
Algunas paradojas de la teoría (intuitiva) de conjuntos.

JORGE ALBARRÁN Y ANA GARCÍA

13 de septiembre de 2005

El objetivo de esta clase es ver que la definición de conjunto que aprendimos en la primaria es deficiente para fines lógicos.

La definición de conjunto que la mayoría de la gente conoce es: *un conjunto es una colección de objetos*. De esto tenemos los clásicos ejemplos: *el conjunto de las bancas del salón, el conjunto de los perros, el conjunto de los gatos, el conjunto de las manzanas*, y demás ilustrativos ejemplos que no incluyo por falta de tiempo, pero en resumen, cualesquiera objetos que se nos ocurran podemos “meterlos en una bolsa” y la bolsa con los objetos es un conjunto.

En particular, un conjunto puede contener otros conjuntos, por ejemplo

$$A = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3, \dots\}\}.$$

Ejercicio 1 Dado un conjunto A cuyos elementos son conjuntos definimos dos nuevos conjuntos, llamados la **unión** y la **intersección** de A , respectivamente, por

$$\bigcup A := \{x \mid x \in C, \text{ para algún } C \in A\} \quad \text{y} \quad \bigcap A := \{x \mid x \in C, \forall C \in A\}.$$

Encuentre $\bigcap A$ y $\bigcup A$, en los casos siguientes:

- i) $A := \{\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}\}$
- ii) $A := \{\{x \mid \sin(x) = 0\}, \{x \mid \cos(x) = 0\}\}$
- iii) $A := \{\{ax \mid x \in \mathbb{Z}\}, \{bx \mid b \in \mathbb{Z}\}\}$, donde a y b son números naturales cualesquiera.

Podemos entonces preguntarnos si es posible que un conjunto se contenga a sí mismo, i.e. si A es un conjunto, ¿es posible que A pertenezca a A ? Formalmente esto sí se puede escribir como: $A := \{A\}$; o en palabras, A es el conjunto que contiene a A .

¿Puedes imaginarte un conjunto que se contenga a sí mismo?, ¿qué propiedades se te ocurren que debe tener?

En el siguiente ejercicio se enuncia la llamada **paradoja de Russell**.

Ejercicio 2 Sea A el conjunto que contiene a todos los conjuntos, i.e.

$$A := \{X : X \text{ es conjunto y } X \notin X\}.$$

¿Puede A contenerse a sí mismo?

A finales del siglo XVIII Georg Cantor, Gottlob Frege y otros matemáticos realizaron un gran y meticuloso trabajo en la teoría de conjuntos con la esperanza de formular bases firmes tanto para la matemática como para la filosofía. Con este fin, Frege comenzó un tratado de varios volúmenes titulado “Grundgesetze der Arithmetik” (“Fundamentos de la Aritmética” o “Las Bases de la Aritmética”). En 1902 el segundo volumen de dicho tratado estaba en imprenta cuando Frege recibió una carta del filósofo y matemático Bertrand Russell. En dicha carta, Russell ponía el libro en alto, pero agregaba “Hay un único punto en donde he encontrado una dificultad”. Este “único punto” resultó ser la paradoja que estremeció los fundamentos de la lógica y le dio un giro a la lógica de conjuntos intuitiva de Cantor hacia una teoría axiomática.

La paradoja de Russell suele llamarse también la **paradoja del Barbero de Sevilla** (o simplemente paradoja del Barbero, pero la ópera de Rossini le viene bien, ¿no?), esto se debe a que una manera famosa de enunciar esta paradoja es la siguiente: “cada hombre de Sevilla es afeitado por el barbero de Sevilla si y sólo si no se afeita a sí mismo. Entonces, ¿el barbero de Sevilla se afeita a sí mismo?”. Puedes reescribir el ejercicio de arriba en estos términos.

Ahora, dado un conjunto A es natural pensar en los subconjuntos de A , y luego, pensar en el conjunto de los subconjuntos de A , es una manera de obtener un nuevo conjunto a partir de uno ya dado. Esto es la siguiente definición.

Definición 1

Sea A un conjunto, definimos un nuevo conjunto 2^A , llamado el **conjunto potencia de A** (o **conjunto de las partes de A**) como el conjunto de todos los subconjuntos de A , i.e.

$$2^A := \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Ejercicio 3 Sea A un conjunto no vacío. Demuestra que $\bigcup 2^A = A$ y que $\bigcap 2^A = \emptyset$.

Ahora, podemos también pensar en “contar” los elementos de un conjunto, eso, en el lenguaje matemático es simplemente asignarle a cada elemento un número natural. Formalmente...

Definición 2

Sea A un conjunto. En el caso que exista una función inyectiva $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $|A| := \max_{a \in A} f(a) < \infty$, $1 \in f(A)$ y si $n \in f(A)$, $n > 1$, entonces $n - 1 \in f(A)$; decimos que A es **finito** y llamamos al número $|A|$ la **cardinalidad de A** .

Ejercicio 4 Si $A := \{1, 2, \dots, n\}$. ¿Cuál es la cardinalidad de A y de 2^A ?

Esto nos lleva a otro problema, en la definición anterior podemos “contar” a los elementos de A como contamos en la vida real, sin embargo A puede tener infinitos elementos e.g. si $A = \mathbb{N}$ ó $A := [0, 1]$, en donde nuestra definición ya no funciona. Aunque intuitivamente ambos $\mathbb{N}$ y $[0, 1]$ tendrían cardinalidad “infinita” uno es “más grande” que el otro (*¿cuál es cuál?*). Esto nos lleva a pensar en que “un infinito es más grande que otro”. Pero esto no nos preocupará mucho, sólo es una breve idea para el siguiente ejercicio.

Ejercicio 5 Sea A un conjunto. Demuestra aunque sea intuitivamente que la cardinalidad de 2^A es estrictamente mayor que la de A .

Haciendo quizá un acto de fé con el ejercicio anterior podemos enunciar (como ejercicio) la siguiente paradoja, conocida como la **paradoja de Cantor** (sí, el mismo que se mencionó arriba).

Ejercicio 6 Sea A el conjunto de todos los conjuntos. Demuestra o da una idea que la cardinalidad de A es mayor o igual que la cardinalidad de 2^A .

Existen aún así paradojas un poco más “filosóficas” por así llamarles, como por ejemplo la paradoja de Berry:

Todo número natural puede ser descrito con n palabras, para algún $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo 305: *trescientos cinco* (dos palabras) ó 1283: *mil doscientos ochenta y tres* (5 palabras). Esta proposición no tiene nada de descabellado, es claro que siempre podremos describir un número entero con finitas palabras y que hay enteros que se describen con al menos 10 palabras, pero entonces podemos tomar un entero x que sea “el menor natural descrito con al menos 10 palabras” (9 palabras)... ¿ya vieron como si es descabellada a final de cuentas?

Imagínense la cara de los lógicos del siglo XIX al leer estas afirmaciones. Es por eso que la teoría de conjuntos tuvo que cambiar a una teoría axiomática. Dichos axiomas ahora se conocen como los axiomas de Zermelo-Fraenkel, que son los que ahora son generalmente aceptados.

Parte de lo aquí escrito se puede encontrar en la url: <http://www.geocities.com/mathfair2002/school/logi/logi0.htm>.

Por último, es bueno que el lector sepa que: *lo que escribí es falso... incluyendo esta oración.*