

**TERCER EXAMEN PARCIAL DE
MATEMÁTICAS ELEMENTALES
Y ELEMENTOS DE GEOMETRÍA**

26 de noviembre de 2005

Indicaciones

Calificar cada afirmación como *falsa* o *verdadera* poniendo una F o una V , según sea el caso, a la izquierda del número de la pregunta correspondiente en la hoja de preguntas. Si la afirmación se califica como verdadera, incluir en las hojas de respuestas una explicación breve que haga evidente la veracidad de la afirmación (no se requiere una demostración detallada, pero sí debe haber explicaciones o razones plausibles; se vale usar cualquier resultado que conozcan sin necesidad de demostrarlo). Si la afirmación se califica como falsa, basta dar (en las hojas de respuestas) un contraejemplo sin mayores explicaciones. **Nota:** La explicación o el contraejemplo, cuando son correctos, contribuyen con $2/3$ partes para la calificación de cada afirmación.

1. Un espacio vectorial siempre tiene dimensión mayor que cualquiera de sus subespacios
2. El anillo $\mathbb{F}[x]$ de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes en el campo $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.
3. El anillo $\mathbb{F}[x]$ de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes en el campo $\mathbb{F}$ tiene dimensión infinita.
4. El conjunto $\mathbb{F}^{(n)}[x]$ de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes en el campo $\mathbb{F}$ y que tienen grado menor o igual que n es un subanillo de $\mathbb{F}[x]$.
5. El conjunto $\mathbb{F}^{(n)}[x]$ de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes en el campo $\mathbb{F}$ y que tienen grado menor o igual que n es un ideal de $\mathbb{F}[x]$.
6. El conjunto $\mathbb{F}^{(n)}[x]$ de los polinomios en la indeterminada x con coeficientes en el campo $\mathbb{F}$ y que tienen grado menor o igual que n es un subespacio vectorial de $\mathbb{F}[x]$.
7. Si V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y V tiene dimensión finita n , entonces V es isomorfo a $\mathbb{F}^n$.
8. Si V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y V tiene dimensión finita n , entonces $\text{End}(V)$ está en correspondencia biyectiva con $V^n = V \times \cdots \times V$ (n factores).
9. Si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal entre dos espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$ y T es invertible, entonces no necesariamente es cierto que $T^{-1} : W \rightarrow V$ es lineal.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

10. Toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.
11. El subconjunto $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 + 3\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.
12. La intersección de todos los subespacios unidimensionales de $\mathbb{R}^2$ es únicamente el origen.
13. La intersección de cualesquiera dos subespacios unidimensionales de $\mathbb{R}^2$ es únicamente el origen.
14. Si u y v son dos vectores de $\mathbb{C}^2$ tales que $u \neq v$, entonces u y v son linealmente independientes.
15. Si u y v son dos vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $u \cdot v = 0$ (producto punto), entonces $u = 0$ o $v = 0$.
16. Si u y v son dos vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $u \times v = 0$ (producto cruz), entonces u y v son linealmente dependientes.
17. Considerar el conjunto $\mathbb{H}$ de todos los cuaternios. Sea $a = a_0 1_{\mathbb{H}} + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y sea $\bar{a} = a_0 1_{\mathbb{H}} - a_1 i - a_2 j - a_3 k$. Entonces, $a \bar{a} = ((a_0)^2 + (a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2) 1_{\mathbb{H}} = \bar{a} a$.
18. Sean $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y $b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ dos cuaternios unitarios (ya no escribimos $1_{\mathbb{H}}$ por razones obvias). El producto ab es nuevamente un cuaternio unitario.
19. Sean $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y $b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ dos cuaternios unitarios. El producto ab es igual a ba .
20. El conjunto $\mathbb{H}$ de los cuaternios es un espacio vectorial sobre el campo de los números complejos $\mathbb{C}$.
21. El conjunto $\mathbb{H}$ de los cuaternios es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$.
22. El conjunto $\text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ de las transformaciones lineales $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (cuando $\mathbb{C}$ se considera un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$), es un anillo isomorfo a $\mathbb{C}$.
23. El conjunto $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ de las transformaciones lineales $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (cuando $\mathbb{C}$ se considera un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$), es un anillo isomorfo a $\mathbb{C}$.
24. Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros. Si $a|b$ y $b|c$ entonces $a|c$.
25. Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros. Si $a|c$ y $b|c$ entonces $a|b$.
26. Sea $\mathbb{Z}$ el anillo de los números enteros. Si $a|c$ y $b|c$ entonces $a|b$ o $b|a$.
27. Sean $I_1 \subset \mathbb{Z}$ e $I_2 \subset \mathbb{Z}$ dos ideales. Entonces $I_1 + I_2 := \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in I_1 \text{ y } a_2 \in I_2\} \subset \mathbb{Z}$ es un ideal.
28. Sean $I_1 \subset \mathbb{Z}$ e $I_2 \subset \mathbb{Z}$ dos ideales. Entonces $I_1 \cap I_2 \subset \mathbb{Z}$ es un ideal.
29. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. El anillo $\text{End}(V)$ es conmutativo.
30. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. En el anillo $\text{End}(V)$, nunca puede suceder que $S \circ T = 0$ con $S \neq 0$ y $T \neq 0$.