Problemas para el segundo parcial

Matemáticas Elementales
Ana García y Jorge Albarrán
5 de octubre de 2005

1. Si A, B, C y D son conjuntos, no vacíos, pruebe que $A \subseteq C$, $B \subseteq D$ implica $A \times B \subseteq C \times D$. ¿ Es cierta la afirmación $A \times B \subseteq C \times D$ implica $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$?.

2. Determina cuál de las siguientes relaciones es una función, y en caso de serlo determina su imagen:
   a) $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2 + 7\}$. b) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y^2 = x\}$.
   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 1\}$. d) $\{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

3. Si hay 2187 funciones $f : A \to B$ y $|B| = 3$, ¿cuál es el valor de $|A|$?.

4. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y hay 6720 funciones inyectivas de A a B, ¿cuál es el valor de $|B|$?.

5. Dése un ejemplo de dos conjuntos finitos A y B con $|A|$, $|B| \geq 4$ y una función $f : A \to B$ tal que:
   a) f no sea uno a uno ni suprayectiva,
   b) f sea uno a uno pero no suprayectiva,
   c) f sea suprayectiva, pero no uno a uno, y
   d) f sea biyectiva.

6. Sea $f : A \to B$ una función invertible. Demuestra que la inversa de f es única.

7. Sea $f : A \to B$ una función y sean $B_1, B_2 \subseteq B$ dos subconjuntos no vacíos de B. Demuestra:
   a) $f^r(B_1 \cap B_2) = f^r(B_1) \cap f^r(B_2)$,
   b) $f^r(B_1 \cup B_2) = f^r(B_1) \cup f^r(B_2)$, y
   c) $f^r(B \setminus B_1) = A \setminus f^r(B_1)$.

8. En el ejercicio anterior, si $A_1, A_2 \subseteq A$ son subconjuntos no vaciíos, ¿ es cierto que $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$?.

9. Sean A y B conjuntos finitos con $|A| = |B|$. Si $f : A \to B$ es una función demuestra que f es inyectiva si y sólo si es suprayectiva.

10. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, con $f(x) = x^n$, ¿ para qué $n \in \mathbb{Z}^+$ es f invertible?.

11. Una función $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se dice *creciente* si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ y $x_1 < x_2$ implica $y_1 < y_2$. Pruebe que si $f, g \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ son funciones crecientes, entonces $g \circ f$ es creciente.

12. Si $f : X \to Y$ es una función demuestre que
a) para $A \subseteq X$, $A \subseteq f^r(f(A))$ y
b) para $B \subseteq Y$, $f(f^r(B)) \subseteq B$.
Formúlense las condiciones necesarias para que haya igualdad en ambos incisos.

13. Sea G un grupo, demuestre que G es abeliano si y sólo si, para toda $a, b \in G$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

14. Sea G un grupo, un subconjunto $H \subseteq G$ se llama un *subgrupo* de G si para toda $a, b \in H$, $ab \in H$ y para todo $a \in H$ entonces $a^{-1} \in H$. Demuestra que si H y K son subgrupos de G entonces $H \cap K$ también es un subgrupo de G.

15. Sea G un grupo, definimos la relación $R \subset G \times G$ por

$$R := \{(a, b) \in G \times G \mid \text{ si } \exists\, c \in C \text{ con } a = cbc^{-1}\}.$$

Demuestra que R es de equivalencia.