Introducción a Interpolación y cálculo de raices

Dr. Alonso Ramirez Manzanares
Depto. de Matemáticas
Univ. de Guanajuato

e-mail: alram@cimat.mx
web: http://www.cimat.mx/~alram/info_apli2/

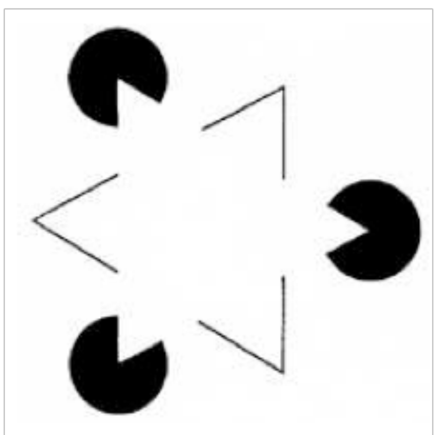
Problemas generales

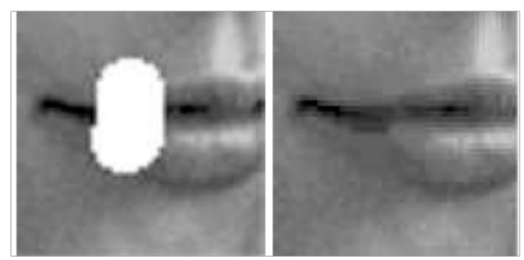
- Estimar datos para años intermedios donde no se tiene información, o bien predecir la tendencia en años pasados/futuros cerca de intervalo de datos

La población mundial para los años que se indicaran era:

Año	1965	1975	1985	1990
Población (millones)	3.340	4.080	4.850	5.290

- En la visión computacional parece ser algo inherente



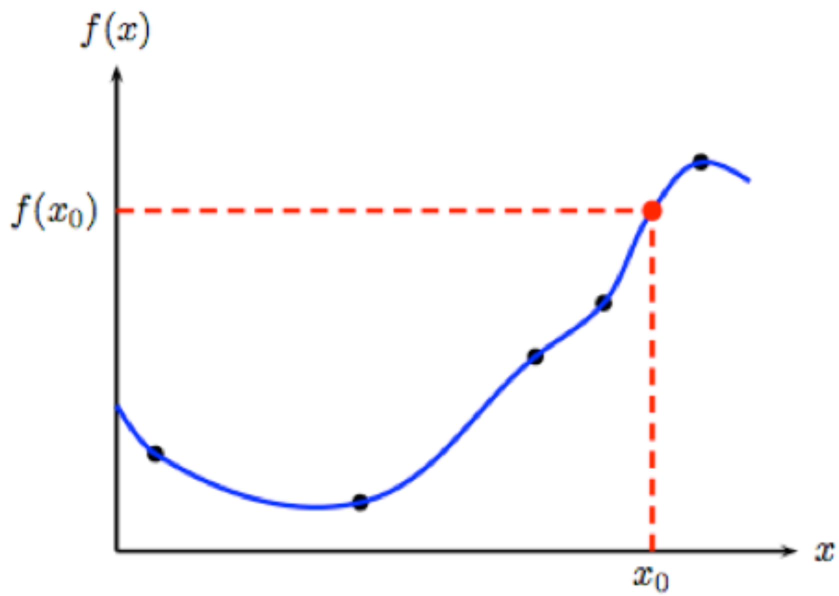


inpainting

Definición del problema de interpolación

Dada una tabla de valores (x_i, f_i) se desea estimar $f(x)$ para valores de x que no se encuentran en la tabla.

x_i	f_i
0.4	1.00
2.5	0.50
4.3	2.00
5.0	2.55
6.0	4.00



- Es decir, estaremos trabajando en este caso con funciones que van de $\Re \rightarrow \Re$.

Interpolación por aproximación polinomial

- Teorema de aproximación de Weierstrass (Teorema de análisis real): Suponga que la función f está definida y es continua en el intervalo $[a,b]$. Para cada $\varepsilon > 0$, existe un polinomio $P(x)$ tal que $| f(x) - P(x) | < \varepsilon$, para toda x en $[a,b]$.
    - En la demostración se ve que para unos polinomios (de Bernstein) cuando el grado del polinomio n tiende a infinito la diferencia $| f(x) - P_n(x) |$ tiende a cero.
- Ventajas de usar polinomios:
    - Derivadas e integrales están definidas de manera trivial y también son polinomios.
    - Computacionalmente, operaciones entre ellos, derivas e integrales son triviales de implementar.

Polinomios de Lagrange para interpolación

- Se definen dados una serie de puntos por donde queremos que el polinomio no tenga diferencia (error) con respecto a las observaciones.

- Ejemplo, dados 2 puntos (x_0,y_0) y (x_1,y_1) el polinomio de primer grado que pasa por estos puntos, es un aproximador de la función en el rango de las abscisas definido por los 2 puntos.

- Definamos las funciones

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{and} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},$$

- Implicando que:

$$L_0(x_0) = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1} = 1, \quad L_0(x_1) = \frac{x_1 - x_1}{x_0 - x_1} = 0, \quad L_1(x_0) = 0, \quad \text{and} \quad L_1(x_1) = 1.$$

Polinomios de Lagrange para interpolación

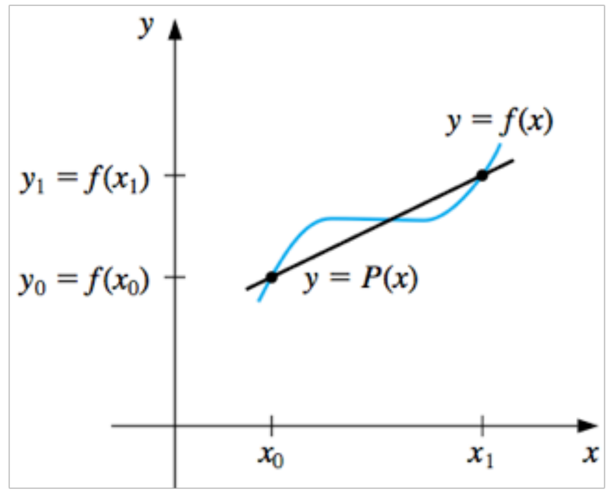
- Usando las funciones anteriores, definimos entonces el polinomio de aproximación de 1er orden como

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1).$$

- Este polinomio lineal cumple las propiedades que requerimos

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$



¿Qué pasa si lo evaluamos en $P(\,(x_0+x_1)/2\,)$?

Interpolación en Matlab

Funciones de polinomios de interpolación

P = POLYFIT(X,Y,N)

Y = P(1)*X^N + P(2)*X^(N-1) + ... + P(N)*X + P(N+1)

Y = POLYVAL(P,X)

Interpolación en Matlab

Ejemplo:

```
N = 10
x =1:N
y = -3*x.^2 + 1.7.*x -17;
figure; plot(x,y,'+')
p = polyfit(x,y,N-1)

v = polyval(p,1)
```

En la realidad los datos están “sucios”

Ejemplo:

```
y = -3*x.^2 + 1.7.*x -17 + rand(1, 10)*20;
```