D}'_p .

Proposición 1.1.15 [Sc] *Los espacios topológicos \mathcal{D}_p y \mathcal{D}'_p son Montel, i.e. un conjunto es acotado si y sólo si es precompacto.*

La discusión anterior nos permite definir el operador adjunto de la derivada exterior $d : \mathcal{D}_{p-1} \rightarrow \mathcal{D}_p$, que es un operador continuo como lo indica el corolario 1.1.5.

Definición 1.1.16

Definimos el operador $\partial := \partial_p : \mathcal{D}'_p \rightarrow \mathcal{D}'_{p-1}$ por

$$\langle \partial C, w \rangle := \langle C, d\omega \rangle, \quad \forall \omega \in \mathcal{D}_{p-1}, C \in \mathcal{D}'_p. \quad (1.11)$$

Es decir, ∂ es el operador adjunto de d .

Notemos que $\partial^2 = 0$, ya que para cualesquiera $C \in \mathcal{D}'_p$ y $\omega \in \mathcal{D}_p$ se tiene

$$\langle \partial^2 C, \omega \rangle = \langle \partial C, d\omega \rangle = \langle C, d^2\omega \rangle = 0.$$

Definimos entonces la p -ésima homología de DeRham de M como sigue.

Definición 1.1.17

Definimos el espacio de **p-corrientes cerradas** o **p-ciclos** y el espacio de **p-corrientes exactas** o **p-fronteras**, respectivamente, como

$$\mathcal{L}_p := \ker \partial_p \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_p := \text{im } \partial_{p+1}.$$

La **p-ésima homología de DeRham** queda definida entonces como el espacio

$$H_p^{\text{DR}}(M) := \mathcal{L}_p / \mathcal{B}_p.$$

De la definición se sigue que existe un apareamiento natural

$$H_p^{\text{DR}}(M) \times H^p(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},$$

definido como

$$([C], [\omega]) \mapsto \langle C, \omega \rangle.$$

Éste induce un homomorfismo

$$j_* : H_p^{\text{DR}}(M) \rightarrow H^p(M; \mathbb{R})',$$

donde $H^p(M; \mathbb{R})'$ es el dual de la cohomología de DeRham.

También tenemos, por el ejemplo 1.1.10, que una p -cadena suave en M es una p -corriente, y es fácil verificar, utilizando la versión combinatoria del teorema de Stokes, que el operador ∂ se restringe al operador frontera en cadenas bajo la inclusión de p -cadenas suaves en \mathcal{D}'_p .

Tenemos entonces un homomorfismo

$$i_* : H_p(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_p^{\text{DR}}(M).$$

Por dos teoremas de DeRham (ver [DR, §IV]) tenemos que $H^p(M; \mathbb{R})'$ es canónicamente identificado con la homología singular $H_p(M; \mathbb{R})$, y que $H_p^{\text{DR}}(M)$ y $H_p(M; \mathbb{R})$ son canónicamente isomorfos.

Teorema 1.1.18 [DR] *Los homomorfismos j_* y i_* son inversos uno al otro.*

Ejemplo 1.1.19

Consideremos la corriente C_μ asociada a una medida invariante por holonomía definida en el ejemplo 1.1.12. Recordando la definición de dicha corriente, dada $\omega \in \mathcal{D}_{p-1}$, como M es compacta podemos suponer que \mathcal{A} finito y entonces tenemos,

$$\begin{aligned} \langle \partial C_\mu, \omega \rangle &= \langle \partial C_\mu, \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \omega \rangle \\ &= \langle C_\mu, d \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \omega \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle C_\mu, d(\lambda_\alpha \omega) \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{T_\alpha} \left(\int_{\pi_\alpha^{-1}(x)} d\lambda_\alpha \omega \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Stokes a la integral anterior, como $\text{supp}(\lambda_\alpha) \subset U_\alpha$ por definición de partición de la unidad, concluimos que $\langle \partial C_\mu, \omega \rangle = 0$. Como ω era arbitraria, tenemos que $\partial C_\mu = 0$. Con esto hemos demostrado la siguiente proposición, la cual será de suma importancia en la prueba del teorema central de este capítulo.

Proposición 1.1.20 *La corriente C_μ asociada a una medida invariante por holonomía es un p -ciclo, es decir, $C_\mu \in \mathcal{Z}_p$.*

Ejemplo 1.1.21

Supongamos que M es orientable y sin frontera. Definimos la n -corriente

$$\langle C_M, \omega \rangle := \int_M \omega. \quad (1.12)$$

Tenemos entonces que

$$\langle \partial C_M, \omega \rangle = \langle C_M, d\omega \rangle = \int_M d\omega.$$

Como M no tiene frontera, por el teorema de Stokes tenemos $\langle \partial C_M, \omega \rangle = 0$ para toda $\omega \in \mathcal{D}_p$, i.e. $C_M \in \mathcal{Z}_p$.

Más aún, sabemos que $H_n(M)$ es de dimensión uno cuando M es de dimensión n , y por el teorema 1.1.18 tenemos que $H_n^{DR}(M)$ es isomorfo a $H_n(M)$. Luego, como $\mathcal{B}_n = \text{im } \partial_{n+1} = \{0\}$, se tiene que $H_n^{DR}(M) = \mathcal{Z}_n$ es 1 dimensional y como $C_\mu \neq 0$ hemos demostrado el siguiente resultado.

Lema 1.1.22 *Si M es una variedad orientable de dimensión n , entonces*

$$\mathcal{Z}_n = \{\lambda C_M \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

donde $C_M \in \mathcal{D}'_p$ es la corriente definida por $\langle C_M, \omega \rangle := \int_M \omega$.

Terminamos esta sección con el siguiente resultado, el cual nos será de mucha utilidad puesto que gracias a él muchos resultados son una consecuencia simple del teorema de Hahn-Banach como veremos en las siguientes secciones.

Lema 1.1.23 [Sul] *Los subespacios \mathcal{Z}_p y \mathcal{B}_p son subconjuntos cerrados de \mathcal{D}'_p .*

Demostración. Por la observación 1.1.3, sabemos que d es acotado, entonces ∂ es continuo y por lo tanto $\mathcal{Z}_p = \partial^{-1}(0)$ es cerrado en \mathcal{D}'_p . Por otro lado, por el teorema 1.1.12, $[C] \in H_p^{DR}(M)$ es trivial si y sólo si C se anula en todas las formas cerradas de \mathcal{D}_p , es decir,

$$\mathcal{B}_p = \bigcap_{\omega \in \mathcal{D}_p, d\omega=0} \omega^{-1}(0),$$

y como cada conjunto $\omega^{-1}(0)$ es cerrado, \mathcal{B}_p es cerrado en \mathcal{D}'_p . □

1.2. Corrientes Foliadas

Sullivan [Sul] utiliza la teoría de corrientes en el estudio de estructuras de conos en variedades. Él considera al cono convexo compacto $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ generado por las *corrientes de Dirac* en el espacio de corrientes, a los puntos de dicho cono les llama *corrientes de estructura*. Una foliación es, en particular, una estructura de conos en el sentido de Sullivan dada por los rayos en $\Lambda^p(T_x L)$ que son generados por los p -vectores que coinciden con la orientación de \mathcal{F} , donde

$x \in M$ y L es la hoja de \mathcal{F} que contiene a x . En este trabajo consideraremos únicamente estructuras de conos provenientes de foliaciones, por lo que, de acuerdo con [G], llamaremos *corrientes foliadas* a los puntos de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. En esta sección definiremos las corrientes foliadas y demostraremos que están en correspondencia con las medidas acotadas y no negativas.

En adelante consideraremos una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , donde M es una variedad C^∞ compacta n -dimensional y \mathcal{F} es una foliación de dimensión p , transversalmente orientable y de clase C^1 . Si M tiene frontera no vacía supondremos, además, que \mathcal{F} es tangente a la frontera.

Tomemos $x \in M$ y sea $L \subset M$ la hoja de \mathcal{F} que contiene a x . Como $\Lambda^p(T_x L)$ es de dimensión uno, el conjunto de p -vectores que coinciden con la orientación de $T_x L$ es un rayo en $\Lambda^p(T_x M)$. Denotaremos a estos vectores por

$$v_x = v_{1x} \wedge \dots \wedge v_{px} \in \Lambda^p(T_x L), \quad (1.13)$$

y por C_{v_x} a su corriente de Dirac asociada (ejemplo 1.1.7), i.e. C_{v_x} está definida por

$$\langle C_{v_x}, \omega \rangle := \omega(v_x), \quad \forall \omega \in \mathcal{D}_p. \quad (1.14)$$

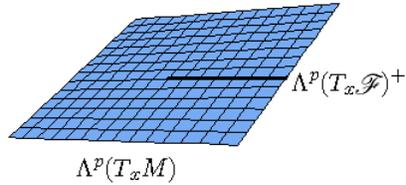


Figura 1.2: Esquemización del rayo en $\Lambda^p(T_x M)$ formado por los vectores de $\Lambda^p(T_x L)$ que preservan la orientación.

Definición 1.2.1

a) Definimos el conjunto $\{C_{v_x} \mid x \in M\}$ como el conjunto de **corrientes foliadas de Dirac** (de \mathcal{F}).

b) Una p -forma $\omega \in \mathcal{D}_p$ se dice **transversal** a \mathcal{F} si $\omega(C_{v_x}) > 0$ para cada $v_x \neq 0, x \in M$.

El siguiente lema nos dice que siempre existe $\omega \in \mathcal{D}_p$ transversal a \mathcal{F} , en este caso $\omega^{-1}(0) \subset \mathcal{D}'_p$ es un hiperplano que “deja a las corrientes foliadas de Dirac de un solo lado”.

Lema 1.2.2 [Sul] *Una foliación admite formas transversales.*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un atlas foliado regular asociado a \mathcal{F} . Para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ definamos $\omega_\alpha = dx_1^\alpha \wedge \dots \wedge dx_p^\alpha$, donde el vector coordenado $(x_1^\alpha, \dots, x_p^\alpha)$ coincide con la orientación de $\mathcal{F}|_{U_\alpha}$. El hecho de que las corrientes foliadas de Dirac formen un rayo en $\Lambda^p(T_x M)$ (ver figura 1.2) nos permite suponer que cualquier extensión de ω_α evaluada en ellas es positiva. Tomemos ahora una partición de la unidad asociada a \mathcal{U} , $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, entonces podemos definir $\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha \omega_\alpha$, la cual es una forma transversal a \mathcal{F} . \square

Podemos realizar ahora una de las definiciones claves de todo este trabajo.

Definición 1.2.3

a) Denotamos por $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ a la cerradura topológica en \mathcal{D}'_p de las combinaciones lineales finitas con coeficientes positivos de las corrientes foliadas de Dirac y llamamos a sus elementos **corrientes foliadas**.

b) Definimos los conjuntos $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} := \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{L}_p$ y $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} := \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{B}_p$ como el conjunto de **ciclos foliados** y de **fronteras foliadas**, respectivamente.

Ejemplo 1.2.4

El ejemplo trivial es una corriente de Dirac C_{v_x} , la cual es una corriente foliada por definición. Así mismo, son corrientes foliadas combinaciones lineales con coeficientes positivos de un número finito o numerable de corrientes de este tipo.

Los dos ejemplos siguientes son no triviales y de gran importancia en el desarrollo de la teoría de corrientes foliadas.

Ejemplo 1.2.5

Sea F una subvariedad cerrada p -dimensional de M contenida en una hoja L de \mathcal{F} . Consideremos a $C_F \in \mathcal{D}'_p(F)$ como la p -corriente definida por 1.6 en el ejemplo 1.1.9, i.e.

$$\langle C_F, \omega \rangle := \int_F \omega.$$

En el siguiente lema⁴ demostraremos que ésta es una corriente foliada. La demostración es elemental y no es imprescindible para la comprensión del resto del texto, por lo que el lector no interesado puede omitir su lectura. La idea es simplemente aproximar la integral por corrientes de Dirac en puntos equidistribuidos en cada carta y luego pegar dichas aproximaciones con una partición de la unidad.

⁴Este lema aparece como ejercicio en [CC], en este trabajo presentaremos dos demostraciones de él.

De hecho, la proposición 1.2.10, que demostraremos más adelante, nos da el mismo resultado de una manera más directa.

Lema 1.2.6 *La corriente C_F definida en 1.6 es una corriente foliada, i.e. $C_F \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Sea $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ una carta foliada regular de \mathcal{F} , e.g.

$$\varphi(\bar{U}) = [-1, 1]^n \text{ y } F_U := \varphi^{-1}((-1, 1)^p, 0) \text{ es una placa de } F.$$

Definiremos un conjunto de particiones del conjunto $[-1, 1]^p$ indexadas en los naturales como sigue: $P_1 := \{0\}$ y, para $k = 2, 3, \dots$ hacemos

$$P_k := \{p_i = (x_1, \dots, x_p) \in [-1, 1]^p \mid x_h \in \{\pm j/n\}_{j=1}^{n-1}, h = 1, 2, \dots, p\}.$$

Entonces si $\omega \in \mathcal{D}_p(F_U)$ y si fijamos al p -vector $v_i \in \Lambda^p(T_{\varphi^{-1}(p_i, 0)}F)$ que coincide con la orientación de $T_{\varphi^{-1}(p_i, 0)}F$ para $i = 1, \dots, n$ tenemos:

$$\int_F \omega = \int_{F_U} \omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p \in P_1 \cup \dots \cup P_n} \omega(v_i) \mu(\varphi^{-1}(B_{\frac{2}{n}}(p), 0)), \quad (1.15)$$

donde $B_{\frac{2}{n}}(p_i)$ es la bola en \mathbb{R}^p de radio $2/n$ con centro en p_i y μ es la medida de volumen en F .

Luego, si C_{v_i} es la corriente de Dirac asociada a v_i , tenemos por lo anterior que, en $\mathcal{D}'_p(F_U)$, se cumple

$$C_F = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p_i \in P_1 \cup \dots \cup P_n} \mu(\varphi^{-1}(B_{\frac{2}{n}}(p_i), 0)) C_{v_i}. \quad (1.16)$$

Ahora, para $\omega \in \mathcal{D}_p$, puesto que F es cerrada y M es compacta, podemos tomar una cubierta finita de F con cartas foliadas regulares $\mathcal{U} = \{(U_k, \varphi_k)\}_{k=1}^m$ tales que $\varphi(\bar{U}_k) = [-1, 1]^p$ y $F_k := \varphi^{-1}(\mathbb{R}^p, 0)$ sea una placa de F . Tomemos una partición de la unidad $\{\lambda_k\}_{k=1}^m$ asociada a esta cubierta, entonces podemos escribir

$$\langle C_F, \omega \rangle = \sum_{k=1}^m \int_{F_k} \lambda_k \omega, \quad (1.17)$$

y podemos hacer lo mismo que en las expresiones 1.15 y 1.16 para mostrar que C_F es un límite de combinaciones lineales de corrientes de Dirac con coeficientes positivos, es decir $C_F \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. \square

Ejemplo 1.2.7

La corriente C_μ asociada a una medida invariante por holonomía μ definida en 1.9 del ejemplo 1.1.12 es también una corriente foliada. La demostración es análoga a la del ejemplo anterior, sólo que ahora tenemos que aproximar

las integrales en ambas direcciones, primero en la placa y luego en el espacio transversal.

Más aún, usando la proposición 1.1.20, obtenemos el resultado siguiente.

Proposición 1.2.8 *La corriente C_μ asociada a una medida invariante transversal μ es un ciclo foliado, i.e. $C_\mu \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$.*

En realidad el recíproco de esta proposición es también cierto y lo demostraremos en la sección 4 de este capítulo.

Demostraremos ahora que las corrientes foliadas son corrientes de integración, como fue mencionado en el ejemplo 1.1.8. Esto es, demostraremos que a una corriente foliada podemos asignarle una única medida acotada y no negativa.

Sea ω una p -forma transversal a \mathcal{F} y, X un campo continuo de p -vectores tangentes a \mathcal{F} tal que $\omega(X) \equiv 1$. Dada $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ definimos el funcional lineal continuo $J_C : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$J_C(f) = \langle C, f\omega \rangle. \quad (1.18)$$

El siguiente lema nos dice que podemos asociar una única medida acotada y no negativa a este funcional; dicha medida será la que asociaremos a una corriente foliada.

Lema 1.2.9 *Existe una única medida ν_C acotada y no negativa sobre M , tal que*

$$J_C(f) = \int_M f d\nu_C, \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Demostración. Si $C = aC_{X(x)}$ con $a \geq 0$, es una corriente de Dirac tenemos

$$J_C(f) = \langle C, f\omega \rangle = af(x)\omega(X(x)) = af(x),$$

entonces ν_C es la medida delta de Dirac⁵ en x . Si $C = C_n = \sum_{i=1}^n a_i C_{X(v_i)}$ es una combinación lineal finita de corrientes de Dirac con $a_i \geq 0$ se tiene que la única medida $\nu_C = \nu_{C_n}$ es la suma de las medidas asociadas a cada corriente $C_{X(v_i)}$.

En el caso general, si $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$, donde cada C_n es una combinación lineal finita de corrientes de Dirac con coeficientes positivos, tenemos que la

⁵Esto es $\nu_C(B) = 1$ si $x \in B$ y $\nu_C(B) = 0$ si $x \notin B$ para todo boreliano $B \subseteq M$.

sucesión de medidas $\{\nu_{C_n}\}_{n=1}^\infty$ es acotada y por lo tanto contiene una subsucesión que converge a una medida ν_C para la cual $J_C(f) = \int_M f \nu_C$.

La unicidad se sigue del hecho que $C^\infty(M, \mathbb{R})$ es denso en $C^0(M, \mathbb{R})$; luego, podemos extender el funcional J_C a $C^0(M, \mathbb{R})$ y el teorema de representación de Riesz nos da el resultado. \square

La siguiente proposición, que utiliza la corriente definida en el ejemplo 1.1.8, nos da el resultado deseado.

Proposición 1.2.10 [Sul] *Sea X un campo de p -vectores continuo y sin singularidades tangente a \mathcal{F} . Entonces las corrientes foliadas se corresponden uno a uno con las medidas acotadas y no negativas sobre M por medio de la aplicación*

$$C \mapsto C_{X, \nu_C} := \int X d\nu_C,$$

donde ν_C es la medida dada por el lema anterior.

Demostración. Escribamos $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ como en la demostración del lema anterior, y sean ν_C y ν_n como arriba para $n = 1, 2, \dots$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f d\nu_n = \int_M f d\nu_C, \quad \forall f \in C^0(M, \mathbb{R}). \quad (1.19)$$

Ahora, es posible descomponer de manera única a toda p -forma $\eta \in \mathcal{D}_p$ escribiendo $\eta = \eta_0 + \eta(X)\omega$, donde $\eta_0|_{\Lambda^p(T\mathcal{F})} \equiv 0$. En efecto, dado que $\omega(X) \equiv 1$ y como X es un campo de p -vectores continuo tangente a \mathcal{F} , simplemente definimos $\eta_0 = \eta - \eta(X)\omega$, que se anula en $\Lambda^p(T\mathcal{F})$. Tenemos entonces, utilizando el lema anterior, que

$$\langle C_n, \eta \rangle = \int_M \eta(X) d\nu_n, \quad \forall n \geq 1;$$

y por 1.19,

$$\langle C, \eta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle C_n, X \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \eta(X) d\nu_n = \int_M \eta(X) d\nu_C,$$

expresión que es precisamente la definición de $\langle C_{X, \nu_C}, \eta \rangle$, de donde, como η era arbitrario, se sigue que $C = C_{X, \nu_C}$.

Esta asignación es biyectiva, ya que cualquier medida acotada y no negativa se puede aproximar arbitrariamente por combinaciones lineales finitas con coeficientes positivos de medidas de Dirac. \square

Observación 1.2.11 Notemos que entonces, dada una medida acotada y no negativa ν_C existe una única corriente foliada $C_{X,\nu_C} = \int X d\nu_C$ y viceversa, por lo tanto hemos demostrado también que las corrientes de integración son corrientes foliadas⁶.

Como corolario tenemos otra demostración del lema 1.2.6.

Demostración alternativa del lema 1.2.6: La medida de Lebesgue es el límite topológico de medidas de Dirac en puntos equidistribuidos, aplicando la proposición anterior el resultado se sigue. \square

Esto es, podemos pensar a las corrientes foliadas como “aproximación de medidas discretas”. Más aún, la proposición anterior nos permite trabajar más fácilmente con las corrientes foliadas, ya que ahora podemos pensarlas como corrientes de integración.

1.3. El cono $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$

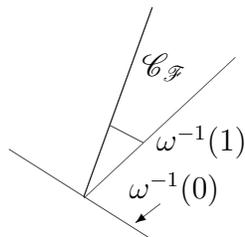


Figura 1.3: Una forma transversa ω hace a $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ un cono compacto convexo.

La posición relativa del cono de corrientes foliadas $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ (ver Definición 1.2.3) con respecto a las formas cerradas y exactas nos brinda condiciones sobre la existencia de formas transversales a la foliación, estos resultados serán el teorema principal que demostraremos en esta sección.

La mayor importancia de estos resultados son las consecuencias que tienen al ser combinados con el teorema 1.4.1, que identifica los ciclos foliados con las medidas transversas invariantes.

En esta sección continuaremos con las hipótesis de la sección anterior, i.e. la pareja (M, \mathcal{F}) es una variedad foliada en donde M es una variedad C^∞ compacta n -dimensional y \mathcal{F} es una foliación de dimensión p , transversalmente orientable y de clase C^1 . Si M tiene frontera no vacía supondremos, además, que \mathcal{F} es tangente a la frontera.

En primer lugar demostraremos que el cono $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ tiene estructura de cono compacto convexo, i.e. existe un funcional lineal L definido en \mathcal{D}'_p que es positivo en $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ y tal que la intersección de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ con la imagen inversa del 1 bajo L

⁶Esta afirmación requiere del hecho que las medidas acotadas y no negativas se pueden aproximar arbitrariamente por combinaciones lineales finitas con coeficientes positivos de medidas de Dirac.

es un conjunto compacto⁷.

Lema 1.3.1 [Sul] *Existe un funcional lineal $L : \mathcal{D}'_p \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:*

- i) $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap L^{-1}(0) = \{0\}$,
- ii) $L(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) \geq 0$, y
- iii) $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}} := \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap L^{-1}(1)$ es un conjunto compacto.

Demostración. Por el lema 1.2.2 podemos tomar una forma $\omega \in \mathcal{D}'_p$ transversal a \mathcal{F} , lo cual nos dice que $\omega(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) \geq 0$. Ahora, por la proposición 1.2.10 las corrientes foliadas están identificadas con las medidas acotadas y no negativas, el cual es un espacio compacto; como $\omega^{-1}(1)$ es cerrado, se sigue que $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}} = \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap \omega^{-1}(1)$ es compacto. Por último, la única medida no negativa con masa total 0 es la medida 0, es decir $\omega^{-1}(0) = \{0\}$ (ver figura 1.3). Tomando $L = \omega$ demostramos el lema. \square

Observación 1.3.2 De la demostración se sigue que cualquier forma transversal a \mathcal{F} es un funcional que cumple con la conclusión del lema.

Tenemos entonces una definición natural que enunciamos a continuación.

Definición 1.3.3

Si $\omega \in \mathcal{D}'_p$ es transversal a \mathcal{F} , entonces llamamos a $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}} := \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap \omega^{-1}(1)$ una **base** del cono $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$.

Enunciaremos una consecuencia del teorema de Hahn-Banach que utilizaremos más adelante, para una mayor aproximación y una demostración de este teorema véase [K, p. 135, Theorem 5.20].

Teorema 1.3.4 *Sean W un espacio vectorial topológico localmente convexo sobre \mathbb{R} , $X \subset W$ un convexo compacto no vacío y $V \subset W$ un cerrado convexo no compacto. Si $X \cap V = \emptyset$, entonces existe un funcional lineal continuo $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(V) < d < f(X)$.*

Observación 1.3.5 Si V en el enunciado del teorema es un subespacio vectorial no trivial tenemos $f(V) = 0$ ó $f(V) = \mathbb{R}$, pero si tuviésemos la segunda igualdad el número d podría no existir. Luego, debemos tener $f(V) = 0$ y entonces $d > 0$ y $f(X) \subset \mathbb{R}$ es positivo y acotado.

Siguiendo [Sul] utilizamos el lema 1.1.23 y el teorema anterior para demostrar ciertas propiedades fundamentales respecto a la posición de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ con respecto a \mathcal{L}_p y \mathcal{B}_p .

⁷Este resultado aparece en [CC], sin embargo la demostración que presentamos aquí es considerablemente más corta y sencilla utilizando la proposición 1.2.10

Teorema 1.3.6 [Sul]

- i) Siempre existen ciclos foliados no triviales en M o p -formas cerradas transversales a \mathcal{F} .
- ii) Existe una p -forma exacta transversal a \mathcal{F} si y sólo si $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \{0\}$.
- iii) Existe una p -forma cerrada transversal a \mathcal{F} si sólo si $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{0\}$.
- iv) Si existen p -formas cerradas transversales a \mathcal{F} y ciclos foliados no triviales entonces la imagen de los elementos no triviales de $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ bajo la aplicación natural

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{L}_p / \mathcal{B}_p = H_p(M; \mathbb{R})$$

son clases de homología no triviales. La imagen de esta aplicación es un cono convexo con base compacta $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} \subset H_p(M; \mathbb{R})$. El cono dual, definido por

$$\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^* := \{\gamma \mid z(\gamma) \geq 0, \forall z \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}\} \subset H^p(M; \mathbb{R}),$$

es también un cono convexo con interior no vacío que consiste de las clases de cohomología que pueden ser representadas por una p -forma cerrada transversa a \mathcal{F} .

Demostración. La parte (i) es una clara consecuencia de las partes (ii) y (iii), ya que si no existen ciclos foliados no triviales en M , i.e. si $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \{0\}$, entonces, por la parte (ii), existe una p -forma exacta transversal a \mathcal{F} , en particular dicha forma es cerrada.

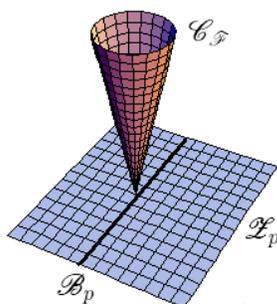


Figura 1.4: Caso en el que existe una p -forma exacta que es transversal a \mathcal{F} .

Demostraremos ahora la parte (ii). Supongamos que $\omega = d\eta$ es una forma exacta transversal a \mathcal{F} , con $\eta \in \mathcal{D}_{p-1}$. Entonces, si $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \setminus \{0\}$ tenemos $\omega(C) > 0$. Luego, para $Z \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{L}_p$,

$$\omega(Z) = d\eta(Z) = \eta(\partial Z) = \eta(0) = 0,$$

por lo que $Z = 0$.

Recíprocamente, si $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{L}_p = \{0\}$, dada una forma $\omega_0 \in \mathcal{D}_p$ transversal a \mathcal{F} , por el lema 1.3.1 sabemos que $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}} := \omega_0^{-1}(1)$ es un subconjunto compacto, convexo no vacío del espacio topológico localmente convexo \mathcal{D}'_p , por lo tanto podemos aplicar el teorema 1.3.4 y asegurar la existencia de un funcional $\omega \in \mathcal{D}_p$ tal que

$$\omega(\mathcal{L}_p) = \{0\} \quad \text{y} \quad \omega(\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}) > 0.$$

En particular, ω es positivo en las corrientes de Dirac, esto es, ω es transversal a \mathcal{F} . Por último, puesto que

$$(d\omega)(C) = \omega(\partial C) = 0 \quad \forall C \in \mathcal{D}_{p+1},$$

se sigue que ω es una forma cerrada. Más aún, tenemos que $[\omega] \in H^p(M; \mathbb{R})$ se anula en cada $[z] \in H_p(M; \mathbb{R})$, con $z \in \mathcal{L}_p$. Entonces, $[\omega]$ es el funcional cero en $H_p(M; \mathbb{R})$, i.e. $[\omega] = 0$, con lo que concluimos que ω es exacta.

A continuación demostraremos la parte (iii). Sea ω una p -forma cerrada transversal a \mathcal{F} . Para cada $Z = \partial C \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{B}_p$ se sigue

$$\omega(Z) = \omega(\partial C) = (d\omega)(C) = 0.$$

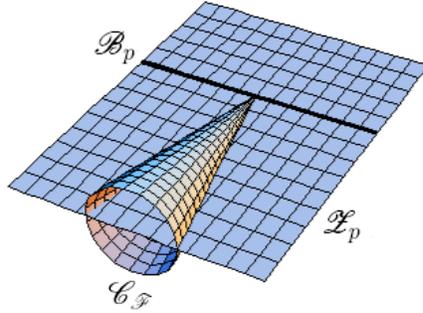


Figura 1.5: Caso en el que existe una p -forma cerrada y no exacta que es transversal a \mathcal{F} .

El hecho que ω es transversal a \mathcal{F} nos dice que $Z = 0$. Para demostrar el recíproco supongamos que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{B}_p = \{0\}$; en particular $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{B}_p = \emptyset$ y por el teorema 1.3.4 existe una p -forma ω positiva en $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}$ tal que $\omega(\mathcal{B}_p) = 0$, esto es, ω es una forma cerrada transversal a \mathcal{F} . Transversal por ser positiva en $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}$ y cerrada porque para cada $C \in \mathcal{D}'_p$ se cumple

$$(d\omega)(C) = \omega(\partial C) = 0.$$

Por último demostraremos la parte (iv). Notemos que la aplicación indicado en el enunciado del teorema es la restricción a $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ de la proyección lineal

acotada

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{L}_p / \mathcal{B}_p = H_p(M; \mathbb{R}),$$

luego, éste envía a $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ en el cono convexo $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$. Más aún, sea $\omega \in \mathcal{D}_p$ una p -forma cerrada transversal a \mathcal{F} , la cual existe por hipótesis, y definamos $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}} := \omega^{-1}(1)$, entonces el compacto $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{L}_p$ es llevado bajo esta aplicación a una base $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}} := \omega^{-1}(1) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{F}}$, que además es un compacto puesto que la aplicación es continua.

Por hipótesis, $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{0\}$ por lo que todo ciclo foliado es distinto de cero. Tomemos, pues p -formas cerradas η_1, \dots, η_r tales que el conjunto de sus clases de cohomología formen una base de $H^p(M; \mathbb{R})$. Si ω es una forma cerrada transversal a \mathcal{F} , entonces también la nueva forma

$$\omega + \sum_{i=1}^r a_i \eta_i$$

es transversal a \mathcal{F} para valores de a_i suficientemente pequeños, $i = 1, \dots, r$.

Por lo tanto, las clases de cohomología de estas formas se encuentran en una vecindad abierta de $[\omega]$ contenida en $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^*$. Con esto hemos demostrado que las clases de cohomología representadas por formas cerradas transversales a \mathcal{F} se encuentran en el interior de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^*$ y que este interior es no vacío. Resta ver que éstas son las únicas clases en el interior del cono dual.

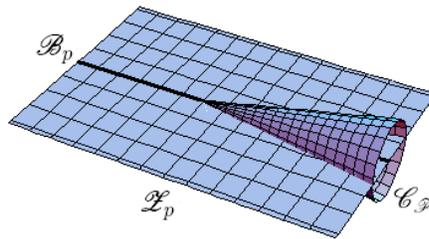


Figura 1.6: Caso en el que no existen p -formas cerradas transversales a \mathcal{F} .

Sea, pues $[\gamma] \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}^*$ tal que $\gamma(Z) = 0$ para algún ciclo foliado no trivial Z , entonces $\eta_i(Z) \neq 0$ para algún i ; luego, podemos tomar valores de $a \in \mathbb{R}$ arbitrariamente pequeños tales que $(\gamma + a\eta_i)(Z) < 0$. Esto demuestra que una clase $[\gamma]$ pertenece al interior de $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}^*$ sólo si γ toma valores estrictamente positivos en todos los ciclos foliados no triviales.

Equivalentemente, la intersección del subespacio $V = \gamma^{-1}(0) \cap \mathcal{L}_p$ con $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ es únicamente el 0. Pero V corresponde al rayo por $[\gamma]$ en el cono dual. Por el teorema 1.3.4 aplicado al subespacio cerrado $V \subset \mathcal{D}'_p$ y a $\hat{\mathcal{C}}_{\mathcal{F}}$ existe una p -forma ω estrictamente positiva en $\mathcal{C}_{\mathcal{F}} \setminus \{0\}$ tal que $\omega^{-1}(0) \cap \mathcal{L}_p = V \supset \mathcal{B}_p$; esto es, ω es una p -forma cerrada transversal a \mathcal{F} y $[\omega]$ se encuentra en el rayo por $[\gamma]$. Luego, $[\gamma] = [k\omega]$ para alguna $k > 0$. Esto demuestra la parte (iv). \square

Terminaremos esta sección con tres ejemplos que ilustran los tres casos posibles de la manera en que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ interseca a \mathcal{L}_p y a \mathcal{B}_p , estos tres casos están esquematizados en las figuras 1.4, 1.5 y 1.6.

Ejemplo 1.3.7

Si \mathcal{F} es una foliación que no admite medidas transversas invariantes se tiene, por el teorema 1.4.1, que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \{0\}$. Entonces, por la parte (i) del teorema 1.3.6, existe una p -forma cerrada transversal a \mathcal{F} , que es equivalente a decir que $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{0\}$ según la parte (iii) del mismo teorema. Este caso es precisamente el esquematizado en la figura 1.4.

En el apéndice A (véase definición A.2.1) damos un ejemplo explícito de este caso: *la foliación estable del flujo geodésico*.

Ejemplo 1.3.8

Si \mathcal{F} es una foliación de dimensión uno que admite una sección transversa global (véase la definición 3.4.1), el lema 3.3.1 y la proposición 3.4.7 nos dicen que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}} \neq \{0\}$ y $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{0\}$, por lo que existen p -formas cerradas transversales a \mathcal{F} pero ninguna de ellas exacta, según las partes (ii) y (iii) del teorema 1.3.6. Este caso se esquematiza en la figura 1.5.

Los ejemplos 3.3.13 y 3.4.3 nos proporcionan un ejemplo explícito de este caso.

Ejemplo 1.3.9

De manera similar al ejemplo anterior, si \mathcal{F} es una foliación de dimensión uno que no posee una sección transversa global, el lema 3.3.1 y la proposición 3.4.7 implican que $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}, \mathcal{B}_{\mathcal{F}} \neq \{0\}$, por lo que las partes (ii) y (iii) del teorema 1.3.6 nos dicen que no existen p -formas cerradas (ergo tampoco exactas) transversales a \mathcal{F} . Esto es esquematizado en la figura 1.6.

El teorema 1.3.6 será una herramienta muy útil que seguiremos utilizando a lo largo de este trabajo. Su poder lo adquiere al reinterpretarlo via el teorema principal de la siguiente sección, el cual identifica los ciclos foliados con las medidas transversas invariantes.

1.4. Las Medidas Transversas son Ciclos Foliados

En esta sección utilizaremos toda la maquinaria desarrollada en las secciones anteriores para demostrar la prometida identificación de los ciclos foliados con las medidas transversas invariantes por holonomía, el cual es uno de los teoremas principales publicados por Sullivan [Sul, p. 237, Theorem I.13]. El enunciado es el siguiente.

Teorema 1.4.1 [Sul] *Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión p , transversalmente orientable y de clase C^1 de una n -variedad compacta M de clase C^∞ . Entonces las medidas transversas invariantes y los ciclos foliados están en correspondencia canónica uno a uno.*

i **NOTA 1.4.2** *La correspondencia canónica quiere decir el procedimiento de asociar una corriente a una medida transversa invariante descrito en 1.9 el ejemplo 1.1.12. Esto es*

$$\langle C_\mu, \omega \rangle := \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{T_\alpha} \left(\int_{\pi_\alpha^{-1}(x)} \lambda_\alpha \omega \right) d\mu(x),$$

donde $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una partición de la unidad asociada a la cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, T_α es el espacio transversal en cada U_α y $\pi_\alpha : U_\alpha \rightarrow T_\alpha$ es la proyección canónica.

La proposición 1.2.8 demuestra que C_μ es un ciclo foliado por lo que únicamente resta demostrar el recíproco.

Antes de comenzar la demostración es necesario definir el soporte de una corriente y demostrar dos resultados importantes.

Definición 1.4.3

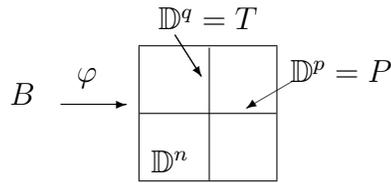
Si $C \in \mathcal{D}'_p$, definimos el soporte de C como el subconjunto de M , denotado $\text{supp}(C)$, que es caracterizado por la condición $x \notin \text{supp}(C)$ si y sólo si, existe $U \subset M$ vecindad de x tal que $\langle C, \omega \rangle = 0$ para toda $\omega \in \mathcal{D}_p(U)$.

Observación 1.4.4 El conjunto $\text{supp}(C)$ es cerrado por definición y su complemento es el abierto más grande caracterizado por la condición $\langle C, \omega \rangle = 0$ para toda $\omega \in \mathcal{D}_p(M \setminus \text{supp}(C))$ (ver [L, p. 39, Théorème III.1.2]).

Continuaremos con las mismas hipótesis de las dos secciones anteriores; es decir, consideraremos una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , donde M es una variedad C^∞ compacta n -dimensional y \mathcal{F} es una foliación de dimensión p , transversalmente orientable y de clase C^1 . Si M tiene frontera no vacía supondremos,

además, que \mathcal{F} es tangente a la frontera.

También consideraremos con un ciclo foliado no nulo C de \mathcal{F} y un campo continuo de p -vectores tangente a \mathcal{F} , que denotaremos por X . Supondremos que para una carta foliada $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, regular de \mathcal{F} , el compacto $B = \varphi^{-1}(\mathbb{D}^p \times \mathbb{D}^q)$ cumple que $B \cap \text{supp}(C) \neq \emptyset$, donde \mathbb{D}^p y \mathbb{D}^q son los discos cerrados de radio uno en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^q , respectivamente (véase la figura 1.7).



Por la proposición 1.2.10, existe una medida acotada y no negativa ν sobre M tal que

$$\langle C, \omega \rangle = \int_M \omega(X) d\nu, \quad \forall \omega \in \mathcal{D}_p.$$

Figura 1.7: Carta foliada compacta B .

Tenemos primero que del primero de ellos es un caso especial de un teorema de desintegración de medidas publicado en [B, p. 58-59.

Chapitre VI] y el segundo es un teorema de representación de corrientes publicado en [Sul, p. 237, Theorem I.12].

Denotemos por $\bar{\nu} := \nu|_B$ a la restricción de ν a B y por $\tilde{\pi}$ y π a las proyecciones de B sobre $P := \mathbb{D}^p$, que identificaremos con las placas de \mathcal{F} y $T := \mathbb{D}^q$, que identificaremos con el espacio transversal de \mathcal{F} , respectivamente. También, escribamos $\tilde{\lambda}$ y λ para denotar a las medidas imagen directa⁸ de $\bar{\nu}$ por $\tilde{\pi}$ y π , de manera correspondiente.

Sea $Z \subset B$ un boreliano para el cual $(\tilde{\lambda} \times \lambda)(A) = 0$, con $A = (\tilde{\pi} \times \pi)(Z)$ y donde $\tilde{\lambda} \times \lambda$ es la medida producto⁹.

Usando las identificaciones en P y T tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(Z) &= \bar{\nu}(\tilde{\pi}^{-1}(A) \times \pi^{-1}(A)) \\ &= \bar{\nu}(\tilde{\pi}^{-1}(A))\bar{\nu}(\pi^{-1}(A)) \\ &= \tilde{\lambda}(A)\lambda(A) \\ &= (\tilde{\lambda} \times \lambda)(A) \\ &= 0, \end{aligned}$$

⁸Dados subconjuntos borelianos $A_1 \subset P$ y $A_2 \subset T$ definimos

$$\lambda_1(A_1) := \bar{\nu}(\tilde{\pi}^{-1}(A_1)) \quad \text{y} \quad \lambda_2(A_2) := \bar{\nu}(\pi^{-1}(A_2)).$$

⁹ $(\tilde{\lambda} \times \lambda)(A \times B) := \tilde{\lambda}(A)\lambda(B)$, para todos A y B borelianos de P y T , respectivamente.

esto es, $\bar{\nu}$ es absolutamente continua con respecto a la medida $\tilde{\lambda} \times \lambda$. Aplicando el teorema de Radon-Nikodym (ver [K, p. 36, Theorem.1.40.b] y [K, p. 39 Theorem 1.41]), sabemos que existe una función $h \in L^1(\nu)$ tal que

$$d\bar{\nu} = hd(\tilde{\lambda} \times \lambda),$$

e.g. para toda función g que sea ν -integrable y no negativa en M , se tiene que

$$\int_B g d\bar{\nu} = \int_B gh d(\tilde{\lambda} \times \lambda). \quad (1.20)$$

La función h es llamada la *derivada de Radon-Nikodym* y es usualmente denotada por $d\nu/d(\lambda_1 \times \lambda_2)$.

Ahora, utilizando el teorema de Fubini en la expresión 1.20 tenemos

$$\int_B g d\bar{\nu} = \int_T \left(\int_{\pi^{-1}(y)} g d\nu_y \right) d\lambda(x), \quad (1.21)$$

donde $\nu_y = h d\tilde{\lambda}$. Con esto hemos demostrado lo siguiente.

Proposición 1.4.5 *Podemos desintegrar la medida $\bar{\nu}$ y encontrar una familia $(\nu_y)_{y \in T}$ de medidas de probabilidad sobre B , tales que, para todo $y \in T$ y toda función continua f sobre B se tiene:*

- i) $\text{supp}(\nu_y) \subset \pi^{-1}(y)$,
- ii) la función $\int_{\pi^{-1}(y)} f d\nu_y$ sobre T es λ -medible, y
- iii) $\int_B f d\bar{\nu} = \int_T \left(\int_{\pi^{-1}(y)} f d\nu_y \right) d\lambda$.

En particular, si $\omega \in \mathcal{D}_p$, con $\text{supp}(\omega) \subset \text{int}(B)$, tenemos que

$$\langle C, \omega \rangle = \int_T \left(\int_{\pi^{-1}(y)} \omega(X) d\nu_y \right) d\lambda.$$

Dada $y \in T$, denotemos por P_y a la corriente foliada definida por

$$\langle P_y, \omega \rangle := \int_{\pi^{-1}(y)} \omega(X) d\nu_y. \quad (1.22)$$

Tenemos ahora el siguiente teorema.

Teorema 1.4.6 [Sul] *Existe una única medida no negativa μ sobre el espacio transversal a la foliación T , tal que en el interior de B la corriente C puede ser representada por*

$$\int_T C_y d\mu, \quad (1.23)$$

donde C_y es la corriente de integración en $\pi^{-1}(y)$ con la orientación de \mathcal{F} .

Demostración. Demostraremos este teorema en 3 partes. En la primera parte veremos, usando la proposición anterior, que para λ -casi todo punto $y \in T$ se tiene $\text{supp}(\partial P_y) \cap \text{int}(B) = \emptyset$. El paso 2 será usar el lema 1.1.22 para mostrar que es posible representar a C como en 1.23. En el tercer paso demostraremos la unicidad.

Paso 1: Por definición, dada $\alpha \in \mathcal{D}_{p-1}(\text{int}(B))$ tenemos

$$\int_T \left(\int_{\pi^{-1}(y)} d\alpha(X) d\nu_y \right) d\lambda = 0.$$

Si g es una función de clase C^1 con soporte compacto contenido en T , podemos aproximar la forma $(g \circ \pi)\alpha$ por formas diferenciales de clase C^∞ con soporte compacto contenido en $\text{int}(B)$ y entonces

$$\int_T g(y) \left(\int_{\pi^{-1}(y)} d\alpha(X) d\nu_y \right) d\lambda = \int_T \left(\int_{\pi^{-1}(y)} d((g \circ \pi)\alpha)(X) d\nu_y \right) d\lambda = 0.$$

Como g era arbitraria se sigue que para casi todo punto $y \in \text{int}(T)$,

$$\langle \partial P_y, \alpha \rangle = 0.$$

Como el espacio \mathcal{D}_{p-1} es separable podemos tomar un conjunto denso numerable de estas formas y concluir que para λ -casi todo punto $y \in \text{int}(T)$ se cumpla $\text{supp}(P_y) \cap \text{int}(B) = \emptyset$.

Paso 2: Por el paso 1 y el lema 1.1.22 podemos escribir en $\text{int}(\pi^{-1}(y))$,

$$P_y = k(y)C_y, \quad \text{con } k(y) \in \mathbb{R},$$

para λ -casi todo punto $y \in T$. Entonces, si denotamos por μ a la medida $k\lambda$ en el interior de T , obtenemos, para toda $\omega \in \mathcal{D}_p(\text{int}(B))$,

$$\begin{aligned} \langle C, \omega \rangle &= \int_T \langle P_y, \omega \rangle d\lambda \\ &= \int_T \langle k(y)C_y, \omega \rangle d\lambda \\ &= \int_T \langle C_y, \omega \rangle d\mu, \end{aligned}$$

es decir,

$$C = \int_T C_y d\mu.$$

Paso 3: Supongamos que existe otra medida μ' que cumple con las hipótesis del teorema. Dado que μ y μ' son finitas en compactos podemos considerar la medida $\mu - \mu'$; entonces,

$$\int_T \left(\int_{\pi^{-1}(x)} \eta \right) d[\mu - \mu'](x) = 0, \quad \forall \eta \in \mathcal{D}_p(\text{int}(B))$$

y, como en el paso (ii) se sigue, que para toda función g de clase C^∞ con soporte compacto contenido en T ,

$$\int_T g d[\mu - \mu'] = 0.$$

Luego $\mu - \mu'$ es cero en compactos y por lo tanto $\mu = \mu'$. □

Podemos ahora demostrar el teorema principal de esta sección.

Demostración del Teorema 1.4.1. El teorema anterior nos proporciona la manera de construir una medida transversa a partir de un ciclo foliado C en un compacto B contenido en una carta foliada regular. Cubramos a M con cajas de flujo compactas B_1, \dots, B_m (definidas de manera similar al B de arriba) tales que $\mathcal{U} := \{\text{int}(B_i)\}_{i=1}^m$ es una cubierta abierta de M y denotemos por $\{T_i\}_{i=1}^m$ a los espacios transversos asociados a \mathcal{U} .

Por la proposición anterior podemos expresar a C en cada B_i como

$$\int_{T_i} C_y d\mu_i, \tag{1.24}$$

donde C_y es la corriente de integración en $\pi^{-1}(y)$ y μ_i es la única medida que nos permite escribir 1.24.

La teoría básica de foliaciones nos permite suponer que si $\text{int}(B_i) \cap \text{int}(B_j) \neq \emptyset$ existe una carta foliada regular W tal que $B_i \cap B_j \subset W$ (ver [CC, p. 29, Lemma 1.2.17]) entonces, por unicidad de las μ_i 's, éstas coinciden en $\text{int}(B_i) \cap \text{int}(B_j)$ y son invariantes bajo los difeomorfismos locales $\gamma_{ij} : T_i \rightarrow T_j$ que generan al pseudogrupo de holonomía $\Gamma := \Gamma(\mathcal{U})$ (ver definición A.1.3). Por lo tanto, podemos definir una medida de probabilidad μ en $T = \sqcup_{i=1}^m T_i$ de manera natural como

$$\mu = \prod_{i=1}^m \mu_i.$$

Tomando una partición de la unidad $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ subordinada a \mathcal{U} , escribimos, para cada $\omega \in \mathcal{D}_p$,

$$\begin{aligned} \langle C, \omega \rangle &= \sum_{i=1}^m \langle C, \lambda_i \omega \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{T_i} \langle C_y, \lambda_i \omega \rangle d\mu(y) \\ &= \langle C_\mu, \omega \rangle, \end{aligned}$$

donde C_μ (ver ejemplo 1.1.12) es la corriente asociada a μ . □

Ejemplo 1.4.7

Cuando \mathcal{F} es uno dimensional existen muchos ejemplos que relacionan los ciclos foliados con las medidas transversas invariantes. Esto es debido al trabajo de Schwartzmann [Sch], en donde se demuestra que una gran parte de una órbita dividida entre su longitud es esencialmente un ciclo foliado; él les llama *ciclos asintóticos*.

Así mismo, una medida transversa invariante en dimensión uno es lo mismo que una medida invariante por el flujo generado por las hojas de la foliación. Esto nos permite identificar los ciclos foliados con las medidas invariantes por el flujo. En la sección 3 del capítulo 3 estudiaremos con detalle las foliaciones de dimensión uno.

Ejemplo 1.4.8

En dimensión arbitraria, Plante [P] introduce las *secuencias promediantes* (ver Definición 2.2.1). Éstas son sucesiones de subvariedades p -dimensionales cerradas contenidas en las hojas de \mathcal{F} , tales que el límite de la razón del volumen p -dimensional total y del volumen $(p-1)$ -dimensional de la frontera es igual a 0. A cada elemento de la sucesión le podemos asignar una corriente foliada definida por integración y normalizada dividiendo entre su volumen, esta sucesión de corrientes se acumula en un ciclo foliado.

De esta manera Plante generaliza el trabajo de Schwartzmann mencionado arriba mostrando que una hoja que tiene crecimiento subexponencial implica la existencia de un ciclo foliado no trivial. Este resultado, así como una generalización hecha por Sullivan serán expuestos en la sección 2 del siguiente capítulo.

Ejemplo 1.4.9

Sea M una variedad compacta, conexa y de clase C^∞ . Tomemos una representación $\varphi : \pi_1(M) \rightarrow \text{Diff}(F)$ del grupo fundamental de M sobre el grupo

de difeomorfismos de una variedad compacta F .

Una construcción clásica muestra que existe un espacio E_φ , una fibración $p : E_\varphi \rightarrow M$ con fibra F y una foliación en E_φ transversal a las fibras¹⁰ con grupo de estructura discreto $\varphi(\pi_1(M)) \subset \text{Diff}(F)$.

Dicha foliación tiene como espacio transversal una unión disjunta de un número finito de copias de F y su pseudogrupo de holonomía es precisamente la imagen de φ . Luego, si existe una medida μ sobre F , que es preservada por todo difeomorfismo $f \in \varphi(\pi_1(M))$ obtenemos un ciclo foliado determinado por μ de E_φ .

Terminaremos esta sección con algunas reinterpretaciones del teorema 1.3.6 via la identificación dada por el teorema 1.4.1.

Teorema 1.4.10 [Sul] *Bajo las hipótesis del teorema 1.4.1 siempre existen alguna de las siguientes:*

- i) una medida transversal invariante no trivial o*
- ii) una p -forma cerrada transversal a \mathcal{F} .*

Demostración. Por la parte (i) del teorema 1.3.6 siempre existen p -formas transversales cerradas transversales a \mathcal{F} o ciclos foliados no triviales, esto es, por el teorema 1.4.1, una medida transversal invariante no trivial. \square

Teorema 1.4.11 [Sul]

- i) Si no existe una medida invariante no trivial para \mathcal{F} , entonces existe una p -forma exacta positiva en las hojas de \mathcal{F} .*
- ii) Si no existe una p -forma cerrada positiva en las hojas de \mathcal{F} , entonces alguna medida transversal invariante determina un ciclo foliado en la clase de homología trivial.*

Demostración. La parte (i) es consecuencia inmediata de la parte (ii) del teorema 1.3.6 y el teorema 1.4.1. La parte (ii) es la negación de la parte (iii) del teorema 1.3.6 al reinterpretarla con el teorema 1.4.1. \square

¹⁰Sea \tilde{M} es el cubriente universal de M . Entonces, la acción de $\pi_1(M)$ sobre el producto $\tilde{M} \times F$ definida por su acción canónica en el primer factor y por medio de la representación φ en el segundo, es propia y libre, por lo que el cociente de $\tilde{M} \times F$ por esta acción es una variedad diferenciable E_φ y la proyección en el primer factor, compuesta con la aplicación cubriente de \tilde{M} sobre M , define un haz fibrado con fibra F . Por último, es posible verificar que la foliación trivial de $\tilde{M} \times F$, donde las hojas son $\tilde{M} \times \{p\}$ para todo $p \in F$, es invariante bajo la acción de $\pi_1(M)$ y por lo tanto desciende a una foliación en E_φ que es transversal a las fibras (ver [G, p. 14, 2.8]).

Teorema 1.4.12 [Sul] *Si existen medidas transversas invariantes para \mathcal{F} y p -formas cerradas positivas en las hojas de \mathcal{F} , entonces el cono $C_{\mathcal{F}} \subset H_p(M; \mathbb{R})$ es un cono compacto convexo y el interior del cono dual $C_{\mathcal{F}}^* \subset H^p(M; \mathbb{R})$ está compuesto por las p -formas cerradas positivas en las hojas de \mathcal{F} .*

Más aún, la aplicación natural del cono de medidas invariantes transversas a $C_{\mathcal{F}}$ es propio, i.e. el convexo de medidas que determinan una clase de homología es un compacto.

Demostración. Es una consecuencia inmediata del enunciado y la demostración de la parte (iv) del teorema 1.3.6 y el teorema 1.4.1. \square

Observación 1.4.13 Los resultados de las secciones 2, 3 y 4 son también válidos en cualquier subconjunto compacto K de M o en una vecindad de él. Sin embargo, en general $(K, \mathcal{F}|_K)$ no es una variedad foliada, sino un *espacio foliado*¹¹. (ver Apéndice B, Definición B.1.1), por esta razón hay que ser cuidadosos en los siguientes puntos:

- ✗ Necesitamos definir cuidadosamente una medida transversa en un espacio foliado, ya que el espacio transverso es un espacio topológico que en general no tiene estructura de variedad diferenciable.
- ✗ También es necesario considerar ciclos foliados con soporte contenido en K y formas cerradas positivas en las direcciones tangentes a \mathcal{F} a lo largo de K .
- ✗ Con las consideraciones anteriores la teoría y las demostraciones son prácticamente las mismas, sin embargo, una forma con soporte compacto en K no necesariamente es una forma con soporte compacto en M . Por lo tanto, la teoría de DeRham de la sección 1 tiene que ser reemplazada por una teoría más general.

La teoría de espacios foliados y su “teoría de DeRham” quedan fuera del espíritu de la tesis, por lo cual simplemente se explicará lo necesario en el Apéndice B, así mismo se darán las referencias suficientes para el lector interesado en verificar los detalles.

Para ilustrar lo anterior mencionamos a continuación un ejemplo que aparece en [Gh1]: sea M una superficie de Riemann de género 2 y consideremos la foliación del ejemplo 1.4.9, para alguna representación $\varphi : \pi_1(M) \rightarrow \mathrm{PSL}(2; \mathbb{C})$.

¹¹Una variedad foliada es, en particular, un espacio foliado.

La variedad E_φ es una variedad compleja que fibra sobre M , con fibras homeomorfas a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ y tiene una foliación \mathcal{F} que es transversa a esta fibración. Supongamos que $\Gamma := \text{Im}(\varphi) \subset \text{PSL}(2; \mathbb{C})$ es un grupo Kleiniano cuyo conjunto límite $\Lambda \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es un conjunto de Cantor. Entonces, aplicando el teorema de encaje de Kodaira podemos encajar a E_φ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$, y entonces Λ corresponde a un subconjunto compacto $K \subset E_\varphi$ saturado por \mathcal{F} . La pareja $(K, \mathcal{F}|_K)$ es un ejemplo típico de un espacio foliado, más específicamente es una *laminación minimal por superficies de Riemann*.

❶ **NOTA 1.4.14** *En el resto de este trabajo, cuando los resultados de las secciones 2, 3 y 4 sean utilizados en subconjuntos compactos de la variedad diremos que utilizamos su **forma relativa**.*

☆ ☆ ☆

Lo desarrollado en este primer capítulo nos ha permitido asociar a una medida transversa invariante una clase en la homología de la variedad como sigue: la aplicación

$$\mu \mapsto C_\mu$$

definido en 1.1.12 nos da la identificación

$$\begin{array}{ccc} \text{Medidas acotadas no-negativas} & \leftrightarrow & \text{Corrientes Foliadas} \\ \cup & & \cup \\ \text{Medidas Transversas Invariantes} & \leftrightarrow & \text{Ciclos Foliados} \end{array}$$

y cada ciclo foliado determina una clase en la p -homología de la variedad (p es la dimensión de la foliación) según el teorema de DeRham 1.1.18.

Esto es precisamente la generalización del trabajo que Schwartzmann realizó para foliaciones de dimensión uno y que estudiaremos en la sección 3 del capítulo 3.

Este capítulo ha sido entonces un compendio de definiciones y resultados que forman la parte principal de [Sul], el resto del trabajo son aplicaciones a diversas áreas de la geometría y los sistemas dinámicos.

甲

CAPÍTULO 2

Geometría de las Hojas

Una de las primeras aplicaciones de los ciclos foliados fue la generalización de ciertos resultados de Plante [P] que relacionan las medidas transversas con el crecimiento riemanniano de las hojas de la foliación. En su importante artículo en donde define los ciclos foliados Sullivan enuncia ésta y varias aplicaciones tanto al crecimiento de hojas como a la recurrencia. En este capítulo expondremos con detalle las aplicaciones que aparecen en [Sul] a la geometría de las hojas.

En la primera sección daremos una breve introducción a la noción de crecimiento en variedades riemannianas y en órbitas de pseudogrupos; las demostraciones serán simplemente referidas. En la segunda sección definiremos una *secuencia promediante* y demostraremos que su presencia implica la existencia de ciclos foliados no triviales. Así mismo, introduciremos el concepto de *hoja cerrada en el ∞* y generalizaremos el resultado de Plante.

Continuaremos en la tercera sección con la demostración de ciertos resultados que generalizan la noción de recurrencia de Poincaré. En la cuarta sección con una generalización de los ciclos evanescentes de dimensión uno y cómo la existencia de un tal ciclo evanescente de dimensión uno menor que la hoja implica la existencia de un ciclo foliado no trivial.

2.1. Crecimiento

La noción de crecimiento fue introducida por Milnor [Mi] para relacionar cierto comportamiento de una variedad riemanniana con propiedades de su grupo fundamental. Esta noción toma verdadera importancia con los trabajos de Plante ([P], [P1] y [P2]), gracias a los cuales podemos definir el crecimiento de hojas en una foliación de una variedad compacta de dos maneras distintas, que coinciden en el caso diferenciable:

- ◇ De manera geométrica: crecimiento del volumen de las bolas de radio entero.
- ◇ De manera combinatoria: crecimiento de las órbitas del pseudogrupo de holonomía.

Comenzaremos definiendo ciertos conceptos básicos acerca del crecimiento, primero de manera geométrica y luego de manera combinatoria. Primero definiremos las nociones básicas para el crecimiento de funciones no decrecientes que están definidas en los enteros positivos.

Definición 2.1.1

Sean $G, H : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dos funciones no decrecientes.

- a) Decimos que G **domina** a H (se denota $G \succeq H$) si existen enteros positivos α, β y γ tales que

$$\alpha G(\beta r) \geq H(r), \quad \forall r \geq \gamma.$$

- b) Si $G \succeq H$ y $H \succeq G$, decimos que G y H **tienen el mismo tipo de crecimiento**.

- c) Si $G \succeq H$ pero $H \not\succeq G$, decimos que G **domina estrictamente** a H y escribimos $G \succ H$.

La relación “ G tiene el mismo tipo de crecimiento que H ” es una relación de equivalencia, por lo que podemos definir lo siguiente.

Definición 2.1.2

Dada una función no decreciente $G : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definimos su **tipo de crecimiento** como la clase de equivalencia de G bajo la relación G tiene el mismo tipo de crecimiento que H . Denotamos por $\text{gr}(G)$ al tipo de crecimiento de G .

Ejemplo 2.1.3

El crecimiento de los polinomios está caracterizado por su grado, esto es, dados dos polinomios $p(t)$ y $q(t)$, se tiene

$$\text{gr}(p(t)) = \text{gr}(q(t)) \quad \text{si y sólo si} \quad \text{grado}(p) = \text{grado}(q). \quad (2.1)$$

Si $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función tal que $\text{gr}(f) = \text{gr}(r^s)$ para algún $s \geq 0$, decimos que f tiene **crecimiento polinomial** de grado exactamente s .

Ejemplo 2.1.4

Las funciones exponenciales a^r con $a > 1$ tienen todas el mismo tipo de crecimiento, ya que si $a, b > 1$ podemos tomar una constante $\beta > \log_a b$ y se cumple

$$a^{\beta r} > b^r, \quad \forall r \geq 1.$$

Esto es, a^r domina a b^r , la relación inversa es análoga.

Definimos entonces el crecimiento subexponencial y exponencial.

Si $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función tal que $\text{gr}(f) < \text{gr}(e^r)$ decimos que f tiene **crecimiento subexponencial**. Si $\text{gr}(f) = \text{gr}(e^r)$ decimos que f tiene **crecimiento exponencial**.

Ejemplo 2.1.5

La función r^{r^s} no tiene crecimiento polinomial ni exponencial y, más aún, si $s \neq s'$, las funciones r^{r^s} y $r^{r^{s'}}$ tienen distinto tipo de crecimiento.

Observemos ahora que para que una función $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tenga crecimiento exponencial es necesario y suficiente que

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log f(r)}{r} > 0. \quad (2.2)$$

La demostración puede consultarse en [CC, p. 314, Proposition 12.2.13].

Desde este punto de vista decimos que $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tiene crecimiento **casi polinomial** si no tiene crecimiento polinomial y verifica

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log f(r)}{r} = 0. \quad (2.3)$$

Las definiciones anteriores son de crucial importancia para definir el tipo de crecimiento de una variedad riemanniana, el cual es nuestro siguiente objetivo.

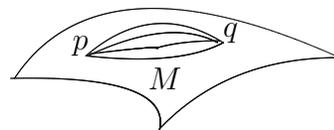
Recordaremos primero algunos conceptos clásicos de la geometría riemanniana. Una exposición clara y completa de esta teoría se encuentra en [Do].

Sea (M, g) una variedad riemanniana completa y conexa. Recordemos que la métrica g induce una distancia en M como el ínfimo de la longitud de las curvas diferenciables por pedazos que unen dos puntos. Formalmente, dados $p, q \in M$ definimos a Ω_{pq} como el conjunto de todas las curvas C^1 por pedazos que unen p con q , parametrizadas en el intervalo $[0, 1]$ (ver figura 2.1), i.e. si denotamos por $C_{pp}^1([0, 1], M)$ al conjunto de funciones C^1 por pedazos del intervalo $[0, 1]$ a M , entonces definimos

$$\Omega_{pq} := \{\gamma \in C_{pp}^1([0, 1], M) \mid \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}. \quad (2.4)$$

Definimos la distancia entre p y q como

$$d(p, q) = \inf_{\Omega_{pq}} \int_0^1 g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})^{1/2} dt. \quad (2.5)$$



Es conocido que esta la topología inducida por d coincide con la topología de M (ver [Do, p. 146]). Podemos entonces definir una *bola* en M de la siguiente manera (ver figura 2.2).

Figura 2.1: Elementos de $\Omega_{p,q}$.

Definición 2.1.6

Si $x \in M$ y $r > 0$, definimos la **r-bola métrica** como el conjunto

$$D_x(r) := \{w \in M \mid d(x, w) \leq r\}.$$

Definimos también la frontera de $D_x(r)$ como el conjunto

$$\partial D_x(r) := \{x \in \text{bd}(D_x(r)) \mid x \text{ es regular}\},$$

donde $\text{bd}(D_x(r))$ es la frontera topológica de $D_x(r)$.

Recordemos que un punto x en la frontera topológica de $D_x(r)$ es *regular* si existe un abierto coordenado U tal que $U \cap D_x(r)$ es modelado en el semiespacio superior $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$.

La métrica g induce también una forma de volumen en M , por lo que podemos también considerar el volumen de las bolas $D_x(r)$, que denotaremos por $\text{vol}(D_x(r))$. Si dejamos a r variar en los enteros, podemos definir una función no decreciente, con dominio en los enteros positivos por $r \mapsto \text{vol}(D_x(r))$. Formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.7

Definimos la **función de crecimiento** de una variedad riemanniana (M, g) en x como la función $G_x : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$G_x(r) := \text{vol}(D_x(r)). \quad (2.6)$$

Esta definición nos permitirá, en particular, utilizar el tipo de crecimiento de la función G_x para asociar un tipo de crecimiento a una variedad riemanniana. Con este objetivo debemos demostrar, en primer lugar, que $\text{gr}(G_x)$ es independiente del punto x ; esto es, que el tipo de crecimiento de la función G_x depende únicamente de la métrica g y no del punto x . Tenemos pues la siguiente proposición.

Proposición 2.1.8 Si $x, y \in M$, entonces $\text{gr}(G_x) = \text{gr}(G_y)$.

Demostración. Sean $x, y \in M$ dos puntos distintos. La desigualdad

$$2G_x(3r) \geq G_y(r), \quad \forall r > d(x, y),$$

es inmediata y nos dice que G_x domina a G_y . Intercambiando los papeles de x y de y obtenemos que G_y domina a G_x . Luego, G_x y G_y tienen el mismo tipo de crecimiento, i.e. $\text{gr}(G_x) = \text{gr}(G_y)$. \square

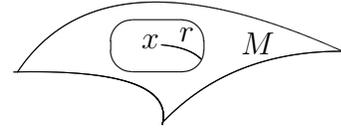


Figura 2.2: La r -bola métrica $D_x(r)$.

Como observamos arriba, el tipo de crecimiento de la función G_x depende de la métrica. Sin embargo, podemos definir una relación de equivalencia en el espacio de métricas de tal suerte que si dos métricas en la misma clase de equivalencia entonces, el tipo de crecimiento de sus respectivas funciones de crecimiento sea el mismo. A continuación definimos esta relación.

Definición 2.1.9

a) Dos métricas g y g' en una variedad riemanniana M son **casi isométricas** si existen constantes positivas α y β tales que

$$\alpha \|v\| \leq \|v\|' \leq \beta \|v\|, \quad \forall v \in T_x M, x \in M, \quad (2.7)$$

donde $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son las normas determinadas por g y g' , respectivamente.

b) Un difeomorfismo $f : M \rightarrow M'$ entre variedades riemannianas completas (M, g) y (M', g') se llama una **casi isometría** si g y $f^*(g')$ son casi isométricas, donde $f^*(g')$ es la métrica en M inducida por f y g' , definida por $f^*(g')_p(u, v) = g'(df_p(u), df_p(v))$.



Figura 2.3: En una variedad riemanniana compacta dos métricas son siempre casi isométricas.

Ejemplo 2.1.10

El ejemplo más sencillo (Figura 2.3) es el de una variedad riemanniana compacta con dos métricas distintas, éstas por supuesto, son no isométricas pero debido a que la variedad es compacta sí existen constantes α y β que cumplen con la definición anterior, i.e. dos métricas distintas en la misma variedad riemanniana compacta son siempre casi isométricas.

Más adelante veremos que dos métricas riemannianas en una variedad foliada compacta se restringen a métricas completas en cada hoja de la foliación que además son casi isométricas.

La relación “ g es casi isométrica a g' ” es una relación de equivalencia en el conjunto de métricas riemannianas completas de una variedad. La siguiente proposición es, pues, el resultado buscado.

Proposición 2.1.11 Sean (M, g) y (M, g') dos variedades riemannianas completas y conexas. Sean $x \in M$, $x' \in M'$ y $G_x, G_{x'}$ las funciones de crecimiento respectivas. Si existe una casi isometría entre (M, g) y (M, g') , entonces $\text{gr}(G_x) = \text{gr}(G_{x'})$.

Demostración. Ver [G, p. 330, 1.28. Exemple vi]. □

Lo anterior nos permite definir el tipo de crecimiento de una variedad riemanniana (M, g) en una clase de casi isometría de la métrica como sigue.

Definición 2.1.12

Definimos el **tipo de crecimiento de una variedad riemanniana** conexa (M, g) , relativo a una clase de casi isometría de métricas completas, como

$$\text{gr}(M) = \text{gr}(G_x),$$

donde G_x es la función de crecimiento en cualquier métrica en la clase de casi isometría dada.

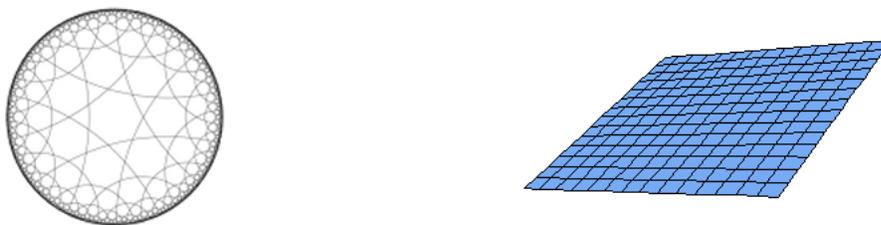


Figura 2.4: El disco de Poincaré tiene crecimiento exponencial, mientras que el plano con la métrica euclidiana tiene crecimiento cuadrático.

Ejemplo 2.1.13

Una variedad compacta tiene crecimiento polinomial exacto de grado 0 para cualquier clase de casi isometría de la métrica riemanniana. Esto es inmediato de que el volumen de la variedad sea acotado.

Ejemplo 2.1.14

La recta real \mathbb{R} tiene crecimiento lineal (polinomial de grado exactamente 1) para cualquier métrica riemanniana (completa).

Ejemplo 2.1.15

El espacio euclidiano de dimensión m , \mathbb{R}^m con la métrica estándar tiene crecimiento polinomial de grado exactamente m (ver figura 2.4). En efecto, si $x \in \mathbb{R}^m$ se sigue que

$$\left(\frac{2r}{\sqrt{m}}\right)^m \leq \text{vol}(D_x(r)) \leq (2r)^m.$$

Ejemplo 2.1.16

El plano hiperbólico tiene crecimiento exponencial (ver figura 2.4). En efecto, en el modelo del disco de Poincaré, la métrica está dada por

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2},$$

y el elemento de área es

$$\sigma = \frac{dx \wedge dy}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

La bola $D_0(r)$ es en este caso el disco euclidiano de centro 0 y radio $\tanh(r)$ y su volumen es $\pi \sinh(r)^2 = \pi((\exp(-x) - \exp(x))/2)^2$, que es del mismo tipo de crecimiento que $\exp(x)$.

Ejemplo 2.1.17

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función suave que depende únicamente de la segunda coordenada, i.e. $f(x, y) = f(x', y)$ para todos $(x, y), (x', y) \in \mathbb{R}^2$. Supongamos

además que $f(x, y) = |y|^{-2}$ para $|y| \geq 1$. Notemos que, para $|y| \geq 1$ la métrica fg , donde g es la métrica euclidiana estandar, coincide con la métrica del plano hiperbólico: $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$. Luego, para radios muy grandes, el volumen de las bolas de la variedad riemanniana (\mathbb{R}^2, fg) , es practicamente el mismo que el volumen en el plano hiperbólico, y como el disco y el plano hiperbólicos son isométricos, usando el ejemplo anterior, se sigue que la variedad riemanniana (\mathbb{R}^2, fg) tiene crecimiento exponencial. Este ejemplo será de gran utilidad en la siguiente sección.

Consideremos ahora una variedad foliada (M, \mathcal{F}) de clase C^r , donde M es una variedad compacta y \mathcal{F} es de dimensión p . Si $\partial M \neq \emptyset$ (donde ∂M denota a la frontera topológica¹ de M .) supondremos, además, que \mathcal{F} es tangente a ∂M .

Una **métrica riemanniana a lo largo de las hojas** g sobre M es un tensor, positivo definido sobre TM , tal que $g(X, Y)$ es de clase C^{r-1} para todos X y Y campos vectoriales sobre la foliación. De esta definición se sigue, dado que M es compacta, que dos métricas riemannianas a lo largo de las hojas en M inducen métricas casi isométricas sobre las hojas de \mathcal{F} . Más aún, por el teorema de Hopf-Rinow ([Do, p. 120]) estas métricas son completas en cada hoja.

Lo anterior nos permite hablar del crecimiento de las hojas de \mathcal{F} independientemente de la elección de una métrica riemanniana sobre M . Podemos hacer entonces la siguiente definición.

Definición 2.1.18

La foliación \mathcal{F} tiene **crecimiento polinomial de grado menor que** $s \geq 0$ ó **crecimiento subexponencial** si cada una de sus hojas tiene este tipo de crecimiento. Así mismo decimos que tiene **crecimiento exponencial** si posee al menos una hoja con crecimiento exponencial.

Lo que haremos a continuación será definir el crecimiento de las órbitas de un pseudogrupo: crecimiento de manera combinatoria.

Sea Γ un pseudogrupo finitamente generado. Tomemos un sistema finito y simétrico de generadores de Γ , que denotaremos por S ; i.e., los elementos de S generan a Γ y S es cerrado al tomar inversos. Supondremos además que $e \in S$, donde e es la identidad de Γ .

Dada $x \in \Gamma$ definimos su órbita por $\Gamma(x) := \{y \circ x | y \in \Gamma\}$, y dada $r \in \mathbb{N}$ denotamos por $S_r(x)$ al conjunto que contiene a los elementos de $\Gamma(x)$ que

¹En general, a lo largo de este trabajo, si X es una variedad, ∂X denotará a la frontera de X .

pueden ser escritos como una palabra de longitud inferior o igual a r en el conjunto S . Podemos entonces definir la función de crecimiento de la órbita $\Gamma(x)$.

Definición 2.1.19

Dado $x \in \Gamma$, la **función de crecimiento** de la órbita de x , $\Gamma(x)$, denotada por $G_x : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define como

$$G_x(r) := \text{card}(S_r(x)), \quad r \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

De la misma manera que en variedades riemannianas, para poder hablar del crecimiento de las órbitas de Γ necesitamos cierta independencia del punto x con respecto a la función G_x , para eso tenemos el siguiente lema.

Lema 2.1.20 Sean Γ_1 y Γ_2 dos conjuntos simétricos y finitamente generados de un pseudogrupo Γ . Si $x, y \in \Gamma$ pertenecen a la misma órbita, entonces las funciones de crecimiento respectivas G_x y G'_y tienen el mismo tipo de crecimiento.

Demostración. Idéntica al Lema 12.2.17 de [CC, p. 317], de independencia del tipo de crecimiento en la función de crecimiento de un grupo. \square

Definición 2.1.21

Definimos el **tipo de crecimiento** de una órbita $\Gamma(x)$ del pseudogrupo Γ como el tipo de crecimiento de la función G_x .

Finalizaremos esta sección con un resultado muy útil que relaciona los tipos de crecimiento del pseudogrupo de holonomía de una foliación y el crecimiento de las hojas de ésta.

Sea (M, \mathcal{F}) una variedad foliada compacta de clase C^1 . Denotemos por $\Gamma_{\mathcal{U}} = \Gamma$ al pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} asociado a \mathcal{U} y por T al espacio transversal a \mathcal{F} . Observemos lo siguiente.

Observación 2.1.22 Las hojas de la foliación están en correspondencia bi-unívoca con las órbitas de Γ . En efecto, dada una hoja L sea² $P \in T$ cualquier placa contenida en L , entonces asociamos la órbita $\Gamma(P)$ a L . De manera similar, dada una órbita $\Gamma(P)$ le asociamos la hoja L que contiene a P . Es fácil verificar que estas asociaciones están bien definidas y son inversas una a la otra.

Tenemos entonces la siguiente proposición.

Proposición 2.1.23 Si L es la hoja de \mathcal{F} que contiene a $P_0 \in T$, entonces

$$\text{gr}(L) = \text{gr}(\Gamma(P_0)).$$

²Recordemos que los puntos de T son placas de \mathcal{F} .

Demostración. Ver [CC, p. 321, Proposition 12.2.35]. □

Este resultado es muy poderoso debido a que relaciona información geométrica con información algebraica de la foliación. De hecho, un corolario inmediato es la independencia que existe entre las funciones de crecimiento y el atlas elegido así como de la métrica riemanniana. Enunciamos dicho resultado a continuación. La demostración es inmediata.

Corolario 2.1.24 *El tipo de crecimiento de una Γ_U -órbita correspondiente a una hoja L , depende únicamente de L y no del atlas \mathcal{U} elegido. De manera similar, $\text{gr}(L)$ no depende de la elección de la métrica riemanniana en M .*

2.2. Crecimiento de las Hojas

En el trabajo de Plante [P] se demuestra que una hoja de crecimiento subexponencial implica la existencia de una medida transversa invariante no trivial. La idea es utilizar *secuencias promediantes*, que es una generalización de la manera en que Schwartzmann construyó los ciclos asintóticos.

Sullivan hace aún más, introduce un invariante casi isométrico en variedades riemannianas que está relacionado con el crecimiento: la idea es identificar si la forma de volumen riemanniana es el coborde de una forma acotada, en este caso la variedad se llama *no cerrada en el ∞* . Es posible demostrar que una hoja de una foliación que es cerrada en el ∞ implica la existencia de una medida transversa invariante no trivial, y que una variedad no cerrada en el ∞ tiene crecimiento exponencial, mientras que el recíproco no es cierto; esto generaliza el resultado de Plante. En esta sección estudiaremos precisamente estos resultados.

Para comenzar con el estudio del crecimiento a partir de ciclos foliados consideremos una variedad riemanniana M . Fijada una métrica riemanniana en M denotemos por vol_m al volumen de las subvariedades m -dimensionales de M . Podemos entonces definir las secuencias promediantes como sigue.

Definición 2.2.1

Sea \mathcal{F} una foliación p -dimensional de M . Definimos una **secuencia promediante** de \mathcal{F} como una sucesión $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ de subvariedades p -dimensionales de las hojas de \mathcal{F} , compactas y con frontera C^1 por pedazos tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}_{p-1}(\partial A_k)}{\text{vol}_p(A_k)} = 0. \quad (2.8)$$

Observación 2.2.2 La condición de que la frontera de cada A_k sea C^1 por pedazos en realidad se puede relajar pidiendo que ésta sea lo suficientemente adecuada como para poder aplicar el teorema de Stokes.

A continuación utilizaremos la corriente foliada del ejemplo 1.1.9 definida por integración en subvariedades cerradas p -dimensionales contenidas en hojas para demostrar lo siguiente.

Teorema 2.2.3 [GP] *Sea $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ una secuencia promediante de \mathcal{F} . Entonces existe una subsucesión $\{A_{k_r}\}_{r=1}^\infty$ tal que el límite*

$$\lim_{k_r \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}_p(A_{k_r})} \int_{A_{k_r}} = C \quad (2.9)$$

existe en $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ y es un ciclo foliado.

Demostración. Si identificamos cada A_k con su corriente foliada asociada C_{A_k} (§1 ejemplo 1.1.9), tenemos que la sucesión $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ está contenida en $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ y es claramente acotada por el factor de normalización $1/\text{vol}_p(A_k)$. Luego, por la proposición 1.1.15, el espacio \mathcal{D}'_p es Montel (i.e. un conjunto es acotado si y sólo si es precompacto) y por lo tanto existe una subsucesión convergente $\{A_{k_r}\}_{r=1}^\infty$, para la cual escribimos

$$\lim_{k_r \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}_p(A_{k_r})} \int_{A_{k_r}} = C \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}}.$$

Aplicando el teorema de Stokes a la expresión anterior y utilizando la compacidad de M tenemos que existe una constante $\beta \geq 0$, que depende sólo de $\eta \in \mathcal{D}_{p-1}$, que cumple

$$| \langle C, d\eta \rangle | = \left| \lim_{k_r \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}_p(A_{k_r})} \int_{A_{k_r}} d\eta \right| \leq \lim_{k_r \rightarrow \infty} \frac{\beta \text{vol}_{p-1}(\partial A_{k_r})}{\text{vol}_p(A_{k_r})} = 0.$$

Dado que η es arbitrario se sigue que $\partial C = 0$, por lo tanto $C \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$. \square

La idea de generar ciclos foliados por medio de secuencias promediantes fue utilizada por Plante para demostrar el siguiente teorema (ver [P, p. 339, Theorem 4.1]).

Teorema 2.2.4 [P] *Sea (M, \mathcal{F}) una variedad foliada compacta. Si L es una hoja de \mathcal{F} que tiene crecimiento subexponencial, entonces existe una medida transversa invariante no trivial μ , tal que $\text{supp}(\mu) \subseteq \bar{L}$.*

Ejemplo 2.2.5

Si \mathcal{F} tiene una hoja compacta L , tenemos entonces que L tiene crecimiento subexponencial y entonces soporta una medida transversa invariante.

Ejemplo 2.2.6

Supongamos que \mathcal{F} está dada por una acción localmente libre³ de $\text{Aff}^+(\mathbb{R})$ en dimensión tres, tenemos que las hojas son cilindros o planos (ver [G, p. 23, 2.23 Exercise]), las cuales son variedades con crecimiento subexponencial y por lo tanto soportan medidas transversas invariantes.

Sullivan [Sul] introduce un invariante casi isométrico en variedades riemannianas que está relacionado con el crecimiento. Por medio de este invariante es posible generalizar el teorema de Plante arriba enunciado. La idea reside en verificar si la forma de volumen riemanniana es el coborde de una forma acotada.

Definición 2.2.7

Una p -variedad riemanniana completa y conexa L se dice **no cerrada en el ∞** si existe una $(p-1)$ -forma acotada η en L y una función suave $f : L \rightarrow \mathbb{R}_+$, acotada uniformemente lejos del 0 (i.e. existen constantes c_1 y c_2 tales que $0 < c_1 \leq f(x) \leq c_2 < \infty$, para todo $x \in L$) tales que

$$d\eta = f\Omega, \quad (2.10)$$

donde Ω es la forma de volumen riemanniana. Si L no es no cerrada en el ∞ decimos que es **cerrada en el ∞** .

Ejemplo 2.2.8

El plano hiperbólico es no cerrado en el infinito (ver figura 2.5). En efecto, en el modelo del semiplano de Poincaré la métrica riemanniana es

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

y la forma de volumen riemanniana

$$\Omega = \frac{dx \wedge dy}{y^2}.$$

Sea η la 1-forma dada por $\eta = dx/y$. Tenemos que

$$|\eta(v)| = \left| \frac{v_1}{y} \right| \leq \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{y^2}} = \|v\|, \quad v = (v_1, v_2) \in T_{(x,y)}L,$$

por lo que η es acotada. Entonces, Tomando $f \equiv 1$ se sigue $d\eta = f\Omega$, que es la definición de no cerrada en el ∞ .

³Una acción de un grupo G en una variedad M se llama *localmente libre* si cada punto de M tiene subgrupo de isotropía discreto en G .

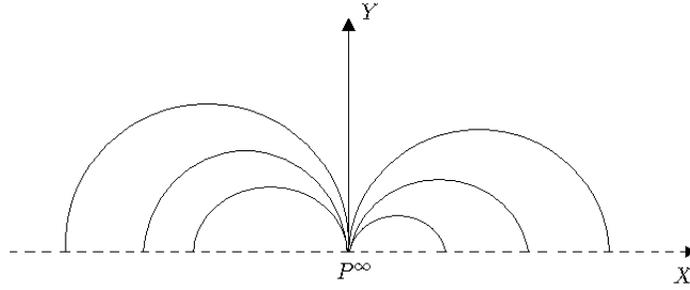


Figura 2.5: El plano hiperbólico es no cerrado en el infinito, mientras que el plano euclidiano sí lo es.

Las variedades riemannianas no cerradas en el infinito cumplen una desigualdad isoperimétrica que nos permite generalizar el teorema de Plante citado arriba. Demostraremos esto en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.9 *Si L es no cerrada en el ∞ , entonces existe una constante positiva γ tal que, para toda subvariedad compacta y p -dimensional R de L se cumple:*

$$\text{vol}_p(R) \leq \gamma \text{vol}_{p-1}(\partial R). \quad (2.11)$$

Demostración. Sean f y η como en la definición 2.2.7, con $f \geq c > 0$ y $\|\eta\| \leq b$. Entonces tenemos

$$c \text{vol}_p(R) \leq \left| \int_R f \Omega \right| = \left| \int_{\partial R} \eta \right| \leq b \text{vol}_{p-1}(\partial R).$$

Haciendo $\gamma = b/c$ obtenemos el resultado. □

El corolario siguiente es precisamente el hecho que nos permite hablar de hojas no cerradas en el infinito como una generalización de hojas con crecimiento exponencial.

Corolario 2.2.10 *Si L es no cerrada en el ∞ , entonces L tiene crecimiento exponencial.*

Pospondremos la demostración ya que necesitamos un lema que aparece en [P2, p. 182]; éste demuestra dos cosas importantes. La primera es que la bola métrica $D_x(r)$ (definición 2.1.6) no es demasiado patológica y permite la aplicación del teorema de Stokes. La segunda es que la derivada de la función de crecimiento $\text{vol}(D_x(r))$ está dada por la función $\text{vol}(\partial D_x(r))$. La demostración de este lema se incluye únicamente por completez; sin embargo, puede ser omitida sin riesgo alguno.

Lema 2.2.11 *Sea L una variedad riemanniana, $x \in L$ y asumamos que la aplicación exponencial $\exp_x : T_x \rightarrow L$ es de clase C^1 , entonces se tiene:*

- i) para casi todo $r \in \mathbb{R}$, la pareja $D_x(r)$ y $\partial D_x(r)$ cumple el teorema de Stokes, y*
- ii) la derivada de la función de crecimiento $G_x(r)$ está dada por $\text{vol}_{p-1}(\partial D_x(r))$, para casi toda $r \in \mathbb{R}$; i.e., $G'_x(r) = \text{vol}_{p-1}(\partial R)$, p.c.t. $r \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Definamos a \mathcal{L} como el conjunto de vectores $v \in T_x L$ tales que $\exp_x(tv)$ es una geodésica minimal de x a $\exp_x(tv)$ para $t < 1$ pero no para $t > 1$. Es fácil verificar que, así definido, \mathcal{L} es la imagen de una aplicación continua de un abierto de la esfera unitaria en $T_x L$ a $T_x L$ mismo, definido por $x/\|x\| \mapsto x$ y por lo tanto es un conjunto de medida cero en $T_x L$.

Definamos ahora, para $r \in \mathbb{N}$ a la esfera de radio r ,

$$S_r := \{v \in T_x L : \|v\| = r\}$$

y sea Δ_r el conjunto de puntos tv con $t \in [0, 1]$ y $v \in S_r \cap \mathcal{L}$. Notemos que $\exp_x(\Delta_r) = D_x(r)$ y como \exp_x es suave y la frontera topológica de Δ_r tiene medida cero se sigue que la integral de cualquier forma sobre $D_x(r)$ es la misma que la integral sobre Δ_r del pullback de dicha forma via \exp_x . Entonces, por el teorema de Fubini, $\mathcal{L} \cap S_r$ tiene medida cero para casi toda r y entonces podemos aplicar el teorema de Stokes (ver [W, p. 100, 14.A y p. 98, 13.b]). Esto demuestra la parte (i). La parte (ii) se sigue fácilmente ya que la integral de una forma sobre $\partial D_r(x)$ es entonces la integral de su pullback sobre $\Delta_r \cap S_r$ si $\mathcal{L} \cap S_r$ tiene medida cero en S_r . \square

Demostración del Corolario 2.2.10. Por la proposición 2.2.9 se tiene

$$\text{vol}_p(R) \leq \gamma \text{vol}_{p-1}(\partial R), \quad \gamma > 0$$

y, por el lema anterior, tenemos que $G'_x(r) = \text{vol}_{p-1}(\partial R)$. Luego,

$$\frac{G'_x(r)}{G_x(r)} \geq \gamma > 0.$$

Usando esta desigualdad y el hecho de que G_x es una función creciente se sigue que

$$\begin{aligned} G_x(r+1) - G_x(r) &\geq \int_r^{r+1} G'_x(t) dt \\ &\geq \gamma \int_r^{r+1} G_x(t) dt \\ &\geq \gamma G_x(r), \end{aligned}$$

por lo tanto $G_x(r+1) \geq (1+\gamma)G_x(r)$.

Iterando la expresión anterior se demuestra que

$$G_x(r+N) \geq (1+\gamma)^N G_x(r) \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

y esta última condición implica que G_x tiene crecimiento exponencial. \square

Observación 2.2.12 Para que la definición de no cerrado en el ∞ sea en efecto una generalización del teorema de Plante es necesario que el recíproco de este corolario no sea cierto. En efecto, en el ejemplo 2.1.17 anterior, tenemos que la variedad (\mathbb{R}^2, fg) tiene crecimiento exponencial, sin embargo, también tiene una secuencia promediante contenida en la franja $|y| < 1$, por lo que no cumple la desigualdad isoperimétrica 2.11 y por lo tanto no puede ser no cerrada en el ∞ .

Consideraremos ahora una variedad foliada (M, \mathcal{F}) , donde M es de clase C^∞ y \mathcal{F} de clase C^1 . El siguiente teorema es la generalización del teorema de Plante.

Teorema 2.2.13 [Sul] *Si M es compacta y \mathcal{F} no tiene una medida transversal invariante, entonces cada hoja es no cerrada en el ∞ (y satisface la desigualdad 2.11). Más aún, si alguna hoja L es cerrada en el ∞ , entonces existe una medida transversal invariante cuyo soporte está contenido en \bar{L} .*

Demostración. Claramente la segunda parte implica la primera, ya que si existiese una hoja cerrada en el ∞ entonces existe una medida invariante según la segunda parte.

Ahora, utilizando la observación 1.4.13 y el teorema 1.4.11 parte (i) tenemos que existe una medida transversal con soporte en \bar{L} si y sólo si no existe una p -forma exacta transversal a $\mathcal{F}|_{\bar{L}}$, lo⁴ cual es garantizado por el hecho que L es cerrada en el ∞ . En efecto, si $\omega = d\eta$ es una p -forma exacta transversal a \mathcal{F} , como \bar{L} es compacto en M y ω es positiva en los p -vectores tangentes a L podemos definir una función $f : \bar{L} \rightarrow \mathbb{R}$, acotada lejos del cero tal que $d\eta_0 = f\Omega$, donde η_0 es una p -forma acotada definida en la dirección de las hojas de $\mathcal{F}|_{\bar{L}}$ (ver apéndice B). \square

Observación 2.2.14 El recíproco de este teorema no es cierto en general como se muestra en [P, p. 349].

⁴En este caso $\mathcal{F}|_{\bar{L}}$ no es, en general, una variedad foliada, sino un espacio foliado (véase la Nota 1.4.14).

2.3. Recurrencia

El teorema de Recurrencia de Poincaré [Po] nos dice que dada una medida invariante por un flujo, casi todo punto en el soporte de dicha medida es *recurrente*. El soporte de la medida es llamado el *conjunto de recurrencia de Poincaré*; como veremos en el siguiente capítulo, éste coincide con el soporte de una medida transversa invariante por la holonomía de la foliación generada por el flujo. Utilizando esta equivalencia, es posible generalizar a foliaciones la noción del conjunto de recurrencia de Poincaré como la unión de los soportes de los ciclos foliados; este conjunto es denotado por $P(\mathcal{F})$. Sullivan demuestra algunas propiedades topológicas y de estabilidad de este conjunto que expon-dremos en esta sección.

En adelante (M, \mathcal{F}) será una variedad foliada donde M es de clase C^∞ y \mathcal{F} de clase C^1 .

En foliaciones de dimensión uno las medidas transversas invariantes están en correspondencia 1 – 1 con las medidas invariantes por el flujo (ver §3, sección 3). Luego, gracias al teorema 1.4.1, el soporte de un ciclo foliado es lo mismo que el soporte de una medida invariante, que es lo mismo que el soporte de una medida invariante por el flujo. Recordemos el teorema de recurrencia de Poincaré⁵ (en la figura 2.3 se ilustra la aplicación de recurrencia de Poincaré, definido en una sección transversal al flujo).

Teorema 2.3.1 (Recurrencia de Poincaré) *Sea φ una transformación que preserva la medida de un espacio de probabilidad (T, μ) y sea $A \subset T$ un conjunto medible. Entonces, para cualquier $N \in \mathbb{N}$,*

$$\mu(\{x \in A | \{\varphi^n(x)\}_{n \geq N} \subset T \setminus A\}) = 0.$$

Notemos ahora que hay una correspondencia entre los objetos en el enunciado del teorema, y los objetos que hemos utilizado hasta ahora en nuestro estudio de los ciclos foliados de la siguiente manera: φ es la holonomía de la foliación, T es el espacio transverso y μ es una medida transversa. Entonces, la conclusión dice que μ -casi todo punto en el soporte de μ es recurrente; e.g. casi todo punto en el soporte de un ciclo foliado en dimensión uno es recurrente bajo la holonomía de la foliación generada por el flujo.

El conjunto

$$\{x \in A | \{\varphi^n(x)\}_{n \geq N} \subset A\},$$

⁵La referencia original es [Po], Théorème I, Section 8. Para formulaciones modernas de este teorema ver [G-M, p. 140] o [KH, p. 142].

para cualesquiera $N \in \mathbb{N}$ y $A \subset T$ medible, es llamado el *conjunto de recurrencia de Poincaré*, y según el teorema, este conjunto tiene masa total con respecto a μ . Utilizando la equivalencia entre ciclos foliados y medidas invariantes podemos generalizar el concepto de conjunto de recurrencia de la manera siguiente.

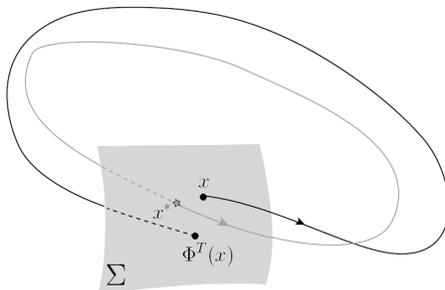


Figura 2.6: La aplicación de Poincaré: Σ es una sección transversal al flujo ϕ (ver definición 3.4.1), el punto x^* es un punto periódico por lo que es fijo bajo la aplicación de Poincaré.

Definición 2.3.2

Definimos el **conjunto de recurrencia de Poincaré** como la unión de los soportes de todos los ciclos foliados de una foliación \mathcal{F} y se denota $P(\mathcal{F})$.

Observación 2.3.3 Utilizando el teorema 2.2.13 se sigue, directo de la definición, que $P(\mathcal{F})$ contiene a todas las hojas compactas. En efecto, si L es compacta tiene crecimiento polinomial de grado 0 (Ejemplo 2.2.5) y por lo tanto es cerrada en el ∞ ; el teorema nos dice que existe una medida transversa invariante; esto es, soporta un ciclo foliado y por lo tanto, $L \subset P(\mathcal{F})$.

Más aún, también se tiene que $P(\mathcal{F})$ interseca la cerradura de las hojas no compactas que son cerradas en el ∞ , ya que si L es cerrada en el ∞ , entonces el teorema nos dice que \bar{L} soporta una medida transversa.

El siguiente resultado nos da información acerca de la estructura de $P(\mathcal{F})$.

Proposición 2.3.4 [Sul] *Si M es compacta entonces el conjunto $P(\mathcal{F})$ es cerrado e invariante.*

Demostración. El conjunto $P(\mathcal{F})$ es invariante ya que es la unión de los soportes de las medidas transversas invariantes por holonomía según el teorema 1.4.1. Ahora, recordemos de la proposición 1.2.10, que podemos pensar un ciclo foliado como una medida acotada y no-negativa, entonces es posible hablar de la masa de un ciclo.

Sea C_1, C_2, \dots una sucesión de ciclos foliados con masa uniformemente acotada, entonces, $S = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} C_i$ es también un ciclo foliado. Más aún, si la sucesión C_1, C_2, \dots es densa en los ciclos foliados de masa 1 se sigue que $\text{supp}(S) = P(\mathcal{F})$, por lo tanto $P(\mathcal{F})$ es cerrado. \square

El siguiente resultado es una propiedad de estabilidad de $P(\mathcal{F})$. Antes recordemos que una foliación es **cercana** a otra si los planos tangentes a las hojas son cercanos con respecto a una métrica riemanniana fija para todo punto de M .

Teorema 2.3.5 [Sul] *Si M es compacta y \mathcal{F} no tiene una medida transversa invariante, entonces cualquier foliación \mathcal{F}' cuyos planos tangentes están suficientemente cerca a los de \mathcal{F} también tiene esta propiedad. Es decir, la propiedad $P(\mathcal{F}) = \emptyset$ es una propiedad estable de \mathcal{F} .*

Demostración. Por el teorema 1.4.11, si no existe una medida transversa invariante entonces existe una forma exacta $\omega = d\eta$ positiva en \mathcal{F} . Luego, si \mathcal{F}' es cercana a \mathcal{F} se sigue que ω es también positiva en \mathcal{F}' . Entonces, \mathcal{F}' no tiene ciclos foliados, ya que si C es un ciclo foliado de \mathcal{F}' , se sigue que

$$0 = \langle C, d\eta \rangle = \langle \partial C, \omega \rangle = \int_C \omega > 0,$$

lo cual es una contradicción. \square

De hecho, gracias a la forma relativa del teorema 1.4.11, mencionada en la observación 1.4.13 tenemos un resultado más general.

Si $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ denota el complemento abierto del conjunto de recurrencia de Poincaré $P(\mathcal{F})$ y $K \subset \mathcal{U}(\mathcal{F})$ es el complemento de una pequeña vecindad V de $P(\mathcal{F})$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ que depende de V y de \mathcal{F} con la siguiente propiedad.

Teorema 2.3.6 [Sul] *Si \mathcal{F}' es cualquier foliación cuyos planos tangentes se encuentran ε -cerca a los de \mathcal{F} entonces el soporte de cualquier ciclo foliado de \mathcal{F}' intersecta la vecindad V de $P(\mathcal{F})$. En particular, las hojas cerradas al infinito pasan por V .*

Demostración. Utilizando la observación 1.4.13 existe una forma exacta en M positiva en la foliación \mathcal{F} cerca de K . Esta forma determina al ε y podemos aplicar la demostración anterior. \square

2.4. Ciclos Evanescentes

La noción de *ciclo evanescente* fué introducida en el notable trabajo de Novikov [N] y llamado así por Haefliger [H] en su tesis doctoral. En dimensión tres, Novikov demuestra que la existencia de un ciclo evanescente en una foliación de una variedad compacta es equivalente a la existencia de una componente de Reeb (ver [CL, p. 149]). Motivado por estos resultados, Sullivan demuestra que un ciclo evanescente de dimensión uno menos que la hoja implica la existencia de un ciclo foliado no trivial.

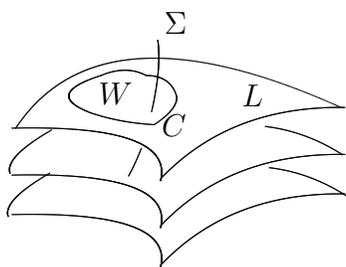


Figura 2.7: Ciclo \mathcal{F} -homólogo a cero.

En esta sección trabajaremos con cadenas y ciclos finitos que pueden ser realizados como imágenes continuas en M de complejos celulares.

El resultado que demostraremos está motivado en el famoso teorema de Novikov [N] que cualquier foliación de codimensión uno en \mathbb{S}^3 tiene una hoja compacta. En el próximo capítulo (ver teorema 3.2.1), se dará una demostración de este teorema con la herramienta de ciclos foliados.

Definiremos a continuación un ciclo evanescente de dimensión uno menos que la hoja que lo contiene. Comenzaremos definiendo un ciclo \mathcal{F} -homólogo a 0, que es la generalización de la definición de una curva homotópica a un punto por hojas.

Sean M una variedad compacta de clase C^∞ y \mathcal{F} una foliación de codimensión uno.

Definición 2.4.1

Un ciclo C en una hoja L de la foliación \mathcal{F} es **\mathcal{F} -homólogo a cero** si C es la frontera de la imagen continua en L de un complejo simplemente conexo.

Observación 2.4.2 Si C es un ciclo \mathcal{F} -homólogo a 0 con $C = \partial W$ se sigue que \mathcal{F} tiene holonomía trivial⁶.

⁶Recordemos que el grupo de holonomía $\text{Hol}(\mathcal{F})$ es la imagen de la aplicación $\Phi : \pi_1(M, x_0) \rightarrow G(\Sigma, x_0)$, que asocia a cada clase de homotopía $[\gamma]$ de caminos basados en $x_0 \in M$ la clase de gérmenes de difeomorfismos de Σ (una sección transversa local a la foliación que contenga a x_0), alrededor de γ , que dejan a x_0 fijo. Es posible demostrar que dos imágenes de Φ , para dos puntos x_0 y x_1 distintos son isomorfas, por lo que el grupo de holonomía se denota simplemente $\text{Hol}(\mathcal{F})$. Si $\text{Hol}(\mathcal{F})$ consta únicamente de la identidad, decimos que \mathcal{F} tiene *holonomía trivial* (Véase [CC, p. 59], [CL, p. 61] o [G, p. 91] para una introducción a

Esta observación se sigue del hecho que la región W es simplemente conexa por definición de \mathcal{F} -homólogo a cero, entonces su primer grupo de homotopía $\pi_1(W, x_0)$, con $x_0 \in W$, es trivial y por lo tanto, si consideramos una vecindad tubular V de W suficientemente pequeña, el grupo de holonomía $\text{Hol}(\tilde{W}, x_0)$ es trivial, donde \tilde{W} es la hoja de la variedad foliada $(V, \mathcal{F}|_V)$ que contiene a W . Esto es, \mathcal{F} tiene holonomía trivial alrededor de W .

Definiremos a continuación ciclo evanescente de dimensión arbitraria (véase [G, p. 264 IV.3.1 Définition] para la definición clásica).

Definición 2.4.3

Un **ciclo evanescente** C de dimensión k es la imagen continua en una hoja L , de un complejo k -dimensional, para el cual existe una familia uniparamétrica C_t de ciclos k -dimensionales tal que:

- i) Cada C_t se encuentra en una hoja L_t , $0 \leq t \leq 1$ y $C_0 = C$.
- ii) C_0 no es \mathcal{F} -homólogo a cero.
- iii) C_1 es \mathcal{F} -homólogo a cero.

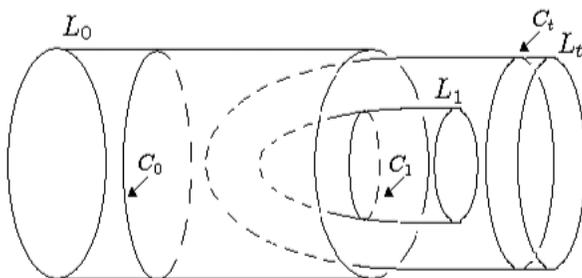


Figura 2.8: Ciclo Evanescente. El ciclo C_1 es \mathcal{F} -homólogo a cero, mientras que C_0 no lo es.

Ejemplo 2.4.4

Un ejemplo clásico y muy ilustrativo es el de la figura 2.8, que ilustra un ciclo evanescente de dimensión uno de una componente de Reeb (ver [G, p. 35 .3.14. Exemples i])). El ciclo C_0 no es \mathcal{F} -homólogo a cero, mientras que C_1 sí lo es. En tales componentes siempre existen ciclos evanescentes. De hecho, el teorema de Novikov mencionado arriba nos dice que un ciclo evanescente en S^3 implica la existencia de una componente de Reeb.

la holonomía).

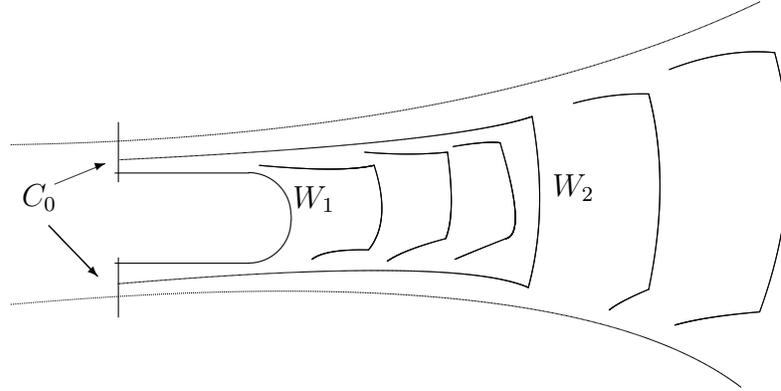


Figura 2.9: El número de cajas de flujo necesarias para cubrir a W , contándolas con repeticiones, es no acotado.

Teorema 2.4.5 [Sul] *Si una foliación \mathcal{F} tiene un ciclo evanescente de dimensión uno menos que la dimensión de la hoja, entonces \mathcal{F} tiene un ciclo foliado trivial.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad y con la notación de la definición anterior, podemos suponer que $C_1 = \partial W$, donde W es un elemento positivo y simplemente conexo en homología.

Por definición de ciclo evanescente C_1 puede ser llevado a C_0 través de ciclos contenidos en hojas. Este movimiento no puede ser extendido a una vecindad de W puesto que C_0 no es \mathcal{F} -homólogo a cero. Sin embargo, existe $t_0 \in (0, 1]$ para el cual podemos extender dicha homotopía en una vecindad de W_t para toda $t \in (t_0, 1]$.

El número de cajas de flujo necesarias para cubrir cada W_t , contadas con repetición es no acotado al acercarse al valor límite t_0 (ver 2.9), ya que de lo contrario podríamos tomar otra caja de flujo y extender el movimiento más allá de t_0 .

Tenemos entonces una sucesión de cadenas W_i en las hojas cuyo volumen es no acotado y cuyas fronteras, por definición, tienen masa acotada. Entonces la sucesión $\{1/\text{vol}(W_i) \int_{W_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ se acumula en un ciclo foliado. \square

Observación 2.4.6 Cabe mencionar que en la demostración únicamente utilizamos el hecho de la imposibilidad de seguir cubriendo con cajas de flujo a partir de un cierto valor crítico. Esta condición sería también cierta si existiese una familia de ciclos \mathcal{F} -homólogos a cero C_t tales que las regiones W_i 's no se

aproximasen de manera continua. El autor ignora si existe un ejemplo de esta naturaleza.

Por lo tanto podemos realizar la siguiente pregunta:

- ❓ **Pregunta:** ¿ Existe un ejemplo de una foliación de dimensión p que posea una familia uniparamétrica de ciclos $(p - 1)$ -dimensionales C_t , contenidos cada uno en una hoja L_t , tales que las las regiones W_i que cumplen $\partial(W_i) = C_i$ (ver 2.4.3) no se aproximen continuamente?

☆ ☆ ☆

En este capítulo hemos estudiado las aplicaciones principales hechas en [Sul] respecto a la geometría de las hojas, la recurrencia y los ciclos evanescentes.

Sullivan menciona que la hipótesis de que una hoja sea no cerrada en el ∞ no puede considerarse una buena generalización del trabajo de Plante sin antes demostrar que la definición de no cerrada en el ∞ no es consecuencia de la desigualdad isoperimétrica 2.11, ya que la idea clave en todo el trabajo es utilizar la secuencias promediantes (ver definición 2.2.1). El autor ignora si esto es cierto, es por eso que planteamos la pregunta siguiente.

- ❓ **Pregunta:** ¿ La desigualdad isoperimétrica 2.11 implica la condición no cerrada en el ∞ ?

Ahora, vimos que la presencia de hojas cerradas en el ∞ (en particular, de hojas con crecimiento subexponencial) asegura la existencia de ciclos foliados soportados en ellas, sin embargo el recíproco no es cierto, Plante en [P, p. 349] da un ejemplo de una foliación en la cual todas sus hojas tienen crecimiento exponencial y a la vez están contenidas en el soporte de un ciclo foliado. Sin embargo en codimensión uno sí se da la equivalencia, como veremos en la próxima sección.

乙

CAPÍTULO 3

Codimensión y Dimensión Uno

El hecho de que una foliación tenga dimensión o codimensión uno nos provee de una mayor estructura para su estudio, muchos argumentos son más sencillos y existen muchas propiedades que no se tienen en codimensión y dimensión arbitraria. Es por eso que hemos decidido estudiarlas por separado.

En la primera sección estudiaremos los resultados más importantes expuestos en [Sul] correspondientes a foliaciones de codimensión uno. Para ello demostraremos algunos resultados clásicos y un importante teorema de Joe Plante. En la segunda sección demostraremos el teorema de Novikov utilizando la herramienta de ciclos foliados siguiendo [Sul].

La teoría de ciclos asintóticos de Schwartzmann será expuesta en la tercera sección junto con algunos resultados importantes aplicando los teoremas de la sección uno. Schwartzmann demuestra un importante teorema sobre secciones transversas globales cuya demostración es en realidad sencilla utilizando el teorema de Tischler y la herramienta de ciclos foliados, es por eso que en la cuarta sección estudiaremos las secciones transversas globales y algunas equivalencias que implican su existencia.

En la quinta sección estudiaremos los flujos de Anosov y una conjetura de Alberto Verjovsky [V] acerca de secciones transversas globales. Daremos una demostración alternativa a un teorema de [V] con las técnicas desarrolladas hasta ahora, así mismo, demostraremos una versión más débil de un teorema

de Plante [P3] pero cuya demostración es mucho más simple que la original. Por último, en la sección seis veremos una equivalencia entre la existencia de una forma de contacto y una condición en los ciclos foliados de un flujo que no admiten una sección transversa global, terminaremos enunciando la conjetura de Weinstein y con un pequeño resultado de [We].

3.1. Codimensión Uno

La abundancia de curvas transversales en codimensión uno nos permite tener resultados especiales. Comenzaremos con dos resultados que no son exclusivos de codimensión uno, pero que nos serán de gran utilidad; su importancia *per se* es lo que nos ha decidido incluirlos en este trabajo junto con sus demostraciones.

Supondremos a continuación que M es una variedad compacta de clase C^∞ y \mathcal{F} una foliación de M de codimensión k y de clase C^r , $r \geq 1$.

El hecho que los ciclos foliados sean elementos de la homología de la variedad nos conduce a preguntarnos cuál es su producto de intersección, un resultado de Plante y la identificación de los ciclos foliados con las medidas transversas nos dan el resultado cuando el soporte de estos es diferente del vacío. Demostraremos a continuación el siguiente resultado de Plante [P].

Teorema 3.1.1 *Sea M^n una variedad C^∞ y \mathcal{F} una foliación de M de codimensión k , $k \leq 1 \leq n$, y de clase C^r , $r \geq 1$. Si $N^k \subset M$ es una subvariedad compacta sin frontera transversa a \mathcal{F} que intersecta el soporte de una medida transversa invariante, entonces N representa un elemento distinto de cero en $H_k(M; \mathbb{R})$.*

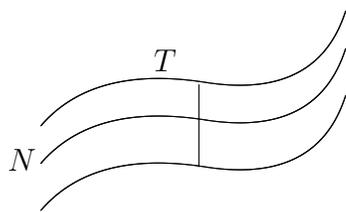


Figura 3.1: T es una vecindad tubular de la variedad N .

Demostración. Sabemos, de la topología diferencial básica (ver por ejemplo [GuPo, p. 69]), que podemos tomar una una vecindad tubular T de N en M tal que las fibras del haz normal están representadas por discos contenidos en las hojas de \mathcal{F} (ver figura 3.1). Podemos asumir que el grupo de estructura del haz normal es el grupo ortogonal. Sea $\pi : T \rightarrow N$ la proyección natural y tomemos $U \subset N$ un abierto en donde el haz normal sea trivial, entonces podemos definir una $(n-k)$ -forma sobre $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^{n-k}$ de la siguiente manera.

Sea $f : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ una *bump function* en 0 (e.g. una función C^∞ cuyo soporte contiene al 0 y es compacto) invariante bajo la acción del grupo ortogonal $(n-k)$ -dimensional en \mathbb{R}^{n-k} y tal que $\int_{\mathbb{R}^{n-k}} f = 1$. Podemos entonces definir a η sobre $\pi^{-1}(U)$ como el pullback por f de la forma de volumen

$$f(x_{k+1}, \dots, x_n) dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n, \text{ sobre } U \times \mathbb{R}^{n-1}.$$

Extendemos η en todo M definiéndola en T de la manera arriba mencionada, para todo abierto U en donde el haz normal sea trivial, e idénticamente cero fuera de T . La forma η está bien definida puesto que el grupo de estructura de T es el grupo ortogonal.

Entonces, utilizando la construcción del ciclo foliado C_μ asociado a la medida μ transversa invariante (ver ejemplo 1.1.12) se sigue que:

$$\langle C_\mu, \eta \rangle = \int_N \eta d\mu = \mu(N) \neq 0, \quad (3.1)$$

ya que $\text{supp}(\mu) \cap N \neq \emptyset$ por hipótesis. Esto demuestra el teorema. \square

El corolario siguiente será una herramienta útil en varias demostraciones más adelante.

Corolario 3.1.2 Sean C y C' dos ciclos foliados tales que

$$\text{supp}(C) \cap \text{supp}(C') \neq \emptyset.$$

Sea N una subvariedad compacta sin frontera que representa a C' . Entonces el producto de intersección de C con C' es distinto de cero, más aún, es la cantidad de masa depositada por C en N .

Demostración. Sea μ la medida correspondiente al ciclo foliado C de acuerdo al teorema 1.4.1, entonces, de la ecuación 3.1 se sigue,

$$C \cdot C' = \langle C, N \rangle = \mu(N).$$

\square

A continuación demostraremos un resultado clásico que muestra que una hoja no compacta siempre se acumula en alguna parte de la variedad.

Proposición 3.1.3 Una hoja no compacta de \mathcal{F} interseca a alguna caja de flujo al menos dos veces.

Demostración. Fijemos una métrica riemanniana en M y denotemos por d a la función distancia inducida por la métrica. Sea $L \subset M$ una hoja no compacta y denotemos por d' a la distancia d restringida a L . Podemos entonces tomar

una sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset L$ tal que $d'(x_i, x_{i+1}) = 5$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como M es compacta existe una subsucesión $\{x_{i_k}\} \subset \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in M$.

Sea $U \subset M$ una vecindad de x contenida en una caja de flujo tal que $\text{Diam}(U) < 1$ ($\text{Diam}(U) := \sup_{y, z \in U} \{d(y, z)\}$ es el diámetro de U). Entonces, existe una infinidad de puntos $x_{i_j} \subset U$ que convergen a x , pero por definición de la sucesión se tiene que $d(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) \leq 1$ y $d'(x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) \geq 5$, luego los x_{i_j} 's pertenecen a componentes conexas distintas de $L \cap U$, i.e. L interseca una caja de flujo al menos 2 veces (ver figura 3.2). \square

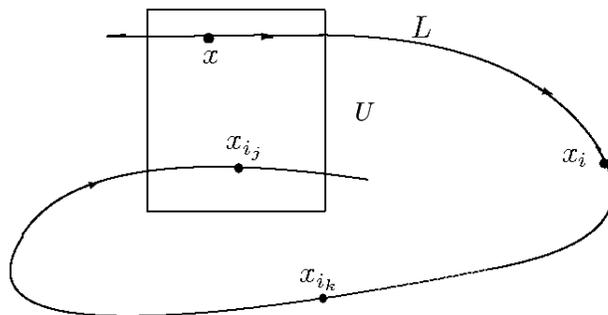


Figura 3.2: Demostración de la Proposición 3.1.3: la carta U tiene diámetro uno y contiene a una infinidad de puntos $x_j \in L$.

Como mencionamos antes, los dos resultados anteriores son válidos para foliaciones de dimensión y codimensión arbitrarias. A partir de ahora trataremos únicamente con foliaciones de codimensión uno, que es el objeto de estudio de esta sección.

- ⓘ **NOTA:** En lo que resta de esta sección M será una variedad compacta de clase C^∞ , y \mathcal{F} una foliación de M de codimensión uno y de clase C^r , $r \geq 1$.

Demostraremos el siguiente resultado clásico.

Proposición 3.1.4 *Una hoja que interseca una caja de flujo al menos dos veces es intersectada por una curva cerrada transversal.*

Demostración. Sea L una hoja de \mathcal{F} que interseca más de una vez a una caja de flujo B y sea $\Sigma \cong [0, 1]$ un disco transversal a \mathcal{F} contenido en B . Tomemos p y q , dos puntos distintos en $L \cap \Sigma$, lo cual es posible por la hipótesis de que L interseca a B más de una vez. Definamos $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow L$ como una curva simple tal que $\gamma_1(0) = p$, $\gamma_1(1) = q$, $\text{Im}(\gamma_1) \cap \Sigma = \{p, q\}$ y $\gamma_1([0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]) \subset B$. Así mismo definamos la curva $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow B$ como una curva simple tal que

$$\gamma_2(0) = \gamma_1(\frac{2}{3}) \text{ y } \gamma_2(1) = \gamma_1(\frac{1}{3}).$$

Dado que M es compacta, podemos tomar una vecindad tubular W de la componente conexa de $L \setminus B$ que intersecta a γ_1 y cubrirla con cajas de flujo, de esa manera, intersectando a W con cada caja de flujo obtenemos una “gran caja de flujo” B' que contiene a γ_1 (ver figura 3.3). Demostraremos que es posible modificar a $\gamma_1([\frac{1}{3}, \frac{2}{3}])$ y a $\gamma_2([0, 1])$ para que sean transversales a \mathcal{F} dentro de B' y B , respectivamente. La idea es modificar la imagen de cada curva en el hipercubo $[-1, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$ para que sea transversal a las placas $([-1, 1], \{x\})$, luego tomar la imagen inversa de la curva modificada.

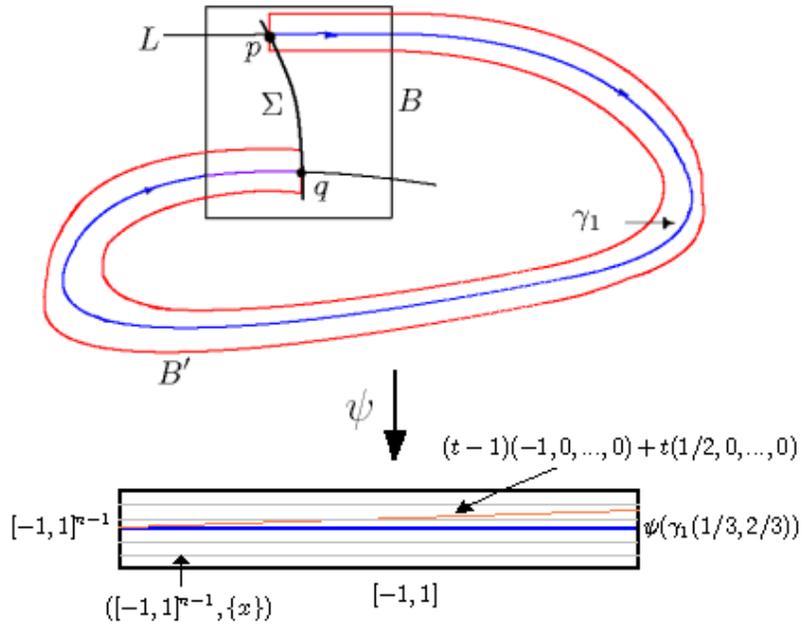


Figura 3.3: Demostración de la Proposición 3.1.4: La hoja L corta dos veces a la caja de flujo B . El difeomorfismo ψ envía la caja de flujo al hipercubo $[-1, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$

Sabemos que $B' \cong [-1, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$ via un difeomorfismo ψ , tal que la imagen de γ_1 bajo ψ sea la recta

$$\{(1 - t)(-1, 0, \dots, 0) + t(1, 0, \dots, 0) \in B' \mid t \in [0, 1]\},$$

i.e. $\psi^{-1}((-1, 0, \dots, 0)) = p$ y $\psi^{-1}((1, 0, \dots, 0)) = q$. Supongamos que $p < q$ con la orientación dada por la parametrización de Σ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\psi^{-1}((1/2, 0, \dots, 0)) < q$ y entonces la curva

$$\psi^{-1}(\{(t - 1)(-1, 0, \dots, 0) + t(1/2, 0, \dots, 0) \mid t \in [0, 1]\})$$

es una curva transversal a la foliación en B' . De manera análoga podemos

modificar γ_2 para hacerla transversal a la foliación en B , tomando la suma de estas dos curvas obtenemos una curva cerrada transversal a \mathcal{F} . \square

Ahora estamos en posición de demostrar el primer resultado concerniente a ciclos foliados en foliaciones de codimensión uno.

Proposición 3.1.5 [Sul] *Un ciclo foliado no trivial en codimensión uno es diferente de cero en homología o soportado por hojas compactas.*

Demostración. Sea C un ciclo foliado no trivial. Supongamos que existe una hoja no compacta L en el soporte de C . Por la proposición anterior L corta una caja de fujo en al menos dos puntos y por la proposición 3.1.4 existe una curva cerrada transversal γ a L . Usando el corolario 3.1.2, el número de intersección de C con dicha curva es la masa de C depositada en γ y como C es no trivial entonces esta cantidad es positiva, por lo tanto $[C] \neq 0$ en homología. \square

Para el resultado siguiente necesitaremos un importante resultado de Plante [P, Theorem 6.3, p. 346], que enunciamos a continuación¹.

Teorema 3.1.6 [P] *Sea μ una medida invariante por holonomía. Si L es una hoja de \mathcal{F} contenida en el soporte de μ entonces L tiene crecimiento polinomial.*

Observación 3.1.7 Este teorema demuestra, via la identificación de las medidas transversas con los ciclos foliados, que el conjunto de recurrencia de Poincaré $P(\mathcal{F})$ (Definición 2.3.2) en codimensión uno está formado por la unión de hojas con crecimiento subexponencial, lo cual incluye a las hojas compactas. Gracias a este teorema podemos reinterpretar el teorema 2.3.5 en codimensión uno como sigue.

Teorema 3.1.8 [Sul] *Si cada hoja de una foliación de codimensión uno tiene crecimiento exponencial, entonces lo mismo ocurre con cualquier foliación \mathcal{F}' cuyos planos tangentes estén lo suficientemente cerca a los de \mathcal{F} .*

Demostración. Si todas las hojas tienen crecimiento exponencial, entonces, por el teorema anterior no existen ciclos foliados, i.e. $P(\mathcal{F}) = \emptyset$, que según el teorema 2.3.5 es una propiedad estable². Luego, cualquier foliación lo suficientemente cercana a \mathcal{F} tiene todas sus hojas no cerradas en el infinito, ya que si una fuese cerrada en el infinito existiría un ciclo foliado, por el teorema 2.2.13. Entonces, utilizando el corolario 2.2.10, todas las hojas de una foliación \mathcal{F}' lo suficientemente cercana a \mathcal{F} tienen crecimiento exponencial. \square

¹La versión enunciada aquí es más débil que el teorema original. La demostración no se incluye por quedar fuera del espíritu de la tesis, el lector interesado puede consultar [P].

²Ver también el recordatorio antes del enunciado de dicho teorema.

Terminamos esta sección con un resultado que relaciona un flujo que posee una forma que preserva el volumen con el hecho de que exista siempre una curva cerrada transversal a cualquier hoja de \mathcal{F} .

Teorema 3.1.9 [Sul] *Supongamos que cada hoja compacta en una foliación transversalmente orientable de codimensión uno es cortada por una curva cerrada transversal. Entonces, existe un flujo transversal a la foliación que preserva la forma de volumen.*

Demostración. Por hipótesis y por las proposiciones 3.1.3 y 3.1.4 toda hoja L de \mathcal{F} es cortada por una curva cerrada transversal. Luego, si C es un ciclo foliado tal que $\text{supp}(C) \cap L \neq \emptyset$, por el teorema 3.1.1 se sigue que C no es cero en homología; por lo tanto, existe una $(n - 1)$ -forma cerrada ω transversal a la foliación. El kernel de ω define el flujo deseado. \square

3.2. Demostración Homológica del Teorema de Novikov

En esta sección demostraremos, como fue prometido en la sección 3 del capítulo 2, el gran resultado de Novikov [N] con las herramientas desarrolladas hasta ahora.

El enunciado es el siguiente.

Teorema 3.2.1 [N] *Toda foliación de clase C^2 y de codimensión uno de \mathbb{S}^3 posee una hoja compacta.*

Antes de dar la demostración enunciaremos el siguiente resultado que aparece en [CL, p. 139, Proposição 1].

Proposición 3.2.2 *Sea M una variedad compacta de dimensión $n \geq 3$ con grupo fundamental finito y \mathcal{F} una foliación de clase C^2 y de codimensión uno de M . Entonces \mathcal{F} posee un ciclo evanescente.*

La demostración de esta proposición es un argumento clásico que aparece por primera vez en la tesis de Haefliger y consiste en construir una transversal cerrada γ a partir de un 2-disco D en posición general relativa³ a \mathcal{F} , esto se puede hacer utilizando cualquier hoja no compacta (ver Proposición 3.1.4), la cual siempre existe si no habría nada más que demostrar. El ciclo evanescente se encuentra considerando la foliación inducida en D (que por la hipótesis de la posición del disco con respecto a \mathcal{F} , es un flujo en D) y aplicando el teorema de Poincaré-Bendixson (ver [KH, p. 452, Theorem 14.1.1]) a dicha foliación.

³Esto quiere decir que D es transversal a \mathcal{F} en todo punto.

Podemos ahora demostrar el teorema de Novikov.

Demostración del Teorema 3.2.1. La esfera \mathbb{S}^3 es compacta y simplemente conexa de dimensión 3, entonces podemos aplicar la proposición anterior y obtener que \mathcal{F} posee un ciclo evanescente. Ahora, utilizando el teorema 2.4.5, la existencia del ciclo evanescente implica la existencia de un ciclo foliado C que debe ser cero en homología ya que $H_2(\mathbb{S}^3) = 0$. Luego, la proposición 3.1.5 nos dice que C está soportado en hojas compactas. \square

Observación 3.2.3 El ciclo foliado “encuentra” la hoja compacta, ya que ésta es su soporte.

3.3. Foliaciones de Dimensión Uno

El estudio de ciclos foliados en dimensión uno es un tema clásico comenzado por Schwartzmann [Sch] que los llamó *ciclos asintóticos*. Bajo esta línea Fried [F] en su tesis doctoral también estudia los ciclos asintóticos y da condiciones sobre la existencia de secciones transversales globales al flujo. En esta sección estudiaremos la teoría de ciclos foliados en el caso particular en que la foliación es de dimensión uno.

Así como en codimensión uno la ventaja es la abundancia de transversales, en dimensión uno tenemos la ventaja de que las medidas invariantes transversas son lo mismo que las medidas invariantes por el flujo como lo explicaremos a continuación.

En esta sección M será una variedad compacta de clase C^∞ y \mathcal{F} una foliación de M de dimensión 1. Comenzaremos con un hecho fundamental.

Lema 3.3.1 *Toda foliación de dimensión uno en una variedad compacta posee un ciclo foliado no trivial.*

Demostración. Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión uno de una variedad compacta. Por el teorema 1.4.11 es suficiente demostrar que no existe una 1-forma exacta transversal a \mathcal{F} . Así pues, supongamos que $\omega = df \in \mathcal{D}_1$ es una forma exacta transversal a \mathcal{F} , con $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave. Como M es compacta existe $x \in M$ punto extremo de f , i.e. $0 = df_x = \omega(x)$, lo cual contradice el hecho que ω sea transversal a \mathcal{F} . \square

Fijemos una métrica riemanniana en M y sea ω la 1-forma que define el elemento de volumen a lo largo de las hojas. Como en el capítulo I sección 3 sea X el campo de vectores tangente a \mathcal{F} tal que $\omega(X) \equiv 1$.

La foliación \mathcal{F} define un flujo

$$\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M,$$

cuyas trayectorias son las hojas de \mathcal{F} y su parámetro es la longitud de arco. Recordemos la definición de medidas invariantes y ergódicas.

Definición 3.3.2

Una medida de probabilidad μ sobre M se llama una **medida invariante por el flujo** o simplemente una **medida ϕ -invariante** si

$$\mu(A) = \mu(\phi_t(A)), \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } \forall A \subset M \text{ boreliano.}$$

En este caso A se llama un **conjunto invariante** (o μ -invariante). Si los únicos conjuntos invariantes tienen medida total o nula con respecto a μ , decimos que μ es una **medida ergódica**.

Para estudiar la teoría ergódica clásica el lector puede consultar [CFS] o [M]. En adelante hablaremos indistintamente de las órbitas de ϕ y de la foliación \mathcal{F} .

Demostraremos entonces la identificación prometida, antes recordemos que, según la proposición 1.2.10 las corrientes foliadas están en correspondencia con las medidas de Borel acotadas y no-negativas por medio de la aplicación

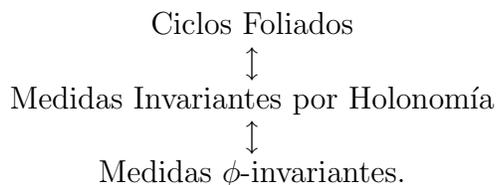
$$C \mapsto C_{X, \nu_C} := \int X d\nu_C.$$

Proposición 3.3.3 *La corriente foliada C es un ciclo foliado si y sólo si la medida ν_C es ϕ -invariante.*

Demostración. Recordemos, de la proposición 1.4.5, que la medida ν_C se puede descomponer como una medida en las placas ν_y y otra medida en el espacio transversal λ . Por construcción (ver discusión anterior a la proposición 1.4.5) la medida ν_y es, en cada placa, la medida imagen directa de ν_C bajo la proyección en la placa; luego, por la elección del campo de vectores y la definición de ν_C (ver lema 1.2.9) ésta es la medida de volumen (longitud) riemanniana en las placas, la cual es invariante por el flujo.

Ahora, la medida λ es la imagen directa de ν_C bajo la proyección en el espacio transversal, entonces se sigue inmediatamente que ν_C es ϕ -invariante si y sólo si λ es invariante bajo la holonomía, esto es, si y sólo si ν_C es una medida transversal invariante. □

Entonces tenemos las identificaciones:



A continuación transcribiremos un breve extracto de [A] para ilustrar la estrecha relación entre la teoría ergódica y la teoría de ciclos foliados.

El conjunto de medidas de Radón sobre M se identifica, via el teorema de representación de Riesz, con el espacio vectorial topológico localmente convexo de las funciones continuas, real valuadas definidas en M . Luego, podemos dotar a dicho espacio con la topología débil*. Con esta topología, el subespacio de medidas invariantes asociadas a un sistema dinámico continuo, sin puntos fijos, definido en una variedad compacta M , es un subconjunto convexo y compacto, cuyos puntos extremos son precisamente las medidas ergódicas, y ambos son siempre no vacíos. Luego, aplicando el teorema de Choquet tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.3.4 *Toda medida invariante puede ser arbitrariamente aproximada en el espacio de medidas por combinaciones convexas de medidas ergódicas.*

Observación 3.3.5 El lema 3.3.1 puede ser demostrado utilizando los argumentos anteriores, ya que todo ciclo foliado es una medida invariante y sabemos que siempre existen medidas invariantes no triviales, por lo tanto, siempre existen ciclos foliados no triviales para una foliación de dimensión uno.

Esto permite utilizar la teoría ergódica clásica para estudiar los ciclos foliados. Recordemos el teorema ergódico clásico.

Teorema 3.3.6 (Teorema Ergódico) *Si ν es una medida ergódica invariante por un flujo, entonces, para ν -casi todo $x \in M$ y toda $f \in C^0(M)$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\phi_s(x)) ds = \int_M f d\nu.$$

Para una completa exposición de lo explicado arriba, acerca del teorema de Choquet, su aplicación al conjunto de medidas invariantes y las medidas ergódicas el lector puede consultar [A].

Consideremos ahora el ejemplo siguiente en donde se ilustra todo lo expuesto arriba.

Ejemplo 3.3.7

Sea σ una órbita periódica de ϕ , e.g. una hoja compacta de \mathcal{F} . Esta hoja produce un ciclo foliado C al dividirla entre su longitud. Por otro lado, es fácil verificar que a este ciclo foliado le corresponde la medida transversa μ_σ que asigna 1 a toda placa de \mathcal{F} contenida en σ y cero a aquellas placas de \mathcal{F} que no estén en σ . La medida ϕ -invariante por el flujo que le corresponde a C es simplemente la medida ν_σ que asigna la longitud riemanniana de $B \cap \sigma$ a cada boreliano B de M .

Ahora, notemos que ν_σ es ergódica, ya que, por definición de ν_σ , si un subconjunto $A \subset M$ es invariante bajo ν_σ se sigue que $A \cap \sigma = \emptyset$ y entonces $\nu_\sigma(A) = 0$ ó $A \cap \sigma \neq \emptyset$ y $\nu_\sigma(A) = 1$. Si $x \in \sigma$ la afirmación del teorema anterior es clara, ya que $\{\phi_t(x)\}_{t \in \mathbb{R}} = \sigma$, σ tiene medida total respecto a ν_σ y por definición de ν_σ , la afirmación del teorema es fácilmente verificable.

En el caso en que un punto $x \in M$ sea no-periódico existe una forma de definir un elemento en homología a partir de su órbita como sigue.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ definamos los conjuntos (ver figura 3.4):

$$\Gamma_t(x) := \{\phi_s(x) \mid 0 \leq s \leq t\}.$$

Si $\{t_k\}$ es una sucesión de reales tales que $t_k \rightarrow \infty$ escribiremos $\Gamma_k := \Gamma_{t_k}(x)$. Como $\partial\Gamma_k$ consiste únicamente de dos puntos⁴ se sigue que $\{\Gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ forma una secuencia promediante y entonces

$$\lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_{\Gamma_k} \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}.$$

Hemos visto entonces cómo a partir de la órbita de cualquier punto de M podemos crear un ciclo foliado, sin embargo, también vimos que para los puntos periódicos, el ciclo foliado correspondiente se corresponde, a su vez, con una medida ergódica. La pregunta natural es entonces: ¿qué tipo de ciclos foliados se corresponden con medidas ergódicas?. La respuesta está en la siguiente descripción de las *direcciones en homología*.

Continuemos con la notación de la discusión anterior. Dado que M es compacta, podemos elegir la sucesión de reales $\{t_k\}$ de modo tal que exista una caja de flujo $B \subset M$ que contenga a x , para la cual $x_k := \phi_{t_k}(x) \in B$ para todo t_k . Ahora, para cada t_k podemos tomar un arco diferenciable $\gamma_{x, \phi_{t_k}}$ que una x con $\phi_{t_k}(x)$ (véase la figura 3.4). El conjunto de arcos $\{\gamma_{p,q}\}_{p,q \in M}$ puede

⁴Recordemos que $\partial\Gamma_k$ es la frontera topológica de Γ_k .

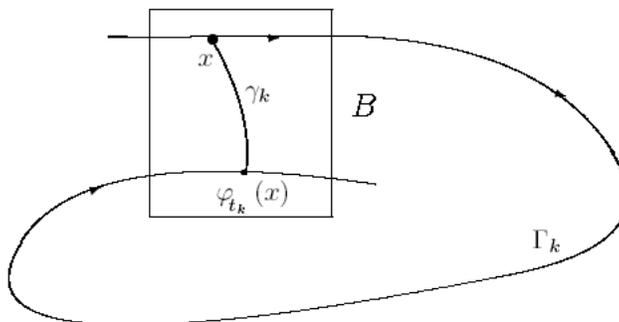


Figura 3.4: Una “órbita larga casi-cerrada” Γ_k se define al cerrar la trayectoria de x desde tiempo cero hasta tiempo t_k con una curva γ_k contenida en una caja de flujo B .

escogerse de tal manera que sea siempre transversal al flujo y con longitud uniformemente acotada. Definimos

$$\Gamma_k^* := \Gamma_k \cup \gamma_{x, \phi_{t_k}},$$

que es una curva cerrada, y por la elección de los γ 's se sigue que

$$\left[\frac{1}{t_k} \int_{\Gamma_k^*} \right] \in H^1(M; \mathbb{R})^* \cong H_1(M; \mathbb{R}).$$

Sin embargo, este ciclo no es, en general, un ciclo foliado, por lo que tenemos que tomar el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_{\Gamma_k^*} = C,$$

que es un elemento de \mathcal{D}'_1 . Tenemos entonces la siguiente definición.

Definición 3.3.8

Si un ciclo foliado C es obtenido de una órbita cerrada o como un límite

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_{\Gamma_k^*}, \quad (3.2)$$

como arriba, entonces C se llama una **dirección en homología**.

Observación 3.3.9 Notemos que la definición de dirección en homología no depende de la elección de la colección de caminos $\{\gamma_{p,q}\}_{p,q \in M}$, ya que su longitud riemanniana es acotada (puede ser elegida menor que, por ejemplo, dos veces el diámetro de la variedad), luego

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{\gamma_{x, \phi_t(x)}} = 0,$$

por lo que otra elección de los γ 's no cambia el límite 3.2, mientras su longitud riemanniana sea uniformemente acotada.

Ahora, recordemos que elegimos el campo de vectores X tal que $\omega(X) \equiv 1$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{t_k} \int_{\Gamma_k} \omega = 1, \quad \forall k \geq 0,$$

de donde se sigue el siguiente lema.

Lema 3.3.10 *Si C es una dirección en homología entonces $\langle C, \omega \rangle = 1$.*

La siguiente proposición nos da una caracterización de los ciclos foliados que corresponden a medidas ergódicas, esto es:

Medidas Ergódicas \leftrightarrow Direcciones en Homología.

Proposición 3.3.11 *Si un ciclo foliado C de \mathcal{F} corresponde a una medida ergódica ν_C , entonces C es una dirección en homología.*

Demostración. Sea C un ciclo foliado que corresponde a una medida ergódica invariante ν_C . Si ν_C corresponde a una órbita periódica, entonces por definición C es una dirección en homología. Por otro lado, sea $x \in M$ un punto genérico, i.e. x cumple la conclusión del teorema ergódico 3.3.6. Entonces, tomando una sucesión $\{t_k\}$, $t_k \uparrow \infty$, para cualquier 1-forma η se tiene

$$\langle C, \eta \rangle = \int_M \eta(X) d\nu_C = \lim_{t_k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \eta_{\phi_t(x)}(X_{\phi_t(x)}) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_{\Gamma_k^*} \eta,$$

que es la definición de dirección en homología. \square

Toda la discusión anterior nos permite demostrar la siguiente proposición.

Proposición 3.3.12 [Sul] *Cualquier ciclo foliado C de \mathcal{F} puede ser arbitrariamente bien aproximado en el espacio \mathcal{D}'_1 por una combinación lineal finita con coeficientes positivos de direcciones en homología. Si $C \neq 0$, entonces dichos coeficientes pueden ser acotados lejos del cero.*

Demostración. La primera afirmación es consecuencia inmediata de las proposiciones 3.3.4 y 3.3.12. Mientras que la segunda afirmación es consecuencia del lema 3.3.10 ya que si $\sum_{i=1}^m a_i C_i$ es una combinación lineal con coeficientes positivos que aproximan a C , entonces la combinación lineal

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m a_i \langle C_i, \omega \rangle$$

aproxima a $\langle C, \omega \rangle$, que es estrictamente mayor que 0.

□

Ejemplo 3.3.13

Sea $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\Lambda$ el toro generado por las traslaciones $\alpha : (x, y) \rightarrow (x + 1, y)$ y $\beta : (x, y) \rightarrow (x, y + 1)$, donde $\Lambda := (\alpha, \beta)$ es la latiz generada por α y β (ver figura 3.5). Dados $p, q \in \mathbb{Z}$ definimos el flujo $\phi_t(x, y) := (x, y) + t(p, q)$. Si $\lambda = p/q$ es un número racional, entonces el flujo es periódico y la órbita a través de cada punto $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ define una dirección en homología, por lo que cada una de estas órbitas define un ciclo foliado que corresponde a una medida ergódica.

Si λ es irracional, es conocido que entonces el flujo es minimal⁵ y, más aún, que existe una única medida invariante no trivial, que es la medida de Lebesgue estándar en \mathbb{T}^2 , para la cual el flujo ϕ_t es ergódico. En este caso los ciclos foliados son un rayo generado por el ciclo correspondiente a la medida de Lebesgue.

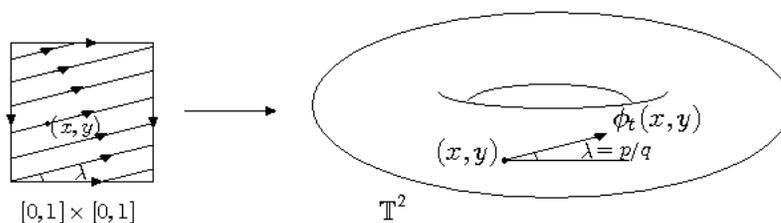


Figura 3.5: Ejemplo 3.3.13: la órbita del punto (x, y) es una línea en el toro con pendiente λ .

Ejemplo 3.3.14

Consideremos la 3-variedad $M := \widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})}/\Gamma$, donde $\widetilde{\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})}$ es el cubriente universal del grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ y Γ es un subgrupo discreto uniforme. Es conocido que los flujos inducidos por los campos vectoriales del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2; \mathbb{R})$ generados por

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

descienden a flujos minimales únicamente ergódicos en M . Estos flujos son llamados el *flujo horocíclico positivo* y *flujo horocíclico negativo*, respectivamente. La medida invariante es la medida de volumen generada por los duales de X , Y y $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. El flujo generado por H es llamado el *flujo geodésico* y éste es ergódico.

Una condición interesante que nos será útil en las dos secciones siguientes es suponer que el flujo ϕ sea transversal a una foliación \mathcal{G} de clase C^2 cuya

⁵Es decir, toda órbita es densa.

holonomía sea trivial⁶ (ver observación 2.4.2).

Entonces, supondremos de ahora en adelante que el flujo es transversal a una foliación \mathcal{G} de codimensión uno con holonomía trivial y de clase C^r , $r \geq 2$.

Demostremos a continuación un lema que nos muestra la existencia de una cota inferior a la aplicación de las direcciones en homología de \mathcal{F} en las medidas transversas invariantes de \mathcal{G} .

Sea $\mu_{\mathcal{G}}$ una medida transversa invariante de \mathcal{G} , que supondremos es una medida de probabilidad. Ésta puede ser interpretada como una medida continua a lo largo de las hojas de \mathcal{F} (ver [CC, p. 215, Lemma 9.2.16]) y define una clase $[\mu_{\mathcal{G}}]$ en el grupo $H^1(M; \mathbb{R})$ al integrar 1-ciclos, i.e. $\mu_{\mathcal{G}}(C) = \int_C d\mu_{\mathcal{G}}$ define un elemento de $H_1(M; \mathbb{R})^*$. Tenemos entonces el enunciado del lema.

Lema 3.3.15 *Con las hipótesis anteriores, existe una constante $b > 0$ tal que $[C](\mu_{\mathcal{G}}) \geq b$, para todas las direcciones en homología C de \mathcal{F} .*

Demostración. Comencemos fijando un atlas en M que sea regular tanto para \mathcal{F} como para \mathcal{G} , i.e. un atlas birregular⁷; dicho atlas, dado que la variedad es compacta, se puede elegir finito.

Recordemos, de la definición de direcciones en homología (Definición 3.3.8), que $\Gamma_k = \Gamma_{t_k}(x)$. Tomemos una subdivisión $0 = s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{r+1} = t_k$ del intervalo $[0, t_k]$ tal que $\phi_{[s_i, s_{i+2}]}$ sea una placa de \mathcal{F} .

Ahora, dado que el atlas es finito, existe una cota superior a la longitud riemanniana de los segmentos $\phi_{[s_i, s_{i+1}]}$ de las placas de \mathcal{F} (fijada una métrica riemanniana cualquiera), así como una cota inferior en su medida bajo $\mu_{\mathcal{G}}$. Entonces, existe una constante $b > 0$, tal que

$$\int_{\Gamma_k} d\mu_{\mathcal{G}} \geq bt_k.$$

Por lo que, si C es una dirección en homología se tiene

$$[C](\mu_{\mathcal{G}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_{\Gamma_k^*} d\mu_{\mathcal{G}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_{\Gamma_k} d\mu_{\mathcal{G}} \geq b$$

que es lo que se quería demostrar. \square

⁶Esto es, en cada punto $x \in M$, existe una hoja de \mathcal{F} y una hoja de \mathcal{G} que se interesectan de manera transversal.

⁷La demostración de la existencia de un atlas birregular puede ser consultada en [CC, p. 125, Proposition 5.1.4].

El siguiente corolario es una consecuencia simple del lema y la proposición anteriores.

Corolario 3.3.16 *Si \mathcal{G} tiene holonomía trivial entonces $[C](\mu_{\mathcal{G}}) > 0$, para todas las direcciones en homología C de \mathcal{F} .*

Demostración. Si C es un ciclo foliado no trivial, entonces el lema 3.3.15 y la proposición 3.3.11 implican que $[C](\mu_{\mathcal{G}}) \geq 0$. \square

Terminaremos con una reinterpretación del teorema 1.4.11 en su forma relativa para foliaciones de dimensión uno y algunos ejemplos.

Teorema 3.3.17 [Sul] *Sea $K \subset M$ un conjunto compacto tal que la restricción de ϕ_t a K sea no singular. Entonces, se satisface una de las siguientes:*

- i) K contiene un conjunto cerrado e invariante.*
- ii) Existe una función f definida cerca de K , que es igual al gradiente de otra función, tal que df es positiva en las direcciones del flujo.*

Demostración. La condición (i) es equivalente a la existencia de un ciclo foliado cuyo soporte está contenido en K . Si (i) no se cumple, entonces, usando la forma relativa del teorema 1.4.11 existe una forma exacta df positiva en la dirección del flujo en una vecindad de K . \square

Ejemplo 3.3.18

Si K es una órbita periódica entonces (i) siempre se cumple, ya que $\frac{1}{\text{long}(K)} \int_K$ es un ciclo foliado soportado en K . Lo mismo ocurre si K es la cerradura de una hoja cerrada en el ∞ (definición 2.2.7).

Ejemplo 3.3.19

Ahora, si K es un compacto completamente contenido en una órbita periódica se sigue que ningún ciclo foliado puede estar soportado en él, luego la condición (ii) se cumple.

Ejemplo 3.3.20

Si $K = M$ y el flujo admite una *sección transversa global* (ver definición 3.4.1) entonces no existen fronteras foliadas como veremos en la siguiente sección (ver Proposición 3.4.7) y por lo tanto la condición (ii) no se puede cumplir.

3.4. Secciones Transversas Globales

El teorema de rectificación nos dice, en particular, que un flujo siempre tiene secciones transversas locales; sin embargo, una sección transversa global es una característica muy restrictiva pero que nos proporciona mucha información acerca de la dinámica del flujo. En esta sección definiremos una sección

transversa global y daremos condiciones necesarias y suficientes para su existencia.

En toda esta sección $\phi_t : M \rightarrow M$ será un flujo no singular definido sobre una variedad compacta M . Nuestra primera definición es la siguiente.

Definición 3.4.1

Una subvariedad cerrada $\Sigma \subset M$ es llamada una **sección transversa global** o una **transversal total** al flujo ϕ_t si Σ intersecta a todas las órbitas de ϕ_t de manera transversal.

Ejemplo 3.4.2

Sea $e_1, \dots, e_n \subset \mathbb{R}^n$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Consideremos el flujo paralelo al subespacio generado por e_1 en \mathbb{R}^n , e.g. el flujo generado por el campo de vectores $X(p) = (1, 0, \dots, 0)$. Entonces, el subespacio generado por los vectores e_2, \dots, e_n es una sección transversa global.

Ejemplo 3.4.3

En el ejemplo 3.3.13 del flujo en el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\Lambda$, cuando $\lambda \neq \infty$, una sección transversa global está dada por la curva cerrada $\Sigma := (\mathbb{R} \times \{0\})/\Lambda$ (véase la figura 3.6).

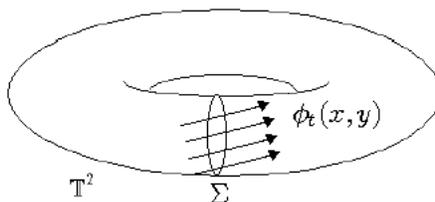


Figura 3.6: La curva Σ es una transversal total al flujo ϕ_t definido en el ejemplo 3.3.13.

Observación 3.4.4 La existencia de una sección transversa global al flujo es una restricción geométrica muy fuerte tanto para el flujo como para la variedad. En efecto, si $x \in \Sigma$ entonces, dado que Σ intersecta a todas las órbitas del flujo de manera transversal, se sigue que existe $t > 0$ tal que $\phi_t(x) \in \Sigma$ y $\phi_s(x) \notin \Sigma$ si $0 < s < t(x)$ (ver figura 2.3). Entonces, los teoremas de diferenciabilidad de soluciones de ecuaciones diferenciales nos dicen que la función $F : \Sigma \rightarrow \Sigma$, definida por $F(x) = \phi_{t(x)}(x)$ es un difeomorfismo llamado la *aplicación del primer retorno de Poincaré*. Es posible verificar que el flujo ϕ_t es la suspensión⁸ de F , lo cual es una restricción muy fuerte para un flujo.

⁸La suspensión de un difeomorfismo $F : N \rightarrow N$ es el flujo obtenido al considerar la acción del grupo \mathbb{Z} , generado por el difeomorfismo $(t, x) \mapsto (t - 1, F(x))$, sobre la variedad $\mathbb{R} \times N$ (ver [G, p. 13]).

A continuación enunciamos un teorema de Schwartzmann en donde se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de transversales globales.

Teorema 3.4.5 [Sch] *Toda medida invariante no trivial para un flujo determina una clase de homología no trivial en $H_1(M; \mathbb{R})$ si y sólo si el flujo tiene una sección transversa global de clase C^∞ .*

La demostración que daremos es la que aparece en [Sul], que es considerablemente más sencilla que la original. Antes de proceder a demostrarlo necesitamos recordar un poco acerca del teorema de Abel y Tischler.

Sea $\{[\eta_1], [\eta_2], \dots, [\eta_r]\}$ una base libre abeliana de $H^1(M; \mathbb{Z}) \subset H^1(M; \mathbb{R})$, entonces toda clase $[\omega] \in H^1(M; \mathbb{Z})$ se escribe como

$$[\omega] = \sum_{i=1}^r c_i [\eta_i], \quad \text{con los } c_i \text{'s } \in \mathbb{R}.$$

Decimos que ω tiene *períodos racionales* si $c_i \in \mathbb{Q}$ para $i = 1, 2, \dots, r$.

Dado un punto cualquiera $p \in M$, notemos que, dada una forma ω con períodos racionales, la aplicación de M a \mathbb{R} definida por

$$x \mapsto \int_p^x \omega$$

determina una fibración sobre el círculo de la siguiente manera. Si $[\omega] = \sum_{i=1}^r \frac{p_i}{q_i} [\eta_i]$, definamos $m := \text{mcm}\{q_i\}$; entonces, para cualesquiera dos curvas γ y η que definan la misma clase en $H_1(M; \mathbb{Z})$ se tiene

$$m \int_\gamma \omega - m \int_\eta \omega \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto $x \mapsto \int_p^x \omega \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$ está bien definida.

Ahora, el teorema de Tischler se enuncia como sigue. La demostración puede ser consultada en [CC, p.221] o en [G, p. 46].

Teorema 3.4.6 (Tischler) *Si ω' es una 1-forma cerrada y no-singular, entonces puede ser bien aproximada por 1-formas cerradas y no-singulares con períodos racionales.*

Podemos ahora demostrar el teorema de Schwartzmann.

Demostración del teorema 3.4.5. Si el flujo tiene una sección transversal global Σ , entonces toda medida invariante no trivial deposita una masa positiva en Σ , luego, debe representar una clase no trivial en la 1-homología por el corolario 3.1.2.

Para el recíproco sabemos, por hipótesis, que todo ciclo foliado determina una clase de homología no-trivial. Entonces, por el teorema 1.4.11 (ii), existe una 1-forma cerrada $[\omega]$ positiva en las direcciones del flujo. Supongamos que $[\omega]$ tiene períodos racionales. Entonces, por la discusión anterior la aplicación

$$x \mapsto \int_p^x \omega$$

determina una fibración de M sobre \mathbb{S}^1 . Cada fibra determina una sección transversal global. Si ω no tiene períodos racionales, podemos aproximarla por una forma que sí los tenga según el teorema de Tischler (teorema 3.4.6) y obtenemos el resultado. \square

Resumiendo nuestros resultados podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 3.4.7 *Si \mathcal{F} es una foliación de dimensión uno generada por las órbitas de un flujo C^1 no-singular, entonces son equivalentes:*

- i) Existe una fibración suave $\pi : M \rightarrow \mathbb{S}^1$.*
- ii) \mathcal{F} es transversal a una foliación de clase C^2 con holonomía trivial.*
- iii) $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{0\}$.*
- iv) \mathcal{F} admite una sección transversal global.*
- v) Existe una 1-forma cerrada transversal a \mathcal{F} .*

Demostración. (i) \Rightarrow (ii) es trivial, ya que una fibración es, en particular, una foliación sin holonomía. El corolario 3.3.16 nos dice que (ii) \Rightarrow (iii), así mismo, el teorema 3.4.5 muestra la implicación (iii) \Rightarrow (iv). Por último (iv) \Rightarrow (i) es la demostración clásica, cuya idea principal está en la observación 3.4.4, mientras que (iii) \Leftrightarrow (v) es consecuencia del teorema 1.3.6. \square

3.5. Flujos de Anosov: una conjetura de Verjovsky

Los flujos de Anosov son un caso especial de flujos que ha sido muy estudiado. En esta sección trataremos el caso especial de secciontes transversas a flujos de Anosov y lo relacionaremos con una conjetura hecha por A. Verjovsky

[V] en 1974.

En esta sección, M será una variedad compacta C^∞ de dimensión $n+1 > 3$. Definiremos primero un flujo de Anosov.

Definición 3.5.1

Un **flujo de Anosov** en la variedad M es un flujo $\phi_t : M \rightarrow M$ que cumple las siguientes propiedades:

i) El haz tangente TM se escinde como una suma de Whitney de tres subfibrados vectoriales continuos:

$$TM = E^s \oplus E^u \oplus E^1,$$

tales que tanto E^s y E^u son invariantes bajo la diferencial $d\phi_t$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y donde E^1 es el fibrado de líneas tangentes a X .

ii) Existen constantes $C_1, C_2, \lambda > 0$ tales que:

$$|(d\phi_t)_x(v)| \leq C_1 e^{-t\lambda} |v| \text{ y}$$

$$|(d\phi_{-t})_x(w)| \leq C_2 e^{-t\lambda} |w|,$$

para todos $x \in M$, $v \in E_x^s$, $w \in E_x^u$ y $t \in \mathbb{R}$.

Observación 3.5.2 Una consecuencia inmediata de la definición es que las foliaciones \mathcal{F} , \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u obtenidas al integrar las distribuciones de espacios vectoriales E^1 , E^s y E^u , respectivamente⁹, son transversales dos a dos. Más aún, cuando la distribución de n -planos $E^s \oplus E^u$ es integrable, la foliación que define, que denotamos \mathcal{F}^{su} , es transversal a la foliación E^1 .

Los siguientes ejemplos de flujos de Anosov son clásicos y están explicados con todo detalle en [V1].

Ejemplo 3.5.3

La suspensión de un *difeomorfismo de Anosov*¹⁰ es un flujo de Anosov.

Ejemplo 3.5.4

El flujo geodésico en una variedad compacta con curvatura seccional negativa es un flujo de Anosov.

Un teorema clásico es el teorema de la variedad estable para difeomorfismos de Anosov, que nos da información topológica sobre las foliaciones definidas por

⁹Por definición E^1 es integrable y el teorema de la variedad estable (ver[V1, Teorema 2.3]) nos dice que E^s y E^u siempre son integrables, sin embargo $E^s \oplus E^u$ no siempre lo es.

¹⁰Esto es un difeomorfismo cuyo fibrado tangente a la variedad se escinde en dos subfibrados E^s y E^u análogos a la definición de flujo de Anosov.

las distribuciones de planos del fibrado tangente. Enunciaremos a continuación una versión simplificada del teorema análogo para flujos de Anosov.

Teorema 3.5.5 (de la Variedad Estable para Flujos de Anosov) *Existen dos foliaciones \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u , cuyas respectivas hojas por $x \in M$, $L^s(x)$ y $L^u(x)$, son tangentes a las distribuciones de espacios vectoriales E^s y E^u , y son la imagen de una inmersión inyectiva de \mathbb{R}^k y \mathbb{R}^{n-k} en M respectivamente, donde $k = \text{Dim}(E^s)$.*

Demostración. Véase [V1, Teorema 2.3]. □

Este teorema nos permite demostrar que, cuando la distribución de espacios vectoriales $E^s \oplus E^u$ es integrable, la foliación $\mathcal{F}^{su} := \mathcal{F}^s \oplus \mathcal{F}^u$ que define tiene holonomía trivial como lo enunciamos en la siguiente proposición.

Proposición 3.5.6 *Si la distribución de espacios vectoriales $E^s \oplus E^u$ es integrable entonces las hojas de la foliación \mathcal{F}^{su} son inmersiones inyectivas de \mathbb{R}^n . En particular tienen holonomía trivial.*

Demostración. Por definición de flujo de Anosov, las distribuciones E^s y E^u son transversales, y por el teorema de la variedad estable, las hojas de cada una de ellas son inmersiones inyectivas de \mathbb{R}^k y \mathbb{R}^{n-k} , de donde las hojas de \mathcal{F}^{su} son inmersiones inyectivas de \mathbb{R}^n . □

El siguiente teorema es una consecuencia trivial de la proposición 3.4.7 y la proposición 3.5.6.

Teorema 3.5.7 *Sea $\phi_t : M \rightarrow M$ un flujo de Anosov en una variedad de dimensión mayor o igual a 3. Si la distribución $E^s \oplus E^u$ es integrable y la foliación \mathcal{F}^{su} es de clase C^2 , entonces el flujo ϕ_t admite una sección transversa global.*

Demostración. Sabemos que ϕ_t define una foliación de dimensión uno transversal a la foliación de codimensión uno \mathcal{F}^{su} que por hipótesis es de clase C^2 y que tiene holonomía trivial por la proposición 3.5.6. El resultado es entonces una consecuencia de la proposición 3.4.7. □

Definimos ahora un flujo de Anosov de codimensión uno para enunciar la conjetura de Verjovsky.

Definición 3.5.8

Un flujo de Anosov se dice de **codimensión uno** si $\text{Dim}(E^s) = 1$ ó $\text{Dim}(E^u) = 1$.

La conjetura de Verjovsky es enunciada como sigue en [Gh]¹¹.

¹¹La conjetura original fue enunciada también en [V] para variedades de dimensión 3, sin embargo es falsa en este caso, como lo demuestra el trabajo de J. Franks y R. Williams [FW].

Conjetura de Verjovsky. *Todo flujo de Anosov de codimensión uno en una variedad compacta de dimensión mayor que tres posee una sección transversa global.*

Se han hecho muchos esfuerzos para demostrar esta conjetura, siendo los más importantes los trabajos de Plante [P3], Ghys [Gh] y Simić [Si].

Observación 3.5.9 El teorema 3.5.7 nos dice que la conjetura es cierta cuando la distribución de planos $E^s \oplus E^u$ genera una foliación de clase C^2 . Lo cual es demostrado por Plante para flujos de Anosov de codimensión uno cuando la distribución de n -planos $E^s \oplus E^u$ es integrable.

El siguiente resultado es demostrado en [V]¹².

Teorema 3.5.10 *Las órbitas periódicas de un flujo de Anosov de codimensión uno en una variedad compacta de dimensión mayor que tres son densas.*

Este resultado nos permite demostrar el siguiente resultado, como consecuencia inmediata del teorema 3.4.5 y la proposición 3.3.11, con el cual terminamos esta sección.

Proposición 3.5.11 [V] *Un flujo de Anosov de codimensión uno en una variedad compacta de dimensión mayor que tres posee una sección transversa global si y sólo si existe una 1-forma cerrada ω , tal que*

$$\int_{\gamma} \omega > 0$$

para toda órbita periódica γ .

3.6. Flujos de Contacto

En esta última sección estudiaremos una interesante aplicación de la teoría de ciclos foliados a flujos de tipo contacto.

En [Mc] Dusa McDuff utiliza el lenguaje de ciclos foliados para dar condiciones necesarias y suficientes que dicen cuándo una variedad es de tipo contacto. El mismo resultado fue redactado de manera distinta en [CMP] para relacionar estas condiciones con la “acción de una medida invariante”. Aquí demostraremos este resultado y lo relacionaremos con una famosa conjetura de Alan Weinstein.

¹²El teorema fue enunciado en dimensión 3, pero es falso como se demuestra en [FW].

El resultado siguiente es demostrado por primera ocasión en [Mc], sin embargo el enunciado es de [CMP]. La motivación reside en encontrar condiciones sobre la “acción de una medida invariante” para saber si una variedad es o no de tipo contacto.

Teorema 3.6.1 [Mc] *Sea M una variedad compacta de clase C^∞ y X un campo vectorial no singular sobre M . Si θ es una 1-forma en M y si X no admite una sección transversa global entonces son equivalentes:*

i) Existe una 1-forma cerrada φ tal que

$$\theta(X) + \varphi(X) \neq 0.$$

ii) La integral $\int \theta(X)d\mu$ nunca se anula para toda medida μ con homología cero.

Demostración. Demostraremos primero la implicación (i) \Rightarrow (ii). La 1-forma cerrada φ determina una clase en la 1-homología. Entonces,

$$\int \varphi(X)d\mu = 0,$$

para toda medida de probabilidad invariante con homología cero μ por el corolario 3.1.2 y el teorema 1.4.1. Por lo tanto, para toda medida de probabilidad invariante con homología cero μ se sigue

$$\int \theta(X)d\mu = \int \left(\theta(X) + \varphi(X) \right) d\mu \neq 0.$$

Demostraremos ahora que (ii) \Rightarrow (i). Denotemos por \mathcal{F} a la foliación de dimensión uno obtenida por el flujo de X . Recordemos también (ver la discusión posterior a la definición 1.1.13) que θ puede ser considerado como un funcional $\theta : \mathcal{D}'_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\theta(C) := \langle C, \theta \rangle .$$

Entonces, por la condición (ii), θ es distinto de cero para todo $C \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}} \setminus \{0\}$, ya que $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ se identifica con las medidas con homología cero. Por lo tanto,

$$(\text{Ker}(\theta) \cap \mathcal{B}_1) \cap \mathcal{C}_{\mathcal{F}} = \text{Ker}(\theta) \cap \mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{0\},$$

y aplicando el teorema 1.3.4 existe un funcional $\eta : \mathcal{D}'_1 \rightarrow \mathbb{R}$ transversal a \mathcal{F} con la condición

$$\text{Ker}(\theta) \cap \mathcal{B}_1 \subseteq \text{Ker}(\eta). \quad (3.3)$$

Entonces $\eta|_{\mathcal{B}_1} \neq 0$, ya que de lo contrario η sería una forma cerrada transversal a la foliación y por el teorema 1.3.6 parte (iii) se tendría $\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{0\}$,

que implicaría la existencia de una sección transversa global a \mathcal{F} según la proposición 3.4.5, lo cual es falso por hipótesis.

Por lo tanto, la condición 3.3 nos dice que existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que

$$\eta|_{\mathcal{B}_1} = \alpha\theta|_{\mathcal{B}_1},$$

por lo que $\varphi := \eta - \alpha\theta$ es un funcional que se anula en las formas exactas, i.e. φ es una 1-forma cerrada tal que

$$\alpha\theta(X) + \varphi(X) = \alpha\theta(X) + (\eta(X) - \alpha\theta(X)) = \eta(X) > 0$$

puesto que η es transversal a \mathcal{F} . Lo cual demuestra el resultado. \square

Para que este resultado no parezca un resultado aislado, daremos algunas definiciones y lo relacionaremos con ellas.

Definición 3.6.2

Definimos una **variedad simpléctica** como el par (N, ω) donde N es una variedad C^∞ y ω es una 2-forma cerrada, no degenerada y tal que $\omega^n \neq 0$. A ω se le llama una **forma simpléctica**.

Observación 3.6.3 Observemos que si M es simpléctica, entonces la dimensión de M es par.

Sea (N^{2n+2}, ω) una variedad simpléctica y supongamos que existe un encaje

$$M \hookrightarrow N$$

como una $2n + 1$ variedad suave. Entonces, la forma ω restringida a M es no degenerada, por lo que podemos definir un campo de vectores X por la igualdad

$$\omega(X, \cdot)|_{TN} \equiv 0.$$

Denotaremos por ξ al flujo generado por las integrales de este campo de vectores.

La definición de *tipo de contacto* puede ser enunciada entonces como sigue.

Definición 3.6.4

Una 1-forma θ se llama una **forma de contacto** si existe una 1-forma cerrada φ tal que $\theta(X) + \varphi(X)$ nunca es cero. Si una variedad M , de dimensión $2n + 1$ posee una forma de contacto θ definida sobre de ella, decimos que el par (M, θ) es de **tipo contacto**.

El teorema 3.6.1 aparece en [Mc] redactado como sigue.

Teorema 3.6.5 *El par (M, θ) es de tipo contacto si y sólo si*

$$\langle C, \theta \rangle \neq 0$$

para todo $C \in \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$.

Ahora debe ser claro al lector porqué los autores de [CMP] enunciaron dicho teorema de esa manera.

Es de interés estudiar variedades de tipo contacto. Estas variedades aparecen al intentar construir estructuras de contacto en flujos magnéticos, así como en el trabajo de Alan Weinstein en [We] en donde conjetura que el flujo de Reeb posee una órbita periódica si la variedad tiene grupo de 1-homología trivial.

☆ ☆ ☆

Este capítulo muestra la variedad de aplicaciones que los ciclos foliados tienen en las foliaciones de codimensión y dimensión uno. Concluiremos con algunos comentarios generales de algunas de las secciones.

El estudio de la existencia de hojas compactas, en particular lo estudiado en la sección 2, fue lo que le dió a Novikov la medalla Fields.

Los ciclos foliados son muy útiles para estudiar también foliaciones minimales y flujos geodesibles. Una buena introducción a este estudio se encuentra en [CC, 10.4, p.257] y sus referencias. Lo extenso del tema y la existencia de muy buenos textos explicativos al respecto nos hizo desistir de incluirlo en este trabajo. En algunos trabajos recientes de Contreras, Iturriaga, Verjovsky y Vila los ciclos de Schwartzmann tienen también una notable aplicación en el estudio del concepto de *número de enlace para flujos*.

La conjetura de Verjovsky fue el objeto de estudio de la tesis doctoral de Simić sin llegar a algún resultado fuerte que indique que la conjetura es cierta o falsa. En palabras del propio Alberto Verjovsky: “no se si la conjetura sea cierta o falsa; sin embargo, Étienne Ghys recomienda que uno no se dedique por completo a estudiarla, ya que es un problema muy difícil”.

Por último, la conjetura de Weinstein ha sido estudiada con gran ahinco por Claude Viterbo siendo [VH] su trabajo más reciente con respecto a ésta, sin embargo, sigue siendo un problema abierto.

丙

APÉNDICE A

Medidas Transversas Invariantes

En este apéndice se dará una rápida introducción a las medidas transversas invariantes siguiendo en su mayoría [S, §2.3] en la sección 1 y en la sección 2 se explica un ejemplo de una foliación que no posee medidas transversas invariantes, dicho ejemplo aparece por primera vez en [Ga].

A.1. Medidas Transversas Invariantes por Holonomía

En toda esta sección \mathcal{F} será una foliación de dimensión p y codimensión q de una variedad M de dimensión n y de clase C^∞ .

Una serie de resultados nos dice que siempre existe una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de M con las siguientes propiedades:

1. \mathcal{U} es localmente finita.
2. Cada abierto U_j es conexo y $\mathcal{F}|_{U_j}$ es la foliación trivial; i.e. existen difeomorfismos $\varphi_j : U_j \rightarrow \varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$ que llevan a \mathcal{F} en la foliación horizontal de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$.
3. Estos difeomorfismos φ_j satisfacen que $\varphi_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$ y $\{\varphi_j^{-1}((-1, 1)^n)\}_{j \in \mathbb{N}}$ es una cubierta de M .
4. En cada U_j tenemos un disco inmerso $\mathbb{D}^q = \Sigma_j \subset \varphi_j^{-1}((-1, 1)^n)$, que es transversal a las placas de $\mathcal{F}|_{U_j}$ y parametriza este espacio de placas.

5. Cada hoja de \mathcal{F} corta algún disco transversal Σ_j y, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ se sigue que cada placa de $\mathcal{F}|_{U_i}$ encuentra a lo más una placa de $\mathcal{F}|_{U_j}$ definiendo un difeomorfismo local C^∞ , $\gamma_{ij} : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_j$ con la propiedad de que, en cada intersección $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $y_i := \gamma_{ij} \circ y_i$ con $y_i =$ proyección de U_j sobre Σ_j via la φ_j .

La cubierta \mathcal{U} se llama una **cubierta foliada regular** de \mathcal{F} . Cuando \mathcal{U} es una cubierta foliada regular se tiene que el conjunto $T = \bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} \Sigma_j$, donde \bigsqcup indica que la suma es disjunta, tiene estructura de variedad diferenciable de codimensión la dimensión de \mathcal{F} , esta variedad es llamada el **espacio transverso de \mathcal{F}** . Para ver una demostración de las afirmaciones anteriores el lector puede consultar [G, §II].

Observación A.1.1 Los difeomorfismos γ_{ij} cumplen la *condición de cociclo*, i.e. si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}^{-1}$ y, si $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$, entonces $\gamma_{ij} \circ \gamma_{jk} = \gamma_{ik}$ sobre los dominios correspondientes.

Recordemos la definición de pseudogrupo.

Definición A.1.2

Sea X un espacio topológico y sea Γ una colección de homeomorfismos entre subconjuntos de X . Si $\gamma \in \Gamma$ denotamos por $\mathcal{D}(\gamma)$ y $\mathcal{R}(\gamma)$ al dominio y al rango de γ , respectivamente. Decimos que Γ es un *pseudogrupo* si las siguientes condiciones se cumplen:

- i) La identidad $\text{id} : X \rightarrow X$ está en Γ ,
- ii) Si $\gamma \in \Gamma$ entonces $\gamma^{-1} \in \Gamma$, donde

$$\mathcal{D}(\gamma^{-1}) = \mathcal{R}(\gamma) \text{ y } \mathcal{R}(\gamma^{-1}) = \mathcal{D}(\gamma).$$

- iii) Si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, entonces $\gamma_1 \circ \gamma_2 \in \Gamma$, donde

$$\mathcal{D}(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \gamma_2^{-1}(\mathcal{D}(\gamma_1) \cap \mathcal{R}(\gamma_2)) \text{ y } \mathcal{R}(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \gamma_1(\mathcal{D}(\gamma_1) \cap \mathcal{R}(\gamma_2)).$$

- iv) Para $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ con $\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ para toda $x \in \mathcal{D}(\gamma_1) \cap \mathcal{D}(\gamma_2)$ definimos

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(x) = \begin{cases} \gamma_1(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}(\gamma_1) \\ \gamma_2(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}(\gamma_2). \end{cases}$$

Luego, si $\gamma_1 \cup \gamma_2 : \mathcal{D}(\gamma_1) \cup \mathcal{D}(\gamma_2) \rightarrow \mathcal{R}(\gamma_1) \cup \mathcal{R}(\gamma_2)$ es un homeomorfismo, entonces $\gamma_1 \cup \gamma_2 \in \Gamma$.

- v) Si $\gamma \in \Gamma$ y $S \subset \mathcal{D}(\gamma)$, entonces la restricción de γ a S es un elemento de Γ .

Tenemos entonces la definición del pseudogrupo de holonomía.

Definición A.1.3

Definimos el **pseudogrupo de holonomía** de \mathcal{F} para la cubierta regular \mathcal{U} como el pseudogrupo $\Gamma_{\mathcal{U}}$ de difeomorfismos locales C^∞ , generado por los difeomorfismos locales γ_{ij} de T .

Para que el pseudogrupo de holonomía esté bien definido necesitamos el siguiente resultado, que nos dice que la definición no depende de la cubierta regular elegida. La demostración puede consultarse en [G, p. 76].

Lema A.1.4 *Todos los pseudogrupos de holonomía $\Gamma_{\mathcal{U}}$, donde \mathcal{U} es una cubierta regular de M para la foliación \mathcal{F} , son equivalentes de manera natural.*

Podemos ahora definir una medida transversa invariante como sigue.

Definición A.1.5

Una **medida transversa invariante por holonomía** (para \mathcal{F}), o simplemente una **medida transversa invariante** (para \mathcal{F}), es una medida μ definida en el espacio transverso T tal que:

- i) Es finita en compactos.
- ii) Es invariante bajo el pseudogrupo de holonomía, i.e.

$$\mu(B) = \mu(\gamma^{-1}(B)),$$

para todo boreliano $B \subset T$ y todo elemento γ del pseudogrupo de holonomía.

Si existe una medida invariante para \mathcal{F} decimos que \mathcal{F} **admite una medida transversa invariante**. Definimos el **soporte de una medida transversa invariante** como el conjunto de puntos $x \in M$ tales que, dado Σ , un disco transversal a \mathcal{F} que contenga a x , se tiene que $\mu(\Sigma) > 0$. Denotamos al soporte de μ por $\text{supp}(\mu)$.

Observación A.1.6 Si μ es una medida transversa invariante, entonces su soporte es un conjunto cerrado y saturado.

Ejemplo A.1.7

Supongamos que \mathcal{F} tiene una hoja cerrada $L_0 \subset M$. Entonces, dado cualquier disco transversal a \mathcal{F} , digamos Σ , definimos para todo $A \subset \Sigma$ la medida

$$\mu(A) = \#\{A \cap L_0\}.$$

Ésta define una medida transversa invariante con soporte L_0 .

Ejemplo A.1.8

Si la foliación \mathcal{F} está dada por una k -forma cerrada no singular ω , entonces para todo disco transversal Σ de \mathcal{F} , la restricción $\omega|_{\Sigma}$ es una forma de volumen que es positiva en abiertos; por lo tanto, ω induce una medida en el espacio transversal a \mathcal{F} que es finita en compactos y como ω es cerrada se sigue que dicha forma es invariante bajo el pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} .

En el caso $k = 1$ el lema de Poincaré nos dice que el pseudogrupo de holonomía de \mathcal{F} es un subgrupo de traslaciones $(\mathbb{R}, +)$ y que cada hoja de \mathcal{F} tiene holonomía trivial, por lo que toda medida de Borel invariante por traslaciones es también invariante por holonomía.

Ejemplo A.1.9

Si \mathcal{F} está dada por una fibración $M \rightarrow B$ sobre una variedad B , entonces las medidas invariantes de \mathcal{F} son precisamente las medidas sobre M finitas en compactos.

A.2. Una foliación que no admite medidas transversas invariantes

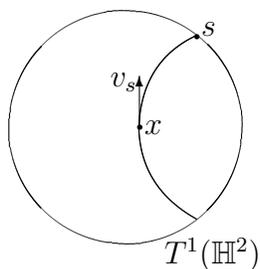


Figura A.1: Definición de la foliación estable del flujo geodésico.

En esta sección expondremos un ejemplo que se menciona en el artículo de Ruelle y Sullivan [RS] y es expuesto con más detalle en la tesis doctoral de Lucy Garnett [Ga].

La foliación que consideraremos será la foliación estable del flujo geodésico¹ en el haz tangente unitario de una superficie de Riemann de género mayor o igual a 2. Veremos que esta foliación es transversal a la foliación por círculos en el tangente unitario, que define una corriente

en la clase trivial de la 1-homología, por lo que el producto intersección de ambas foliaciones es cero y entonces no puede existir una medida transversa no trivial en ninguna de estas foliaciones.

Sea \mathbb{H}^2 el plano hiperbólico y $T^1(\mathbb{H}^2)$ su espacio tangente unitario. Definiremos dos foliaciones en $T^1(\mathbb{H}^2)$.

La primera de ellas es la *foliación estable del flujo geodésico*. Dados dos puntos cualesquiera $x \in \mathbb{H}^2$ y $s \in \mathbb{S}^1$, existe un único vector $v_s \in T^1(\mathbb{H}^2)$ para el cual el flujo geodésico en x converge a s (ver figura A.1). Tenemos entonces

¹Una muy buena referencia para estudiar el flujo geodésico es el original artículo expositivo de Xavier Gómez-Mont [G-M].

la siguiente definición.

Definición A.2.1

Definimos la **foliación estable del flujo geodésico** como la foliación de $T^1(\mathbb{H}^2)$ cuyas hojas son los conjuntos

$$L_s = \{(x, v_s) \mid x \in \mathbb{H}^2\}, \quad s \in \mathbb{S}^1.$$

Denotaremos a esta foliación por \mathcal{G}^+ .

Observación A.2.2 La foliación \mathcal{G}^+ es una foliación de codimensión uno de $T^1(\mathbb{H}^2)$ que es invariante por isometrías.

Definimos ahora la otra foliación de nuestro interés.

Definición A.2.3

Definimos la **foliación por círculos de $T^1(\mathbb{H}^2)$** como la foliación cuyas hojas son los conjuntos

$$L_x = \{(x, v) \mid v \in T_x(\mathbb{H}^2), \|v\| = 1\}, \quad x \in \mathbb{H}^2.$$

Denotaremos a esta foliación por \mathcal{C} .

Observación A.2.4 La foliación \mathcal{C} es una foliación de codimensión dos de $T^1(\mathbb{H}^2)$ cuyas hojas son círculos y que es invariante bajo isometrías. Más aún, \mathcal{C} es transversal a la foliación \mathcal{G}^+ .

Observación A.2.5 La foliación \mathcal{C} tiene una medida transversa invariante natural, que denotaremos μ , definida por el levantamiento a $T^1(\mathbb{H}^2)$ de la forma de volumen en \mathbb{H}^2 . Esta medida es un ciclo foliado C_μ que define una clase de 1-homología.

Sea ahora Γ un subgrupo discreto del grupo de isometrías de \mathbb{H}^2 con dominio fundamental compacto y tal que el cociente \mathbb{H}^2/Γ sea una superficie de Riemann de género mayor o igual a 2. Entonces, por las observaciones A.2.2 y A.2.4, las foliaciones \mathcal{G}^+ y \mathcal{C} descienden a dos foliaciones en la 3-variedad $M := T^1(\mathbb{H}^2)/\Gamma$.

Por último, el hecho de que \mathbb{H}^2/Γ tiene característica de Euler distinta de cero implica que C_μ (ver A.2.5) define la clase cero en la 1-homología. Por lo tanto si \mathcal{G}^+ tuviese una medida transversa invariante no trivial ν , se seguiría, usando el corolario 3.1.2, que

$$0 = [C_\mu] \cap [C_\nu] = \nu(N) \neq 0,$$

donde N es una variedad suave que representa la clase de C_μ en la 1-homología.

丙

APÉNDICE B

Espacios Foliados

En este apéndice daremos una rápida introducción a los espacios foliados y a la definición de medidas transversas y la teoría de DeRham sobre ellos. Las referencias principales serán [CC, ?, Gh1, ?].

B.1. Definiciones Básicas

Supondremos que M y Z son espacios topológicos segundo numerables, metrizable y localmente compactos. Haremos una serie de definiciones a continuación.

Una **carta foliada** de M de dimensión p , modelada transversalmente en Z es una pareja (U, φ) , con $U \subseteq M$ un abierto y $\varphi : U \rightarrow V \times W$ un homeomorfismo, donde $V \subset Z$ es un abierto regularmente compacto y $W \subset \mathbb{R}^p$ es una bola abierta de radio finito. Los conjuntos $T_y = \varphi^{-1}(V \times \{y\})$ y $P_x = \varphi^{-1}(\{x\} \times W)$ se llaman, respectivamente una **placa** y una **transversal** para esta carta foliada.

Una colección de cartas foliadas $\mathcal{U} := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, es un **atlas foliado** de M de dimensión p modelado transversalmente en Z si cumple:

- i) La colección $\{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de M .
- ii) Si P y Q son placas en distintas cartas de \mathcal{U} entonces $P \cap Q$ es abierto en ambos P y Q ; en este caso decimos que las cartas están **coherentemente**

foliadas.

Una **hoja** del atlas foliado \mathcal{U} se define de manera análoga a una hoja de una foliación, i.e. una componente conexa por caminos de placas.

Una función $f : U \subset Z \times \mathbb{R}^p \rightarrow W \times \mathbb{R}^q$, donde W es un espacio topológico, se dice de **clase** C^r si es localmente de la forma $f(x, z) = (f_1(z, x), f_2(z))$ con f_2 continua y $f_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ es de clase C^r i.e. todas las derivadas parciales de orden menor o igual a r de las funciones $\pi_i \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en U , donde π_i es la proyección de \mathbb{R}^q a \mathbb{R} , para $i = 1, 2, \dots, q$.

Decimos entonces que un atlas foliado es de **clase** C^r si los cambios de coordenadas son funciones de clase C^r .

Definimos un atlas foliado $\mathcal{U} := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ como **regular** si cumple:

- i) Para cada $i \in I$, el conjunto $\overline{U_i}$ es un subconjunto compacto de una carta foliada (U_j, ψ_j) y $\varphi_i = \psi_j|_{U_i}$.
- ii) La cubierta $\{U_i\}_{i \in I}$ es localmente finita.
- iii) El interior de toda placa de $\overline{U_i}$ interseca a lo más una placa de $\overline{U_j}$.

En [CC, p. 278-279] se demuestra que todo atlas foliado posee un refinamiento coherente que es regular y que tienen el mismo conjunto de hojas, eso nos permite definir un espacio foliado como sigue.

Definición B.1.1

Un **espacio foliado** p -dimensional de clase C^r es una pareja (M, \mathcal{F}) donde M es un espacio topológico compacto, separable y metrizable, y \mathcal{F} es una clase de coherencia de atlas foliados de clase C^r . A \mathcal{F} se le llama una **foliación** o **laminación** de dimensión p y las **hojas** de \mathcal{F} son las hojas de cualquier atlas que represente a \mathcal{F} .

Ejemplo B.1.2

Una variedad foliada (M, \mathcal{F}) de dimensión p es un espacio foliado modelado transversalmente en \mathbb{R}^q donde $p + q = \text{Dim}(M)$.

Ejemplo B.1.3

Sea $(X_i, f_{ij})_{i, j \in \mathbb{Z}^+}$ un *sistema inverso*, i.e. X_i es una variedad compacta de dimensión n y $f_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ es continua si $i \leq j$. Supongamos que cada f_{ij} es una submersión y no es un difeomorfismo, entonces definimos el *límite inverso*

$$X := \varprojlim_{i \in I} X_i \subset \prod_{i \in I} X_i =: \mathfrak{X}$$

como los elementos $x = (x)_{i \in I}$ tal que $f_{ij}(x_j) = x_i$ si $i \leq j$ con la topología relativa de \mathfrak{X} . Es posible demostrar que X tiene estructura de espacio foliado.

Ejemplo B.1.4

Las órbitas de una acción localmente libre de un grupo de Lie conexo G sobre un espacio métrico localmente compacto y separable M son la hojas de una foliación de M .

B.2. Pseudogrupo de Holonomía y Medidas Transversas Invariantes

En el caso de una variedad foliada el pseudogrupo de holonomía se define como el pseudogrupo generado por los *difeomorfismos locales* del espacio transversal. Sin embargo, en espacios foliados el espacio transversal en general es un espacio topológico sin estructura diferenciable, es por eso que el **pseudogrupo de holonomía** de un espacio foliado se define como en la definición A.1.3, reemplazando la palabra *difeomorfismo* por *homeomorfismo*. De igual manera, dado un atlas regular foliado \mathcal{U} denotamos por $\Gamma_{\mathcal{U}}$ al pseudogrupo de holonomía asociado a \mathcal{U} .

La definición de medida transversal en un espacio foliado es idéntica a la definición usual en variedades foliadas, sin embargo, a diferencia de éstas en un espacio foliado el espacio de hojas en general no es medible en ninguna manera razonable, es por eso que necesitamos definir una medida transversal invariante como sigue.

Sean \mathcal{U} y \mathcal{V} dos atlas foliados del mismo espacio foliado y denotemos por $Z_{\mathcal{U}}$ y $Z_{\mathcal{V}}$ a sus respectivos espacios transversales. Si $\mu_{\mathcal{U}}$ y $\mu_{\mathcal{V}}$ son dos medidas transversales definidas en $Z_{\mathcal{U}}$ y $Z_{\mathcal{V}}$ e invariantes bajo $\Gamma_{\mathcal{U}}$ y $\Gamma_{\mathcal{V}}$, respectivamente, decimos que son **coherentes** si coinciden en cualquier transversal contenida en la intersección de dos cartas de \mathcal{U} y \mathcal{V} .

Es posible demostrar que la relación $\mu_{\mathcal{U}}$ es **coherente** con $\mu_{\mathcal{V}}$ es una relación de equivalencia y que en este caso el conjunto de hojas que interseccionan al soporte de $\mu_{\mathcal{U}}$ es el mismo que el conjunto de hojas que interseccionan al soporte de $\mu_{\mathcal{V}}$. Así mismo, un sencillo ejercicio demuestra que una medida transversal invariante bajo $\Gamma_{\mathcal{U}}$ define una única medida coherente e invariante bajo $\Gamma_{\mathcal{V}}$ para todo atlas foliado regular $\mathcal{V} \in \mathcal{F}$. Definimos entonces una medida invariante por holonomía como sigue.

Definición B.2.1

Si (M, \mathcal{F}) es un espacio foliado, una **medida transversa invariante por holonomía** para \mathcal{F} o simplemente una **medida transversa invariante** se define como una clase de coherencia de medidas $\Gamma_{\mathcal{U}}$ -invariantes, donde \mathcal{U} corre sobre todos los atlas regulares foliados $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$. El **soporte** de μ se define como el conjunto de hojas que intersectan alguna (ergo cualquiera) medida $\mu_{\mathcal{U}}$ representante de la clase de coherencia.

Estas medidas se utilizan para integrar p -formas diferenciales definidas en las hojas de la foliación y la definición 1.1.12 de corriente asociada a una medida transversa se aplica de manera análoga como en la expresión 1.9.

B.3. Teoría de DeRham

La teoría de DeRham en espacios foliados utiliza la teoría de gavillas. Si (M, \mathcal{F}) es un espacio foliado existe una gavilla que denotaremos $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ definida por la asignación a cada punto $x \in M$ el espacio vectorial real de gérmenes en x de funciones continuas y real valuadas definidas en vecindades U de x y localmente constantes a lo largo de las hojas de $\mathcal{F}|_U$. Asociada a esta gavilla podemos construir un complejo de co-cadenas como sigue.

Consideremos la resolución

$$\mathbb{R}_{\mathcal{F}} \xhookrightarrow{\iota} \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^p$$

donde \mathcal{A}^q es la gavilla de gérmenes de formas diferenciales de grado q a lo largo de las hojas para $q = 0, 1, \dots, p$, ι es la inclusión de las funciones continuas constantes a lo largo de las hojas dentro de las funciones continuas que son suaves a lo largo de las hojas y d es la derivada exterior. Es fácil verificar que esta sucesión es exacta.

Tenemos entonces una sucesión inducida en el espacio de secciones continuas

$$\Gamma \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \xhookrightarrow{\iota} \Gamma \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d} \Gamma \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Gamma \mathcal{A}^p \rightarrow 0.$$

Esta sucesión es un complejo de co-cadenas de espacios vectoriales topológicos reales. Los grupos de cohomología $H^p(M; \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ que queríamos definir son los grupos de cohomología de este complejo, i.e.

$$H^q(M; \mathbb{R}_{\mathcal{F}}) := \text{Ker}(d : \Gamma \mathcal{A}^q \rightarrow \Gamma \mathcal{A}^{q+1}) / d\mathcal{A}^{q-1},$$

para $q = 0, 1, \dots, p$ con $\mathcal{A}^{-1} = 0$.

El espacio $\Gamma\mathcal{A}^q$ está naturalmente identificado con el espacio $\Omega^q(M)$ de q -formas continuas, suaves a lo largo de las hojas en M por lo que esta cohomología es la generalización natural de la cohomología de DeRham. La cohomología con soporte compacto se define de manera similar tomando secciones con soporte compacto en estas gavillas. La teoría de corrientes y de ciclos foliados se generaliza utilizando las mismas definiciones que en la sección uno de la topología sobre Ω^p y del operador adjunto a la derivada exterior ∂ .

丁

BIBLIOGRAFÍA

- [A] ALBARRÁN, J. *A Guide to the Ergodic Decomposition Theorem: Ergodic Measures as Extreme Points*. Notas, 2004. Disponibles en: <http://www.cimat.mx/~albarran/documentos/ergodicdesc.pdf>
- [B] BOURBAKI, N. *Éléments de Mathématique, Livre VI*. Hermann, Paris, 1959.
- [CL] CAMACHO, C. y LINS NETO, A. *Teoria Geométrica das Folheações*. Projeto Euclides, IMPA. Rio de Janeiro, 1978.
- [CC] CANDEL, A. y CONLON, L. *Foliations I*. American Mathematical Society. EUA, 2000.
- [CMP] CONTRERAS, G., MACARINI, L. y PATERNAIN, G. *Periodic Orbits for Exact Magnetic Flows on Surfaces*. Int. Math. Res. Not. **8** (2004), 361-387.
- [CFS] CORNFELD-FOMIN-SINAI. *Ergodic Theory*. Springer. New York, 1982.
- [D] DEMAILLY, J.P. *Complex Analytic and Differential Geometry*. Université de Grenoble I. Saint-Martin d'Hères, France. Preprint. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.ps.gz>
- [DR] DERHAM, G. *Variétés différentiables. Formes, courantes, formes harmoniques*. Herman. Paris, 1955.
- [Do] DO CARMO, P. *Riemannian Geometry*. Brikhäuser. Boston, 1992.
- [FW] J. FRANKS y R. WILLIAMS *Anomalous Anosov Flows*. Lect. Not. in Math. 819. Springer 1980.

- [F] FRIED, D. *The geometry of cross sections to flows*. *Topology* **21** (1982), 353-371.
- [Ga] GARNETT, L. *Foliations and measures harmonic along the leaves of a foliation and the ergodic theorem*. Tesis, I.H.E.S. Bures-sûr-Yvette, 1980.
- [Gh] GHYS, E. *Codimension One Anosov Flows and Suspensions* Lect. Not. in Math. 1331. Springer 1989, p. 59-72.
- [Gh1] GHYS, E. *Laminations par Surfaces de Riemann*. *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, ix, xi, 49-95. Panor. Synthèses **8**, Soc. Math. France. Paris, 1999.
- [G] GODBILLON, C. *Feuilletages. Études géométriques*. Birkhäuser. Basel, 1991.
- [G-M] GÓMEZ-MONT, X. *El Flujo Geodésico: La Frida Kahlo de las matemáticas*. Aportaciones Matemáticas. SMM. Comunicaciones **21** (1998), 121-142.
- [GP] GOODMAN, S.E. y PLANTE, J. *Holonomy and averaging in foliated sets*. *J. Diff. Geo.* **14** (1979), 401-407.
- [GuPo] GUILLEMIN, V. y POLLACK, A. *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [H] HAEFLIGER, A. *Travaux de Novikov sur les feuilletages*. Séminaire Bourbaki, exposé 339, 1968.
- [K] KANTOROVITZ, S. *Introduction to Modern Analysis*. Oxford University Press, 2003.
- [KH] KATOK, A. y HASSELBLATT, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [L] LEBEAU, G. *Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Cours de L'Ecole Polytechnique. Palaiseau. France, 2001.
- [M] MAÑÉ, R. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer Verlag. Heidelberg, 1987.
- [Mc] MCDUFF, D. *Applications of convex integration to symplectic and contact geometry*. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **37** (1982), no.1, 107-133.
- [Mi] MILNOR, J. *A note on curvature and the fundamental group*. *J. Diff. Geo.*, **2** (1968), 1-7.

- [N] NOVIKOV, S. *The topology of foliations*. Trans. Moscow Math. Soc. **14** (1965), 268-305.
- [P] PLANTE, J. *Foliations with measure preserving holonomy*. Ann. Math. **102** (1975), 327-362.
- [P1] PLANTE, J. *Asymptotic properties of foliations*. Comment Math. Helv. **47** (1972), 449-456.
- [P2] PLANTE, J. *On the Existence of Exceptional Minimal Sets in Foliations of Codimension One*. J. Diff. Eq. **15** (1974), 178-194.
- [P3] PLANTE, J. *Anosov flows, transversely affine foliations and a conjecture of Verjovsky*. J. London Math. Soc. **2** (1981), 359-362.
- [Po] POINCARÉ, H. *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. Acta Mathematica **13** (1890), 1-270.
- [RS] RUELLE, D. y SULLIVAN, D. *Currents, flows and diffeomorphisms*. Topology **14** (1975), 319-327.
- [S] SCÁRDUA, B. *Sobre a teoria global das folheações holomorfas*. No. **3**, Monografías. Seminario Iberoamericano de Matemáticas. Tordesillas, 2003.
- [Sc] SCHWARTZ, L. *Théorie des distributions*. Vols I, II. Hermann. Paris, 1951.
- [Sch] SCHWARTZMANN, S. *Asymptotic cycles*. Ann. of Math. **66** (1957), 270-284.
- [Si] SIMIĆ, S. *Codimension one Anosov flows and a conjecture of Verjovsky*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. **17**, (1997), 1211-1231.
- [Sul] SULLIVAN, D. *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds*. Inv.Math. **36** (1976), 225-255.
- [SW] SULLIVAN, D. y WILLIAMS, R. *On the Homology of Attractors*. Topology **15** (1976), 259-262.
- [V] VERJOVSKY, A. *Codimension one Anosov Flows*. Bol. Soc. Math. Mex. **19** (1974), 49-77.
- [V1] VERJOVSKY, A. *Sistemas de Anosov*. Monografías del Inst. de Mat. y Ciencias Afines **9**. IMCA. Lima, 1999.
- [VH] VITERBO, C. y HOFER, H. *The Weinstein conjecture in the presence of holomorphic spheres*. Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), no. 5, 583-622.

-
- [We] WEINSTEIN, A. *On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems*. J. Diff. Eq. **33** (1979), 353-358.
- [W] WHITNEY, H. *Geometric Integration Theory*. Princeton Univ. Press, 1957.

ÍNDICE DE FIGURAS

1.	Una hoja (o una órbita) de una foliación de dimensión uno en el toro (flujo racional del toro).	1
2.	La foliación de Reeb en el toro sólido y un corte transversal de ésta.	2
3.	La manera en que el cono de corrientes foliadas $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ intersecta a los espacios de p -formas cerradas y exactas nos da información sobre la existencia de medidas transversas invariantes y formas positivas en la dirección de la foliación.	4
4.	Los ciclos foliados tienen una estrecha relación con el crecimiento de las hojas. El plano hiperbólico es “no cerrado en el ∞ ”, por lo que tiene crecimiento exponencial.	5
5.	Los ciclos foliados sirven para determinar la existencia de secciones transversas globales a un flujo. En la figura Σ es una sección transversa global al flujo φ_t	7
1.1.	Carta foliada U_α de \mathcal{F} . La línea izquierda representa al espacio transverso T_α , mientras que $\pi_\alpha^{-1}(x)$ representa la placa de \mathcal{F} que pasa por el punto $x \in T_\alpha$	14
1.2.	Esquematación del rayo en $\Lambda^p(T_x M)$ formado por los vectores de $\Lambda^p(T_x L)$ que preservan la orientación.	19
1.3.	Una forma transversa ω hace a $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ un cono compacto convexo.	24
1.4.	Caso en el que existe una p -forma exacta que es transversal a \mathcal{F}	26
1.5.	Caso en el que existe una p -forma cerrada y no exacta que es transversal a \mathcal{F}	27
1.6.	Caso en el que no existen p -formas cerradas transversales a \mathcal{F}	28
1.7.	Carta foliada compacta B	31
2.1.	Elementos de $\Omega_{p,q}$	42
2.2.	La r -bola métrica $D_x(r)$	43
2.3.	En una variedad riemanniana compacta dos métricas son siempre casi isométricas.	44
2.4.	El disco de Poincaré tiene crecimiento exponencial, mientras que el plano con la métrica euclidiana tiene crecimiento cuadrático.	45
2.5.	El plano hiperbólico es no cerrado en el infinito, mientras que el plano euclidiano sí lo es.	51

2.6.	La aplicación de Poincaré: Σ es una sección transversal al flujo ϕ (ver definición 3.4.1), el punto x^* es un punto periódico por lo que es fijo bajo la aplicación de Poincaré.	55
2.7.	Ciclo \mathcal{F} -homólogo a cero.	57
2.8.	Ciclo Evanesciente. El ciclo C_1 es \mathcal{F} -homólogo a cero, mientras que C_0 no lo es.	58
2.9.	El número de cajas de flujo necesarias para curbir a W , contándolas con repeticiones, es no acotado.	59
3.1.	T es una vecindad tubular de la variedad N	62
3.2.	Demostración de la Proposición 3.1.3: la carta U tiene diámetro uno y contiene a una infinidad de puntos $x_j \in L$	64
3.3.	Demostración de la Proposición 3.1.4: La hoja L corta dos veces a la caja de flujo B . El difeomorfismo ψ envía la caja de flujo al hipercubo $[-1, 1] \times [-1, 1]^{n-1}$	65
3.4.	Una “órbita larga casi-cerrada” Γ_k se define al cerrar la trayectoria de x desde tiempo cero hasta tiempo t_k con una curva γ_k contenida en una caja de flujo B	72
3.5.	Ejemplo 3.3.13: la órbita del punto (x, y) es una línea en el toro con pendiente λ	74
3.6.	La curva Σ es una transversal total al flujo ϕ_t definido en el ejemplo 3.3.13.	77
A.1.	Definición de la foliación estable del flujo geodésico.	90

ÍNDICE ALFABÉTICO

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 11
- C_{X, ν_C} , **23**, 69
- C_{v_x} , 19
- $E^s \oplus E^u$, 80
- E^s, E^u , 80
- $P(\mathcal{F})$, 55
- $\Lambda^p(T_x M), \Lambda^p(T_x L)$, 19
- $\Omega^p(M), \Omega^{p,k}(M)$, 10
- $\mathcal{E}_p, \mathcal{E}_p^k$, 11
- $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$, 80
- \mathcal{F}^{su} , 80
- \mathcal{T}' , 15
- $\mathcal{T}, \mathcal{T}^k$, 10
- \mathcal{D}_p'' , 15
- $\mathcal{D}_p(K), \mathcal{D}_p$, 11
- $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$, 81
- ν_C , 22
- ∂, ∂_p (sobre variedades), 46
- ∂, ∂_p (sobre corrientes), 16
- e , 15
- acotado
 - en \mathcal{D}_p , 11
 - en \mathcal{D}_p' , 15
- Anosov
 - flujo de, 80
 - flujo de
 - codimensión uno, 81
 - flujos de, 79
 - flujos de , 82
- bola
 - métrica, 42
- casi isométricas, 43
- casi isometría, 43
- cerrada en el ∞ , 50
- ciclo
 - \mathcal{F} -homólogo a cero, 57
 - evanescente, 58
 - foliado
 - aproximación por direcciones en homología, 73
- ciclos
 - asintóticos, 35
 - foliados, 20
 - equivalencia con las medidas transversas, 30
 - intersección de, 63
- contacto
 - flujos de , 82–85
 - forma de, 84
 - tipo, 84
- corriente
 - asociada a una medida transversa invariante, 14

- de Dirac, 12
- de integración, 13
- difusa, 13
- orden de una, 11
- singular, 13
- soporte de una, 30
- corrientes, 10–18
 - cerradas, 16
 - de Dirac, 19
 - espacio de, 12
 - espacio dual, 15
 - exactas, 16
 - foliadas, 20
 - equivalencia con medidas acotadas y no negativas, 23
- crecimiento
 - exponencial, 41
 - en foliaciones, 46
 - función de
 - en un pseudogrupo, 47
 - en una variedad riemanniana, 43
 - mismo tipo de, 40
 - polinomial, 40
 - subexponencial, 41
 - en foliaciones, 46
 - tipo de
 - para un pseudogrupo, 47
 - para una función, 40
 - para una variedad riemanniana, 44
- derivada exterior, 11
 - operador adjunto, 16
- dirección en homología, 72
- distribuciones, 10
- domina
 - G domina a H , 40
 - estrictamente, 40
- espacio
 - corrientes, *véase* corrientes, espacio de
 - dual del espacio de corrientes, *véase* corrientes, espacio dual
 - foliado, *véase* foliado, espacio montel, 16
 - transverso, 88
- flujo de Anosov, *véase* Anosov, flujo de
- flujos
 - de contacto, *véase* contacto, flujos de
 - de Anosov, *véase* Anosov, flujos de foliadas
 - fronteras, *véase* fronteras foliadas
 - foliado
 - espacio, 37, **94**
 - pseudogrupo de holonomía, 95
 - medida transversa invariante, 96
 - foliados
 - ciclos, *véase* ciclos, foliados
- forma relativa, 37
- forma transversal, 19
- fronteras foliadas, 20
- holonomía
 - grupo de, **57**
- holonomía
 - pseudogrupo de, 14, **89**
- homología
 - dirección en, *véase* dirección en homología
- homología de DeRham, 16
- métrica riemanniana a lo largo de las hojas, 46
- medida
 - ϕ -invariante, 69
 - ergódica, 69
 - transversa invariante, 14, **89**
 - soporte de una, 89
- Montel, *véase* espacio, montel

- no cerrada en el ∞ , 50
- Novikov
 - teorema de, 67
- Poincaré
 - mapeo del primer retorno de, 77
 - recurrencia
 - conjunto de, *véase* recurrencia
 - recurrencia de, *véase* recurrencia
 - teorema de, 54
- punto regular, 42
- recurrencia, 54–56
 - conjunto de, 55
- sección transversa global, 77
 - equivalencias que implican su existencia, 79
- secuencia promediante, 48
- simpléctica
 - forma, 84
 - variedad, 84
- soporte
 - de una corriente, *véase* corriente, soporte de una
 - de una medida transversa, *véase* medida, transversa, soporte de una
- Teorema de la Variedad Estable para flujos de Anosov, 81
- teorema ergódico, 70
- transversal
 - total, *véase* sección transversa global
- Verjovsky
 - conjetura de, 82