
Relaciones, funciones y cardinalidades.

JORGE ALBARRÁN Y ANA GARCÍA

21 de septiembre de 2005

El objetivo de esta clase es definir las relaciones, observar que las funciones son un caso especial de las relaciones y ver la relación entre funciones y cardinalidades.

Definición 1

Sean A y B dos conjuntos. Una **relación** es un subconjunto $R \subset A \times B$, decimos que a **está relacionado con** b si $(a, b) \in R$. En el caso que $A = B$ llamamos a R una **relación entre los elementos de A** .

Observemos que una función es en particular una relación, ya que la definición de función es la misma que la de relación más una condición extra.

Un tipo de relaciones que interesa a los matemáticos (aparte de las funciones) son las *relaciones de equivalencia*, que definimos a continuación.

Definición 2

Sea A un conjunto y $R \subset A \times A$ una relación entre los elementos de A . Decimos que R es una **relación de equivalencia** si cumple:

- i) Para toda $a \in A$, $(a, a) \in R$ (reflexividad),
- ii) si $(a, b) \in R$ entonces, $(b, a) \in R$ (simetría) y
- iii) si $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ entonces, $(a, c) \in R$ (transitividad).

Ejercicio 1 En cada uno de los siguientes incisos definimos un conjunto A y una relación $R \subset A \times A$. Decide en cada caso si la relación es reflexiva, simétrica o transitiva.

- a) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$.
- b) $A = \mathbb{Q}$, $R = \{(x, y) \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$.
- c) $A = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \mid xy = 1\}$.

Ejercicio (cont.) ...

- d) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $R = \{((x, y), (x, y)) \mid (x_1)^2 + (y_1)^2 = (x_2)^2 + (y_2)^2\}$.
- e) $A =$ todas las líneas en el plano $= \{l \mid l \text{ es una línea en el plano}\}$,
 $R = \{(l_1, l_2) \mid l_1 \text{ es paralela a } l_2\}$.
- f) Sean A y B dos conjuntos cualesquiera y $f : A \rightarrow B$ cualquier función. Definimos $R := \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\} \subset A \times A$.

Como una función es también una relación podemos decir que una función f es *reflexiva*, *simétrica* o *transitiva* si cumple, respectivamente, las propiedades de la definición anterior.

Ejercicio 3 Sea $f : A \rightarrow A$ una función. Demuestra en cada uno de los siguientes casos que f es la función identidad, i.e. $f(a) = a$ para toda $a \in A$:

- a) f es reflexiva.
- b) f es simétrica y transitiva.

Cuando se tienen dos conjuntos A y B una información útil es saber cuál de los dos tiene más elementos. Para saber esto no es necesario “contar” a los elementos de A y de B , simplemente necesitamos ver si A “cabe” en B o no. Podemos formalizar esto con la siguiente definición.

Definición 3

Sean A y B dos conjuntos, decimos que la **cardinalidad de B es mayor que la de A** si existe una función inyectiva $f : A \rightarrow B$ y lo denotamos por $|B| \leq |A|$. Decimos que A y B **tienen la misma cardinalidad** si $|B| \leq |A|$ y $|A| \leq |B|$ y lo denotamos por $|B| = |A|$. Decimos que un conjunto A es **finito** si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $|A| = |\{1, 2, 3, \dots, n\}|$, en este caso decimos que A tiene cardinalidad N y escribimos $|A| = n$.

Ejercicio 4 Demuestra que $\mathbb{Z}$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{N}$.

Ejercicio 5 Sean A y B dos conjuntos finitos con $|A| = m$ y $|B| = n$. Demostrar que $|A \times B| = mn$. Generalizar para el caso del producto cartesiano de k conjuntos finitos.

Ejercicio 6 Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que $|B| \leq |A|$ si y sólo si existe una función suprayectiva $f : A \rightarrow B$.

Por último, un “torito”...

Ejercicio 7 Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **homogénea de grado d** , con $d \in \mathbb{N}$. Si para todo real $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$, para toda $x \in \mathbb{R}$. Sea f una función homogénea de grado d , demuestra que f es de la forma $f(x) = cx^d$ para alguna $c \in \mathbb{R}$.