EXAMEN FINAL
ELEMENTOS DE GEOMETRÍA Y MATEMÁTICAS ELEMENTALES

4 de diciembre del año 2004

ADVERTENCIA. Como el examen parcial número 2, este examen parece largo pero en realidad no lo es. La primera sugerencia para no perder tiempo es que no copien nada de lo que ya está aquí escrito. Anoten en sus hojas de repsuestas, sólo las respuestas (debidamente numeradas y organizadas). La segunda sugerencia es que para responder a algunas preguntas, pueden usar libremente los resultados de otros problemas. Observar que el examen está dividido en cinco series de preguntas y que el número de preguntas en cada serie es par. En las series 1, 2, 3 y 4 hay que responder a exactamente la mitad de preguntas más uno. La serie 5 hay que responderla completamente. Por favor, en las series 1, 2, 3 y 4 no respondan a más preguntas de las que se piden porque, por un lado, no queremos que pierdan tiempo, y por otro, no queremos confundirnos a la hora de calificar teniendo que hacer decisiones difíciles sobre qué problemas considerar para la calificación global del examen. El tiempo máximo para responder es de 4.5 horas. ¡Buena suerte! You can make it good!

1.a Sean A y B dos conjuntos. Dar la definición de función $f : A \to B$.

$*$ Sea $f = \{\, (a, b) \mid a \in A \quad \text{y} \quad b \in B \,\}$ una función.

1.b Con la notación de pares ordenados, '$(a, b) \in f$' ¿Qué quiere decir que f sea inyectiva?

1.c ¿Cómo se escribe lo mismo empleando la notación '$b = f(a) \iff (a, b) \in f$'?

1.d Usando la notación que se prefiera, ¿qué quiere decir que f sea suprayectiva?

$*$ Suponer que $f = \{\, (a, b) \mid a \in A \quad \text{y} \quad b \in B \,\}$ es tanto inyectiva como suprayectiva y considerar el conjunto $\bar{f} = \{\, (b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in f \,\}$:

1.e Demostrar que $\bar{f}$ es función

1.f Demostrar que $\overline{\bar{f} \circ f = \mathrm{id}_A \text{ y } f \circ \bar{f}} = \mathrm{id}_B$.

2.a ¿Qué dice el Principio de Inducción Matemática?

2.b ¿Qué dice el Principio del Buen Orden?

$*$ Sea X un conjunto arbitrario y considerar el grupo

$$S(X) = \{ f \in X^X \mid \exists\ \bar{f} \text{ tal que } f \circ \bar{f} = \mathrm{id}_X = \bar{f} \circ f \,\}\,.$$

$*$ Definir: $f^1 := f$ y, para $m \in \mathbb{N}$ con $m > 1$, $f^{m+1} := f^m \circ f$.
$*$ Definir también: $f^0 := \mathrm{id}_X$, y $f^{-1} := f$ y, para $m \in \mathbb{N}$ $f^{-m} := f^m$.

2.c Demostrar por inducción que para todos m y n en el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, $f^m \circ f^n = f^{m+n}$.

2.d Demostrar por inducción que para todos m y n en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, $f^m \circ f^n = f^{m+n}$.

2.e dar un argumento sencillo de por qué, si X es un conjunto finito, entonces el conjunto $S(X)$ debe ser finito.

2.f Suponiendo que X sea un conjunto finito, demostrar que para cada $f \in S(X)$ existe un número natural n_f, tal que $f^{n_f} = \mathrm{id}_X$.

3.a Dar la definición de grupo.

3.b ¿Qué quiere decir que $H \subset G$ es un *subgrupo* de G?

3.c Si G y G' son dos grupos, ¿Qué quiere decir que $f : G \to G'$ sea un *morfismo de grupos*?

$*$ Sean G y G' dos grupos. Suponer que $f : G \to G'$ es un morfismo de grupos. Sean e y e' los elementos neutros de G y G', respectivamente.

3.d Demostrar que $f(e) = e'$.

3.e Demostrar que para cada $a \in G$, $f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$, siendo $\overline{a}$ el elemento inverso de a en G y $\overline{f(a)}$ el elemento inverso $f(a)$ en G'.

3.f Sea $K = \{a \in G \mid f(a) = e'\}$. Demostrar que $K \subset G$ es un subgrupo.

4.a Dar la definición de anillo.

4.b ¿Cuándo se dice que un anillo es *conmutativo*?

4.c Si R es un anillo *conmutativo*, ¿qué quiere decir que $I \subset R$ sea un ideal?

$*$ Sean R y R' dos anillos. Suponer que $f : R \to R'$ es un morfismo de anillos. Sean $\theta \in R$ y $\theta' \in R'$ los elementos neutros de las operaciones que hacen grupos abelianos a R y R', respectivamente y sean u y u' los elementos neutros de las operaciones de '*multiplicación*' definidas en R y R', respectivamente.

4.d Sea $I_f = \{i \in R \mid f(i) = \theta'\}$. Demostrar que $I_f \subset R$ es un ideal.

4.e Demostrar que si R es un campo, entonces sus únicos ideales posibles son $I = R$ o $I = \{\theta\}$.

4.h Demostrar que si R es un anillo para el cual los únicos ideales posibles son $I = R$ e $I = \{\theta\}$, entonces R es un campo.

5.a Dar la definición de espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

5.b ¿Qué quiere decir que $W \subset V$ es un *subespacio* de V?

$*$ Sea $V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ con su estructura usual de espacio vectorial y $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

5.c ¿Es el subconjunto W un subespacio de $\mathbb{R}^3$? ¿Por qué?

$*$ Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{F}$. Suponer que $f : V \to V'$ es un morfismo de espacios vectoriales. Sean θ y θ' los elementos neutros de V y V', respectivamente.

5.d Sea $K = \{v \in V \mid f(v) = \theta'\}$. Demostrar que $K \subset V$ es un subespacio.

5.e Demostrar que para todo $c \in \mathbb{F}$, $c\,\theta = \theta$.

5.f Demostrar que si $c \in \mathbb{F}$ y $u \in V$ satisfacen la ecuación $c\,u = \theta$, entonces $c = 0$, o $u = \theta$.

$*$ En $\mathbb{R}^2$, los vectores $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2)$ son ortogonales si su producto punto $u \cdot v$ es cero; esto es, si $x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$.

5.g Enunciar las propiedades del producto punto (¡no hay que demostrarlas!).

5.h Dado un vector no nulo en $\mathbb{R}^2$, ¿cuántos vectores no nulos perpendiculares a él puede haber?

5.i Demostrar en $\mathbb{R}^2$ que: si u y v son dos vectores no nulos ortogonales, entonces son linealmente independientes.

5.j Dar un ejemplo de dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^2$ que sin ser ortogonales, sean linealmente independientes.

5.k Dado un vector no nulo en $\mathbb{R}^2$, ¿cuántos vectores no nulos linealmente independientes a él puede haber? (La respuesta puede darse en los siguientes términos: "Tantos como vectores hay en el subconjunto X de $\mathbb{R}^2$, siendo X ...." y X puede describirse con palabras, o bien, se puede hacer un dibujo en $\mathbb{R}^2$ donde quede perfectamente indicado cuál es el conjunto X).

5.l Sean v_1 y v_2 dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$. Argumentar por qué el conjunto de todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está en correspondencia biyectiva con $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

PRIMER EXAMEN PARCIAL
ÁLGEBRA LINEAL I

2 de marzo del año 2005

RECOMENDACIONES. Según acordamos, el examen podrá aplicarse esta tarde; en principio, a las 4PM —a no ser que **todos** puedan comenzar antes y hayan acordado a la hora de la clase de hoy comenzar el examen antes. Tienen un máximo de 4 horas para resolver el examen. Como siempre, se recomienda no copiar las preguntas, escribir directamente las respuestas en hojas debidamente numeradas comenzar por contestar lo que les resulte más sencillo. Se vale usar todos los resultados que conozcan sin tener que demostrarlos; la condición es usarlos bien. En todos los casos, la multiplicación en $\mathbb{F}$ es conmutativa.

1. ¿Qué quiere decir que $W \subset V$ es un *subespacio* de V? (¡Cuidado! Quizá valga la pena pensar primero en la respuesta del siguiente problema y después considerar éste nuevamente.)

2. Dar un criterio sencillo para determinar cuándo un subconjunto W de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$ es un subespacio de V.

$*$ Sea $V = \mathbb{R}^3$ y $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

3. ¿Es el subconjunto W un subespacio de $\mathbb{R}^3$? ¿Por qué?

4. ¿Qué quiere decir que un subconjunto $S \subset V$ sea una base de V?

* Sea $\mathbb{F}[x]$ el anillo de polinomios en la indeterminada x con coeficientes en el campo $\mathbb{F}$.

5. Demostrar que $\mathbb{F}[x]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

6. Demostrar que $\mathbb{F}[x]$ tiene dimensión infinita. (Nota: si la demostración no está saliendo fácilmente en un máximo de tres o cuatro líneas es que muy probablemente ya va mal y no valdrá la pena invertirle mucho tiempo).

* Sean u v dos vectores de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ que son linealmente independientes.

7. Demostrar que los vectores $p = u + v$ y $q = u - v$ también son linealmente independientes.

8. En el contexto del problema anterior, demostrar que los vectores u y v generan el mismo subespacio de V que el que generan p y q.

9. En el contexto del problema anterior, demostrar que el subespacio generado por $r = au + cv$ y $s = bu + dv$ (con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) es el mismo que el generado por u y v, si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

10. En el contexto de los problemas anteriores, suponer que $V = \mathbb{R}^4$ y que $u = (1,1,1,1)$, mientras que $v = (-1,1,1,-1)$. Completar el conjunto $\{u, v\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

11. Sean u_1 y u_2 dos vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^2$. Argumentar por qué el conjunto de todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está en correspondencia biyectiva con $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

12. Sea $V = \mathbb{C}$ y considerarlo como un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Describir el conjunto de todas las transformaciones lineales $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

13. En el contexto del problema anterior, considerar a $V = \mathbb{C}$ como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Describir el conjunto de todas las transformaciones lineales $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Sugerencia: se vale emplear —sin demostración— cualquier resultado que conozcan sobre el conjunto de transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$.

14. En el contexto de los dos problemas anteriores, dar un ejemplo de una función $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que sea lineal sobre $\mathbb{R}$, pero no sea lineal sobre $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

* Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(u_1) = u_1 + u_2 + u_3$, $T(u_2) = u_2 - u_3$ y $T(u_3) = u_2 + u_3$, siendo $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Sea $p(x) = (x-3)^2 \in \mathbb{R}[x]$.

15. ¿Qué sentido tiene calcular $p(T)$? (es decir, ¿$p(T)$ es un elemento de qué espacio vectorial, o de qué anillo?)

16. Calcular $p(T)$. Es decir, decir qué vectores son $p(T)(u_1)$, $p(T)(u_2)$ y $p(T)(u_3)$.

Examen Final de Álgebra Lineal I

3 de junio, 2005

1. Enunciar cuidadosamente el resultado fundamental en el que, para un espacio vectorial V de dimensión n sobre un campo $\mathbb{F}$, se establecen biyecciones entre, ...

2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Escribir la definición de lo que es un producto escalar en V. Si el campo es $\mathbb{R}$, ¿qué quiere decir que el producto escalar sea positivo definido?

3. Suponer que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n, que tiene definido un producto escalar positivo definido. ¿Cómo se define el grupo $O(V) \subset \mathrm{GL}(V)$ que preserva el producto escalar?

4. Enunciar cuidadosamente el resultado fundamental en el que, para un espacio vectorial V de dimensión n sobre el campo real $\mathbb{R}$ equipado con un producto escalar positivo definido, se establecen biyecciones entre, ...

5. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y sean u_1, u_2 y u_3 tres vectores linealmente independientes. Suponer que V tiene definido un producto escalar positivo definido. Dar una transformación lineal $T : V \to V$ tal que los vectores $e_1 = T(u_1)$, $e_2 = T(u_2)$ y $e_3 = T(u_3)$, formen una base ortonormal y encontrar la matriz de la transformación lineal T en términos de esta base ortonormal.

6. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de un espacio vectorial real V con producto escalar positivo definido. Sea $B \in \mathrm{Bil}(V)$ una forma bilineal arbitraria. Demostrar que la suma $\sum_i B(e_i, \cdot\,)\, e_i$ no depende de la base ortonormal; *ie,* que para cualquier otra base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$, $\sum_i B(u_i, \cdot\,)\, u_i = \sum_i B(e_i, \cdot\,)\, e_i$.

7. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y sea $W \subset V$ un subespacio. ¿Cómo se define el espacio vectorial cociente V/W? (Nota: Hay que decir cómo son los elementos del conjunto V/W y cómo se definen las operaciones. También hay que decir, por lo menos, qué habría que demostrar para hacer ver que dichas operaciones están bien definidas).

8. En el contexto del inciso anterior, suponer que $U \subset V$ es un subespacio tal que $V = U \oplus W$. Demostrar, usando las definiciones de cociente y suma directa, que V/W es isomorfo a U.

9. En el contexto del inciso anterior, suponer que los espacios vectoriales U y W son de dimensión finita y sean $\{u_1, \dots, u_m\}$ y $\{w_1, \dots, w_m\}$ bases de U y W respectivamente. Suponer que nos han dado tres transformaciones lineales $A \in \mathrm{End}(U)$, $D \in \mathrm{End}(W)$ y $C \in \mathrm{Hom}(U, W)$, en términos de las cuales se define $T : V \to V$ mediante $T(u+w) = A(u) + C(u) + D(w)$. Demostrar que $T \in \mathrm{End}(V)$ y que $\det(T) = \det(A)\det(D)$.

10. Considerar el espacio vectorial $V = C^\infty(\mathbb{R})$ de todas las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ y considerar el subespacio U generado por $\{\cos(\,\cdot\,), \cos 2(\,\cdot\,), \mathrm{sen}(\,\cdot\,), \mathrm{sen} 2(\,\cdot\,)\}$. Considerar $\partial : U \to U$ definido por $\partial(f) = f'$. Demostrar que $\partial \in \mathrm{End}(U)$. Calcular la matriz de ∂ con respecto a la base dada. Calcular $\det(\partial)$ (de primeros principios, usando $\Lambda(U)$). Si $p = x^4 + 5x^2 + 2 \in \mathbb{R}[x]$, calcular $p(\partial) \in \mathrm{End}(U)$.

11. **Para casa:** Suponer como en el inciso 8 que $V = U \oplus W$. Demostrar con todo detalle que existe una correspondencia biyectiva entre $\mathrm{End}(V)$ y $\mathrm{End}(U) \oplus \mathrm{End}(W) \oplus \mathrm{Hom}(U, W) \oplus \mathrm{Hom}(W, V)$. Escribir convenientemente esta correspondencia en la forma,

$$T \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

En términos de esta correspondencia, ¿Cómo son las transformaciones lineales $T \in \mathrm{End}(V)$ tales que $U \subset \operatorname{Ker} T$? ¿Cómo son las que $\operatorname{Im} T \subset U$? ¿Cómo son las que $W \subset \operatorname{Ker} T$? ¿Cómo son las que $\operatorname{Im} T \subset W$? ?Qué se necesita para que $U = \operatorname{Ker} T$? y ¿para que $\operatorname{Im} T = U$? Calcular la composición de dos transformaciones lineales T y T' de $\mathrm{End}(V)$ en términos de los datos A, B, C, D y A', B', C', D'.