Introducción a las álgebras y superálgebras de Lie

Mary Carmen Rodríguez Vallarte

Seminario de Estudiantes de Básicas
Septiembre 09, 2005

Contenido

Contenido

¿Qué nos gustaría?

Que el conjunto de todos los objetos que tienen propiedades en común tengan alguna

- Estructura Topológica (noción de *cercanía*)
- Con suerte podemos definir una noción de DISTANCIA que puede ser útil para COMPARAR Y CLASIFICAR objetos
- ¿ Y si el conjunto de objetos forma un espacio vectorial?

¡Lo podemos pensar como $\mathbb{R}^n$!

Pero la mayoría de las veces este NO es el caso.

¿Qué nos gustaría?

Que el conjunto de todos los objetos que tienen propiedades en común tengan alguna

- Estructura Topológica (noción de *cercanía*)
- Con suerte podemos definir una noción de DISTANCIA que puede ser útil para COMPARAR Y CLASIFICAR objetos
- ¿ Y si el conjunto de objetos forma un espacio vectorial?

¡Lo podemos pensar como $\mathbb{R}^n$!

Pero la mayoría de las veces este NO es el caso.

¿Qué nos gustaría?

Que el conjunto de todos los objetos que tienen propiedades en común tengan alguna

- Estructura Topológica (noción de *cercanía*)
- Con suerte podemos definir una noción de DISTANCIA que puede ser útil para COMPARAR Y CLASIFICAR objetos
- ¿ Y si el conjunto de objetos forma un espacio vectorial?

¡Lo podemos pensar como $\mathbb{R}^n$!

Pero la mayoría de las veces este NO es el caso.

¿Qué nos gustaría?

Que el conjunto de todos los objetos que tienen propiedades en común tengan alguna

- Estructura Topológica (noción de *cercanía*)
- Con suerte podemos definir una noción de DISTANCIA que puede ser útil para COMPARAR Y CLASIFICAR objetos
- ¿ Y si el conjunto de objetos forma un espacio vectorial?

¡Lo podemos pensar como $\mathbb{R}^n$!

Pero la mayoría de las veces este NO es el caso.

Con un poco de suerte...

- Localmente, el conjunto ES como $\mathbb{R}^n$ y decimos que tiene estructura de VARIEDAD.
- Si existe una forma de multiplicar estos objetos no solo tenemos una variedad, también se tiene un GRUPO.
- Si ambas estructuras son adecuadamente compatibles, lo que se tiene es un ¡GRUPO DE LIE!

Ejemplos sencillos

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ abeliano, simplemente conexo, no compacto
2. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ abeliano, ni conexo ni compacto
3. $(S^1, \cdot)$ abeliano,conexo, no simplemente conexo, compacto

Con un poco de suerte...

- Localmente, el conjunto ES como $\mathbb{R}^n$ y decimos que tiene estructura de VARIEDAD.
- Si existe una forma de multiplicar estos objetos no solo tenemos una variedad, también se tiene un GRUPO.
- Si ambas estructuras son adecuadamente compatibles, lo que se tiene es un ¡GRUPO DE LIE!

Ejemplos sencillos

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ abeliano, simplemente conexo, no compacto
2. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ abeliano, ni conexo ni compacto
3. $(S^1, \cdot)$ abeliano,conexo, no simplemente conexo, compacto

Con un poco de suerte...

- Localmente, el conjunto ES como $\mathbb{R}^n$ y decimos que tiene estructura de VARIEDAD.
- Si existe una forma de multiplicar estos objetos no solo tenemos una variedad, también se tiene un GRUPO.
- Si ambas estructuras son adecuadamente compatibles, lo que se tiene es un ¡GRUPO DE LIE!

Ejemplos sencillos

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ abeliano, simplemente conexo, no compacto
2. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ abeliano, ni conexo ni compacto
3. $(S^1, \cdot)$ abeliano,conexo, no simplemente conexo, compacto

Con un poco de suerte...

- Localmente, el conjunto ES como $\mathbb{R}^n$ y decimos que tiene estructura de VARIEDAD.
- Si existe una forma de multiplicar estos objetos no solo tenemos una variedad, también se tiene un GRUPO.
- Si ambas estructuras son adecuadamente compatibles, lo que se tiene es un ¡GRUPO DE LIE!

Ejemplos sencillos

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ abeliano, simplemente conexo, no compacto
2. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ abeliano, ni conexo ni compacto
3. $(S^1, \cdot)$ abeliano,conexo, no simplemente conexo, compacto

Con un poco de suerte...

- Localmente, el conjunto ES como $\mathbb{R}^n$ y decimos que tiene estructura de VARIEDAD.
- Si existe una forma de multiplicar estos objetos no solo tenemos una variedad, también se tiene un GRUPO.
- Si ambas estructuras son adecuadamente compatibles, lo que se tiene es un ¡GRUPO DE LIE!

Ejemplos sencillos

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ abeliano, simplemente conexo, no compacto
2. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ abeliano, ni conexo ni compacto
3. $(S^1, \cdot)$ abeliano,conexo, no simplemente conexo, compacto

Con un poco de suerte...

- Localmente, el conjunto ES como $\mathbb{R}^n$ y decimos que tiene estructura de VARIEDAD.
- Si existe una forma de multiplicar estos objetos no solo tenemos una variedad, también se tiene un GRUPO.
- Si ambas estructuras son adecuadamente compatibles, lo que se tiene es un ¡GRUPO DE LIE!

Ejemplos sencillos

1. $(\mathbb{R}^n, +)$ abeliano, simplemente conexo, no compacto
2. $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ abeliano, ni conexo ni compacto
3. $(S^1, \cdot)$ abeliano,conexo, no simplemente conexo, compacto

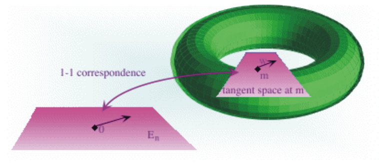
¿Por qué son importantes estas estructuras?

Describen simetrías y tienen aplicaciones en la ciencia y la ingeniería. Por ejemplo, en la cristalografía y la mecánica cuántica.

Algunos conceptos relacionados

Matrices de Pauli, Corchete de Poisson, Teorema de Noether, Teoría de Gauge, Grand unification theory, Twistores, Superálgebras, Álgebra de Virasoro; Erlangen programme, espacios homogéneos, teoría de invariantes; grupos fuchsianos, modulares, kleinianos, cristalográficos; subgrupo de Borel, parabólico, aritmético...

En general, la estructura de un grupo de Lie puede ser complicada. Pero se puede aproximar usando otra estructura matemática más simple: su ÁLGEBRA DE LIE.



Contenido

¿Qué es una $\mathbb{F}$-Álgebra asociativa?

Una álgebra asociativa A sobre el campo $\mathbb{F}$, o una $\mathbb{F}$-álgebra, es un espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$ que admite una multiplicación μ asociativa y distributiva compatible con los elementos de A.

Nota

Supondremos que $1 \in A$.

Ejemplos

1. $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$.
2. Los complejos y los cuaterníos sobre $\mathbb{R}$.
3. Los polinomios con coeficientes reales.

¿Qué es una $\mathbb{F}$-Álgebra asociativa?

Una álgebra asociativa A sobre el campo $\mathbb{F}$, o una $\mathbb{F}$-álgebra, es un espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$ que admite una multiplicación μ asociativa y distributiva compatible con los elementos de A.

Nota

Supondremos que $1 \in A$.

Ejemplos

1. $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$.
2. Los complejos y los cuaternios sobre $\mathbb{R}$.
3. Los polinomios con coeficientes reales.

¿Qué es una $\mathbb{F}$-Álgebra asociativa?

Una álgebra asociativa A sobre el campo $\mathbb{F}$, o una $\mathbb{F}$-álgebra, es un espacio vectorial V sobre $\mathbb{F}$ que admite una multiplicación μ asociativa y distributiva compatible con los elementos de A.

Nota

Supondremos que $1 \in A$.

Ejemplos

1. $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$.
2. Los complejos y los cuaternios sobre $\mathbb{R}$.
3. Los polinomios con coeficientes reales.

A partir de este momento, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición

Una álgebra de Lie es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V junto con una aplicación bilineal $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ que satisface,

1. Antisimetría: $[x, y] = -[y, x]\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$
2. Identidad de Jacobi: $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

A partir de este momento, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición

Una álgebra de Lie es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial V junto con una aplicación bilineal $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ que satisface,

1. Antisimetría: $[x, y] = -[y, x]\ \forall x, y \in \mathfrak{g}$
2. Identidad de Jacobi:
   $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$

Notas

- La condición (1) implica $[x, x] = 0 \;\forall\; x \in \mathfrak{g}$.
- TODO espacio vectorial admite al menos una estructura de álgebra de Lie.
- En general, $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ no es ni asociativa ni conmutativa.

Notas

- La condición (1) implica $[x, x] = 0 \ \forall \ x \in \mathfrak{g}$.
- TODO espacio vectorial admite al menos una estructura de álgebra de Lie.
- En general, $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ no es ni asociativa ni conmutativa.

Notas

- La condición (1) implica $[x, x] = 0 \ \forall \ x \in \mathfrak{g}$.
- TODO espacio vectorial admite al menos una estructura de álgebra de Lie.
- En general, $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ no es ni asociativa ni conmutativa.

Ejemplos de Álgebras de Lie

- $V = \mathbb{F}^n, \quad [u, v] := 0 \ \forall \ u, v \in \mathbb{F}^n$
  $(\mathbb{F}^n, [\cdot, \cdot])$ Álgebra de Lie abeliana de dimensión n.
- $V = \mathbb{R}^3, \quad [x, y] := x \times y \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^3$.
- $V = \mathbb{R}^2 = \{ae_1 + be_2 : a, b \in \mathbb{R}\}$
  $[e_1, e_1] = [e_2, e_2] = 0, \quad [e_1, e_2] := -[e_2, e_1] = ae_1 + be_2$

Ejemplos de Álgebras de Lie

- $V = \mathbb{F}^n, \quad [u, v] := 0 \ \forall \ u, v \in \mathbb{F}^n$
  $(\mathbb{F}^n, [\cdot, \cdot])$ Álgebra de Lie abeliana de dimensión n.
- $V = \mathbb{R}^3, \quad [x, y] := x \times y \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^3$.
- $V = \mathbb{R}^2 = \{ae_1 + be_2 : a, b \in \mathbb{R}\}$
  $[e_1, e_1] = [e_2, e_2] = 0, \quad [e_1, e_2] := -[e_2, e_1] = ae_1 + be_2$

Ejemplos de Álgebras de Lie

- $V = \mathbb{F}^n, \quad [u, v] := 0 \ \forall \ u, v \in \mathbb{F}^n$
  $(\mathbb{F}^n, [\cdot, \cdot])$ Álgebra de Lie abeliana de dimensión n.
- $V = \mathbb{R}^3, \quad [x, y] := x \times y \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^3$.
- $V = \mathbb{R}^2 = \{ae_1 + be_2 : a, b \in \mathbb{R}\}$
  $[e_1, e_1] = [e_2, e_2] = 0, \quad [e_1, e_2] := -[e_2, e_1] = ae_1 + be_2$

Más ejemplos

- $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F}) \quad [A,B] := AB - BA \;\forall\; A,B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$.
  $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F}), [\cdot,\cdot]) =: \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$
- Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.
  $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \{T : V \to V : T \text{ es lineal}\}$.
  $[S,T] := S\circ T - T\circ S \;\forall S,T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$
  $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V), [\cdot,\cdot]) =: \mathfrak{gl}(V)$

Pregunta

¿ Hay una relación entre $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ y $\mathfrak{gl}(V)$?

¡Sí!

$$\dim V < \infty \implies \quad \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \simeq \mathfrak{gl}(V)$$

Más ejemplos

- $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F}) \quad [A,B] := AB - BA \ \forall\ A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$.
  $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F}), [\cdot,\cdot]) =: \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$
- Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.
  $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \{T : V \to V : T \text{ es lineal}\}$.
  $[S,T] := S\circ T - T\circ S \ \forall S, T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$
  $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V), [\cdot,\cdot]) =: \mathfrak{gl}(V)$

Pregunta

¿ Hay una relación entre $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ y $\mathfrak{gl}(V)$?

¡Sí!

$$\dim V < \infty \implies \quad \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \simeq \mathfrak{gl}(V)$$

Más ejemplos

- $V = \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F}) \quad [A,B] := AB - BA \ \forall\ A,B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$.
  $(\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F}), [\cdot,\cdot]) =: \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$
- Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial.
  $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V) = \{T : V \to V : T \text{ es lineal}\}$.
  $[S,T] := S\circ T - T\circ S \ \forall S,T \in \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$
  $(\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V), [\cdot,\cdot]) =: \mathfrak{gl}(V)$

Pregunta

¿ Hay una relación entre $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ y $\mathfrak{gl}(V)$?

¡Sí!

$$\dim V < \infty \Longrightarrow \quad \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \simeq \mathfrak{gl}(V)$$

Más ejemplos

- Sea (A, μ) una álgebra asociativa.

$$[a, b] := \mu(a, b) - \mu(b, a) \forall\ a, b \in A$$

¡ Toda álgebra asociativa tiene una estructura de álgebra de Lie!

Observación

Los dos ejemplos anteriores son un caso particular de esta construcción.

Más ejemplos

- Sea (A, μ) una álgebra asociativa.

$$[a, b] := \mu(a, b) - \mu(b, a) \forall\ a, b \in A$$

¡ Toda álgebra asociativa tiene una estructura de álgebra de Lie!

Observación

Los dos ejemplos anteriores son un caso particular de esta construcción.

Morfismos de álgebras de Lie

Definición

Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie. Un *morfismo* entre ellas es una transformación lineal $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tal que

$$\rho([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [\rho(x), \rho(y)]_{\mathfrak{h}} \quad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}$$

Si además, $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(V)$ para algún V, decimos que ρ es una *representación* de $\mathfrak{g}$ en V,

$$\begin{aligned} \rho([x, y]) &= [\rho(x), \rho(y)] \\ &= \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x) \end{aligned}$$

Morfismos de álgebras de Lie

Definición

Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie. Un *morfismo* entre ellas es una transformación lineal $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ tal que

$$\rho([x,y]_{\mathfrak{g}}) = [\rho(x), \rho(y)]_{\mathfrak{h}} \quad \forall\ x, y \in \mathfrak{g}$$

Si además, $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(V)$ para algún V, decimos que ρ es una *representación* de $\mathfrak{g}$ en V,

$$\begin{aligned} \rho([x,y]) &= [\rho(x), \rho(y)] \\ &= \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x) \end{aligned}$$

Ejemplo

La representación adjunta

Sea $V = \mathfrak{g}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{ad} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ x &\mapsto \mathrm{ad}(x) \\ &\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \\ &y \mapsto [x, y] \end{aligned}$$

Isomorfismos de álgebras de Lie

Definición

Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie. $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ es un isomorfismo de álgebras de Lie si ϕ es un isomorfismo de espacios vectoriales que además es morfismo de álgebras de Lie.

Para propósitos prácticos, las álgebras de Lie isomorfas se consideran idénticas.

$$\begin{aligned} \mathfrak{sl}_2 &\simeq \mathfrak{sp}_2 \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

¿Cómo se clasifican las álgebras de Lie?

Hay que desarrollar más teoría

Ideales; álgebra de Lie solubles, nilpotentes, semisimples, simples; forma de Cartan-Killing; subálgebra de Heisenberg; sistemas de raices; diagramas de Dynkin, etc...

Contenido

Superespacio vectorial

Definición

Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. V es un espacio $\mathbb{Z}_2$-graduado o un *superespacio vectorial*, si admite una descomposición en suma directa

$$V = V_0 \oplus V_1$$

y una aplicación -llamada de paridad-,

$$|\cdot| : (V_0 - \{0\}) \cup (V_1 - \{0\}) \to \mathbb{Z}_2 \text{ tal que}$$

$$|v| = i \iff v \in V_i - \{0\}, \;\; i = 1, 2$$

Observación

$V \ni v = v_0 + v_1$, decimos que v_0 y v_1 son las *componentes homogéneas* de V

Notación

Si $V = V_0 \oplus V_1$ es un superespacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y la dimensión de V es finita, diremos que

$$\dim(V) = (m, n) \text{ si } \dim V_0 = m \text{ y } \dim V_1 = n$$

Superálgebras asociativas

Definición

Sea $(A, \mu_A, 1_A)$ una $\mathbb{F}$-álgebra asociativa. A es una *superálgebra* si como espacio vectorial,

- $A = A_0 \oplus A_1$
- $\mu_A(A_i, A_j) \subset A_{i+j}$
- $1_A \in A_0$

Ejemplo

- $(\mathbb{C}, \cdot)$ $\quad \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}, \quad V_0 = \mathbb{R}, \quad V_1 = i\mathbb{C}$
- $\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \cdot i\mathbb{R} \subset i\mathbb{R} \quad$ y $\quad i\mathbb{R} \cdot i\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$
- $1 \in \mathbb{R}$

Superálgebras asociativas

Definición

Sea $(A, \mu_A, 1_A)$ una $\mathbb{F}$-álgebra asociativa. A es una *superálgebra* si como espacio vectorial,

- $A = A_0 \oplus A_1$
- $\mu_A(A_i, A_j) \subset A_{i+j}$
- $1_A \in A_0$

Ejemplo

- $(\mathbb{C}, \cdot) \quad \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}, \quad V_0 = \mathbb{R}, \;\; V_1 = i\mathbb{C}$
- $\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \cdot i\mathbb{R} \subset i\mathbb{R}$ y $i\mathbb{R} \cdot i\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$
- $1 \in \mathbb{R}$

Superálgebras asociativas

Definición

Sea $(A, \mu_A, 1_A)$ una $\mathbb{F}$-álgebra asociativa. A es una *superálgebra* si como espacio vectorial,

- $A = A_0 \oplus A_1$
- $\mu_A(A_i, A_j) \subset A_{i+j}$
- $1_A \in A_0$

Ejemplo

- $(\mathbb{C}, \cdot) \quad \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}, \quad V_0 = \mathbb{R}, \; V_1 = i\mathbb{C}$
- $\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \cdot i\mathbb{R} \subset i\mathbb{R}$ y $i\mathbb{R} \cdot i\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$
- $1 \in \mathbb{R}$

Superálgebras asociativas

Definición

Sea $(A, \mu_A, 1_A)$ una $\mathbb{F}$-álgebra asociativa. A es una *superálgebra* si como espacio vectorial,

- $A = A_0 \oplus A_1$
- $\mu_A(A_i, A_j) \subset A_{i+j}$
- $1_A \in A_0$

Ejemplo

- $(\mathbb{C}, \cdot) \quad \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}, \quad V_0 = \mathbb{R}, \; V_1 = i\mathbb{C}$
- $\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \cdot i\mathbb{R} \subset i\mathbb{R}$ y $i\mathbb{R} \cdot i\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$
- $1 \in \mathbb{R}$

Superálgebras asociativas

Definición

Sea $(A, \mu_A, 1_A)$ una $\mathbb{F}$-álgebra asociativa. A es una *superálgebra* si como espacio vectorial,

- $A = A_0 \oplus A_1$
- $\mu_A(A_i, A_j) \subset A_{i+j}$
- $1_A \in A_0$

Ejemplo

- $(\mathbb{C}, \cdot)$ $\quad \mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}, \quad V_0 = \mathbb{R}, \; V_1 = i\mathbb{C}$
- $\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \cdot i\mathbb{R} \subset i\mathbb{R}$ y $i\mathbb{R} \cdot i\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$
- $1 \in \mathbb{R}$

Superálgebras de Lie

Definición

Una *SAL* es un superespacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, y una aplicación bilineal $[\![\cdot,\cdot]\!] : g \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ que satisface

- $[\![\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]\!] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$
- $[\![x, y]\!] = -(-1)^{|x||y|}[\![y, x]\!]$
- $(-1)^{|x||z|}[\![x, [\![y, z]\!]]\!] + (-1)^{|y||x|}[\![y, [\![z, x]\!]]\!] + (-1)^{|z||y|}[\![z, [\![x, y]\!]]\!]$ $\forall\ x, y, z \in \mathfrak{g}$

Superálgebras de Lie

Definición

Una *SAL* es un superespacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, y una aplicación bilineal $[\![\cdot,\cdot]\!] : g \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ que satisface

- $[\![\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]\!] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$
- $[\![x, y]\!] = -(-1)^{|x||y|}[\![y, x]\!]$
- $(-1)^{|x||z|}[\![x, [\![y, z]\!]]\!] + (-1)^{|y||x|}[\![y, [\![z, x]\!]]\!] + (-1)^{|z||y|}[\![z, [\![x, y]\!]]\!]$ $\forall\ x, y, z \in \mathfrak{g}$

Superálgebras de Lie

Definición

Una *SAL* es un superespacio vectorial $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, y una aplicación bilineal $[\![\cdot,\cdot]\!] : g \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ que satisface

- $[\![\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]\!] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$
- $[\![x, y]\!] = -(-1)^{|x||y|}[\![y, x]\!]$
- $(-1)^{|x||z|}[\![x, [\![y, z]\!]]\!] + (-1)^{|y||x|}[\![y, [\![z, x]\!]]\!] + (-1)^{|z||y|}[\![z, [\![x, y]\!]]\!]$ $\forall\ x, y, z \in \mathfrak{g}$

Caracterización de las SAL

Una estructura de SAL en $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ está completamente caracterizada por los datos:

- Una estructura de álgebra de Lie en $(\mathfrak{g}_0, [\cdot, \cdot])$,
- una representación lineal $\rho : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$ y
- una aplicación bilineal simétrica que satisface
  - J1 $[x, \Gamma(u, v)] = \Gamma(\rho(x)u, v) + \Gamma(u, \rho(x)v)$
  - J2 $\rho(\Gamma(u, v))w + \rho(\Gamma(v, w))u + \rho(\Gamma(w, u))u = 0.$

Caracterización de las SAL

Una estructura de SAL en $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ está completamente caracterizada por los datos:

- Una estructura de álgebra de Lie en $(\mathfrak{g}_0, [\cdot, \cdot])$,
- una representación lineal $\rho : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$ y
- una aplicación bilineal simétrica que satisface
  - J1 $[x, \Gamma(u, v)] = \Gamma(\rho(x)u, v) + \Gamma(u, \rho(x)v)$
  - J2 $\rho(\Gamma(u, v))w + \rho(\Gamma(v, w))u + \rho(\Gamma(w, u))u = 0.$

Caracterización de las SAL

Una estructura de SAL en $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ está completamente caracterizada por los datos:

- Una estructura de álgebra de Lie en $(\mathfrak{g}_0, [\cdot, \cdot])$,
- una representación lineal $\rho : \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_1)$ y
- una aplicación bilineal simétrica que satisface
  - J1 $[x, \Gamma(u, v)] = \Gamma(\rho(x)u, v) + \Gamma(u, \rho(x)v)$
  - J2 $\rho(\Gamma(u, v))w + \rho(\Gamma(v, w))u + \rho(\Gamma(w, u))u = 0.$

Caracterización de las SAL

En este caso, la estructura de la SAL se define por

$$[\![x,y]\!] = \begin{cases} [x,y] & \text{si } x,y \in \mathfrak{g}_0 \\ -[\![y,x]\!] := \rho(x)y & \text{si } x \in \mathfrak{g}_0,\ \ y \in \mathfrak{g}_1 \\ \Gamma(x,y) & \text{si } x,y \in \mathfrak{g}_1 \end{cases}$$

Morfismos

Definiciones

A. Sean A y B superálgebras asociativas sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es un *morfismo* entre ellas si
   1. $\phi : A \longrightarrow B$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(A_i) \subset B_i, \ \ i = 0, 1$
   2. $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2), \ \forall \ a_1, a_2$
   3. $\phi(1_A) = 1_B$

   Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

B. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ SAL. Una aplicación $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un *morfismo* entre ellas si
   1. $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{h}_i, \ \ i = 0, 1$
   2. $\phi([\![x, y]\!]) = [\![\phi(x), \phi(y)]\!] \ \forall \ x, y \in g.$

   Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

Morfismos

Definiciones

A Sean A y B superálgebras asociativas sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es un *morfismo* entre ellas si

1. $\phi : A \longrightarrow B$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(A_i) \subset B_i, \; i = 0, 1$
2. $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2), \; \forall \; a_1, a_2$
3. $\phi(1_A) = 1_B$

Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

B Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ SAL. Una aplicación $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un *morfismo* entre ellas si

1. $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{h}_i, \; i = 0, 1$
2. $\phi([\![x, y]\!]) = [\![\phi(x), \phi(y)]\!] \; \forall \; x, y \in g.$

Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

Morfismos

Definiciones

(A) Sean A y B superálgebras asociativas sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es un *morfismo* entre ellas si

1. $\phi : A \longrightarrow B$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(A_i) \subset B_i, \;\; i = 0, 1$
2. $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2), \;\; \forall \; a_1, a_2$
3. $\phi(1_A) = 1_B$

Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

(B) Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ SAL. Una aplicación $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un *morfismo* entre ellas si

1. $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{h}_i, \;\; i = 0, 1$
2. $\phi([\![x, y]\!]) = [\![\phi(x), \phi(y)]\!] \; \forall \; x, y \in \mathfrak{g}.$

Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

Morfismos

Definiciones

A Sean A y B superálgebras asociativas sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es un *morfismo* entre ellas si

1. $\phi : A \longrightarrow B$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(A_i) \subset B_i, \ \ i = 0, 1$
2. $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2), \ \forall \ a_1, a_2$
3. $\phi(1_A) = 1_B$

Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

B Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ SAL. Una aplicación $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un *morfismo* entre ellas si

1. $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{h}_i, \ \ i = 0, 1$
2. $\phi([\![x, y]\!]) = [\![\phi(x), \phi(y)]\!] \ \forall \ x, y \in g.$

Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

Morfismos

Definiciones

A. Sean A y B superálgebras asociativas sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es un *morfismo* entre ellas si
   1. $\phi : A \longrightarrow B$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(A_i) \subset B_i, \ \ i = 0, 1$
   2. $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2), \ \forall \ a_1, a_2$
   3. $\phi(1_A) = 1_B$

   Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

B. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ SAL. Una aplicación $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un *morfismo* entre ellas si
   1. $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{h}_i, \ \ i = 0, 1$
   2. $\phi([\![x, y]\!]) = [\![\phi(x), \phi(y)]\!] \ \forall \ x, y \in g.$

   Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

Morfismos

Definiciones

A. Sean A y B superálgebras asociativas sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es un *morfismo* entre ellas si
   1. $\phi : A \longrightarrow B$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(A_i) \subset B_i, \;\; i = 0, 1$
   2. $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2), \;\; \forall \; a_1, a_2$
   3. $\phi(1_A) = 1_B$

   Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

B. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ SAL. Una aplicación $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un *morfismo* entre ellas si
   1. $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{h}_i, \;\; i = 0, 1$
   2. $\phi([\![x, y]\!]) = [\![\phi(x), \phi(y)]\!] \;\forall\; x, y \in g.$

   Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

Morfismos

Definiciones

(A) Sean A y B superálgebras asociativas sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es un *morfismo* entre ellas si

1. $\phi : A \longrightarrow B$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(A_i) \subset B_i, \;\; i = 0, 1$
2. $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2), \;\forall\; a_1, a_2$
3. $\phi(1_A) = 1_B$

Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

(B) Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ SAL. Una aplicación $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un *morfismo* entre ellas si

1. $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{h}_i, \;\; i = 0, 1$
2. $\phi([\![x, y]\!]) = [\![\phi(x), \phi(y)]\!] \;\forall\; x, y \in g$.

Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

Morfismos

Definiciones

A. Sean A y B superálgebras asociativas sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es un *morfismo* entre ellas si
   1. $\phi : A \longrightarrow B$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(A_i) \subset B_i, \ i = 0, 1$
   2. $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2), \ \forall \ a_1, a_2$
   3. $\phi(1_A) = 1_B$

   Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

B. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ SAL. Una aplicación $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un *morfismo* entre ellas si
   1. $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{h}_i, \ i = 0, 1$
   2. $\phi([\![x, y]\!]) = [\![\phi(x), \phi(y)]\!] \ \forall \ x, y \in g$.

   Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

Morfismos

Definiciones

A Sean A y B superálgebras asociativas sobre $\mathbb{F}$. Una aplicación $\phi : A \longrightarrow B$ es un *morfismo* entre ellas si

1. $\phi : A \longrightarrow B$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(A_i) \subset B_i, \; i = 0, 1$
2. $\phi(a_1 a_2) = \phi(a_1)\phi(a_2), \; \forall \; a_1, a_2$
3. $\phi(1_A) = 1_B$

Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

B Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ SAL. Una aplicación $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un *morfismo* entre ellas si

1. $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es $\mathbb{F}$-lineal y $\phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{h}_i, \; i = 0, 1$
2. $\phi([\![x, y]\!]) = [\![\phi(x), \phi(y)]\!] \; \forall \; x, y \in g$.

Si ϕ es invertible entonces decimos que es un isomorfismo.

Clasificación de superálgebras

Proposición

Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ existen, hasta isomorfismo, sólo tres superálgebras asociativas de dimensión $(1|1)$.

Demostración

Sea A SAA $\Rightarrow A = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}\tau, \quad \tau \neq 0$ y $|\tau| = 1$,

$A_i A_j \subset A_{i+j}, \;\; i, j \in \mathbb{Z}_2$

$a, \;\; b \in A \Rightarrow a = a_1 1 + a_2\tau \quad b = b_1 1 + b_2\tau$

$ab = (a_1 b_1 + \beta a_2 b_2)1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\tau, \quad \tau\tau = \beta 1 \in A_0, \;\; \beta \in \mathbb{F}$

Sean $A(\beta)$ SAA de $\dim(1|1)$, $\quad A(\beta) = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}\tau, \quad \tau\tau = \beta 1$

$A(\beta')$ SAA de $\dim(1|1)$, $\quad A(\beta') = \mathbb{R}1' \oplus \mathbb{R}\tau', \quad \tau'\tau' = \beta' 1'$

$A(\beta) \simeq A(\beta') \Rightarrow \phi : A(\beta) \to A(\beta')$ tal que $\phi(1) = 1'$ y $\phi(\tau) = \lambda\tau'$

$$\begin{aligned} \phi(\tau\tau) &= \phi(\beta 1) = \beta 1' \\ &= \phi(\tau)\phi(\tau) = \lambda^2 \tau'\tau' \\ &= \lambda^2 \beta' 1' \end{aligned}$$

Así, $A(\beta) \simeq A(\beta') \Leftrightarrow \beta = \lambda^2 \beta'$ para algún $\lambda \neq 0$

Nota

Si las SAA son isomorfas, β y β' tienen el mismo signo.

Condición

$$\beta = \lambda^2 \beta' \tag{1}$$

$\beta > 0$ elegimos $\lambda = \sqrt{\beta}$, $\quad (1) \Leftrightarrow \beta' = 1 \quad \therefore \quad A(\beta) \simeq A(1)$

$\beta < 0$ elegimos $\lambda = \sqrt{-\beta}$, $\quad (1) \Leftrightarrow \beta' = -1 \quad \therefore \quad A(\beta) \simeq A(-1)$

$\beta = 0 \quad A(0)$ $\square$

Nota

El caso $\beta' = -1$ dice que una de las tres SAA reales de $\dim(1|1)$ es el álgebra $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Observación

$$a = a_1 1 + a_2 \tau \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & \beta a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$ab \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & \beta a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \beta b_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 & \beta(a_2 b_1 + a_1 b_2) \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 b_1 + \beta a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

Clasificación de superálgebras de Lie

Proposición

Sobre un campo $\mathbb{F}$ de característica distinta de 3, existen, hasta isomorfismo, sólo tres superálgebras de Lie de dimensión $(1|1)$.

Contenido

Bibliografía

- Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*
- Kac, *Sketch of Lie Superalgebra Theory*