

Últimas notas de SVD

MAT-25 I

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.

e-mail: alam@cimat.mx

web: http://www.cimat.mx/~alam/met_num/

Dr. Salvador Botello
CIMAT A.C.

e-mail: botello@cimat.mx

Relación entre los valores singulares y la solución del SEL

- Dado que que las matrices \mathbf{U} y \mathbf{V} de la descomposición SVD son ortonormales,

$$\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j = \delta_{ij}.$$

- Por lo tanto (**demostración de tarea**) $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = s_i\mathbf{u}_i$, y $\mathbf{A}^\top\mathbf{u}_i = s_i\mathbf{v}_i$.
- y dado un vector cualquiera $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se puede ver que (**hacerlo de tarea**)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n s_i(\mathbf{v}_i^\top \mathbf{x})\mathbf{u}_i$$

- Dado que $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ y si a partir de un cierto índice k , los valores singulares son un cero numérico, podemos tener una aproximación

$$\sum_{i=1}^{k-1} s_i(\mathbf{v}_i^\top \mathbf{x})\mathbf{u}_i \approx \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Relación entre los valores singulares y la solución del SEL

- El error de reconstrucción del producto sería $\left| \sum_{i=k}^n s_i (\mathbf{v}_i^\top \mathbf{x}) \mathbf{u}_i \right|$.

- Y por supuesto, nos interesa si estamos solucionando el SEL $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, donde la solución del SEL dada la descomposición SVD es (**hacer de tarea**):

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{u}_i^\top \mathbf{b}}{s_i} \mathbf{v}_i.$$

- Y para matrices mal condicionadas la solución por truncamiento es

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\mathbf{u}_i^\top \mathbf{b}}{s_i} \mathbf{v}_i$$

- suponiendo que todos los valores singulares s_i , con $i \geq k$ son “ceros numéricos”.

Numero de Condición de una matriz

MAT-25 I

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.

e-mail: alam@cimat.mx

web: http://www.cimat.mx/~alam/met_num/

Dr. Salvador Botello
CIMAT A.C.

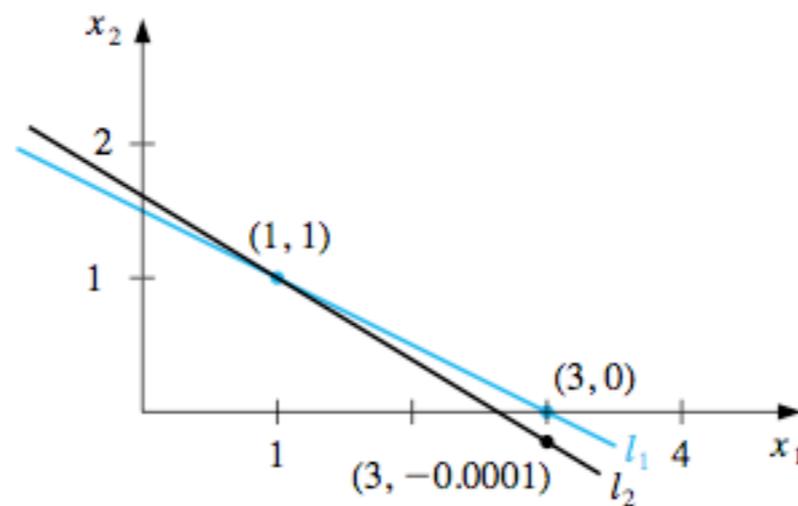
e-mail: botello@cimat.mx

Condicionamiento de una matriz

- El condicionamiento de una matriz nos da información sobre la sensibilidad de un SEL $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ a una perturbación en el término independiente o en la matriz.
- Esto significa: ¿que tan diferente es el valor que recuperamos de \mathbf{x} si hay una perturbación pequeña en el sistema? Esto es importante porque en muchas ocasiones trabajamos con datos con ruido en el vector \mathbf{b} o bien la aproximación numérica no es buena en los datos.
- Tener una idea de la sensibilidad es importante, ya que en la práctica si tenemos una aproximación a la solución $\hat{\mathbf{x}}$ podemos estimar $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{b}$ y esperaríamos que si $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ es pequeño $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|$ también lo sea. Sin embargo, si la sensibilidad es alta esto puede no ser cierto.

Sensibilidad, ejemplo

- Por ejemplo la solución aproximada $(3, -0.0001)$ del siguiente SEL de 2×2 es MUY MALA, sin embargo la norma del error $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b}$ es engañosamente pequeña porque las líneas son casi paralelas y parece que la aproximación incorrecta pertenece a las 2 líneas.



Análisis de sensibilidad (1)

- Consideremos el resultado de una perturbación en el término independiente dada una aproximación a la solución

$$A\hat{x} = b + \epsilon.$$

- la pregunta es qué tan parecida es la aproximación a la solución real x .
Sabemos que

- y dado que =

- se obtiene para el error relativo

Análisis de sensibilidad (1)

- Consideremos el resultado de una perturbación en el término independiente dada una aproximación a la solución

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

- la pregunta es qué tan parecida es la aproximación a la solución real \mathbf{x} .
Sabemos que

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon},$$

- y dado que $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}$
- se obtiene para el error relativo

Análisis de sensibilidad (1)

- Consideremos el resultado de una perturbación en el término independiente dada una aproximación a la solución

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

- la pregunta es qué tan parecida es la aproximación a la solución real \mathbf{x} .
Sabemos que

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon},$$

- y dado que $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| \implies \frac{1}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|} \leq \frac{1}{\|\mathbf{b}\|}$

- se obtiene para el error relativo

Análisis de sensibilidad (1)

- Consideremos el resultado de una perturbación en el término independiente dada una aproximación a la solución

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}.$$

- la pregunta es qué tan parecida es la aproximación a la solución real \mathbf{x} .
Sabemos que

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{x} + \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon},$$

- y dado que $\|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\| \implies \frac{1}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|} \leq \frac{1}{\|\mathbf{b}\|}$

- se obtiene para el error relativo

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \kappa \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Número de condición (1)

- Dado el resultado que acota el error de estimación **por arriba**

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \kappa \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

- Tenemos la siguiente definición: El número de condición de una matriz \mathbf{A} no singular relativo a la norma $\|\cdot\|$ es

- con $\kappa \geq 1$,

Número de condición (1)

- Dado el resultado que acota el error de estimación **por arriba**

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \kappa \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

- Tenemos la siguiente definición: El número de condición de una matriz \mathbf{A} no singular relativo a la norma $\|\cdot\|$ es

$$\kappa = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

- con $\kappa \geq 1$,

Número de condición (1)

- Dado el resultado que acota el error de estimación **por arriba**

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \kappa \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

- Tenemos la siguiente definición: El número de condición de una matriz \mathbf{A} no singular relativo a la norma $\|\cdot\|$ es

$$\kappa = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

- con $\kappa \geq 1$,
- ya que $1 = \|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| = \kappa$

Análisis de sensibilidad (1)

- Siguiendo el análisis de $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}$. Usando que

$$\|\boldsymbol{\epsilon}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|,$$

- nos lleva al siguiente resultado que acota el error de estimación **por abajo**.
- Lo cual nos da la información completa del número de condición:
- si \mathbf{x} y \mathbf{b} no son vectores de ceros.

Análisis de sensibilidad (1)

- Siguiendo el análisis de $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}$. Usando que

$$\|\boldsymbol{\epsilon}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|,$$

- nos lleva al siguiente resultado que acota el error de estimación **por abajo**.

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|} \geq \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{\kappa} \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

- Lo cual nos da la información completa del número de condición:

- si \mathbf{x} y \mathbf{b} no son vectores de ceros.

Análisis de sensibilidad (1)

- Siguiendo el análisis de $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}$. Usando que

$$\|\boldsymbol{\epsilon}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|,$$

- nos lleva al siguiente resultado que acota el error de estimación **por abajo**.


$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|} \geq \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{\kappa} \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

- Lo cual nos da la información completa del número de condición:

- si \mathbf{x} y \mathbf{b} no son vectores de ceros.

Análisis de sensibilidad (1)

- Siguiendo el análisis de $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}$. Usando que

$$\|\boldsymbol{\epsilon}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|,$$

- nos lleva al siguiente resultado que acota el error de estimación **por abajo**.

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|} \geq \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{\kappa} \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

- Lo cual nos da la información completa del número de condición:

- si \mathbf{x} y \mathbf{b} no son vectores de ceros.

Análisis de sensibilidad (1)

- Siguiendo el análisis de $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \boldsymbol{\epsilon}$. Usando que

$$\|\boldsymbol{\epsilon}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\| \quad \text{y} \quad \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|,$$

- nos lleva al siguiente resultado que acota el error de estimación **por abajo**.

$$\frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \geq \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{x}\|} \geq \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{\kappa} \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

- Lo cual nos da la información completa del número de condición:

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

- si \mathbf{x} y \mathbf{b} no son vectores de ceros.

Número de condición (2)

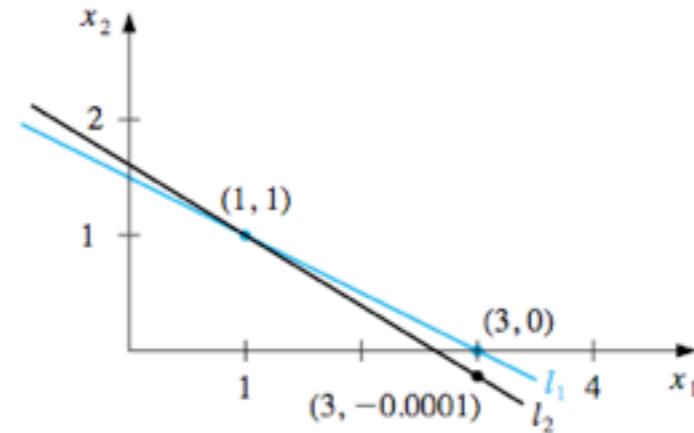
- Entonces, este resultado

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa \frac{\|\boldsymbol{\epsilon}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

- nos lleva a la siguiente conclusión: El error de estimación dependerá del error residual $\boldsymbol{\epsilon}$ siempre y cuando el número de condición sea pequeño.
- Una matriz es bien condicionada si κ es cercano a 1 y es mal condicionada si κ es significativamente mayor que 1.

Ejemplo de número de condición

- Para el sistema lineal de la figura



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}, \quad \|A\|_{\infty} = 3.0001$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 5000.5 & -5000 \end{bmatrix}, \quad \|A^{-1}\|_{\infty} = 20000,$$

- Entonces $\kappa = (3.0001) \cdot (20000) = 60002$
- Lo cual nos dice que en este caso no podemos confiar en el error residual.

Cálculo de κ

- ¿Como podemos calcular κ sin tener que invertir la matriz?
- Usamos la descomposición SVD
- y usamos la norma $\|\cdot\|_2$. Dado que U y V son ortonormales (no alteran la norma al operar) tenemos $\| \mathbf{Ux} \|_2 = \| \mathbf{x} \|_2$.
- En el caso matricial se tiene que para cualquier matriz \mathbf{B}
- ya que por ejemplo

Cálculo de κ

- ¿Como podemos calcular κ sin tener que invertir la matriz?
- Usamos la descomposición SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$,
- y usamos la norma $\|\cdot\|_2$. Dado que U y V son ortonormales (no alteran la norma al operar) tenemos $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$.
- En el caso matricial se tiene que para cualquier matriz \mathbf{B}
- ya que por ejemplo

Cálculo de κ

- ¿Como podemos calcular κ sin tener que invertir la matriz?
- Usamos la descomposición SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$,
- y usamos la norma $\|\cdot\|_2$. Dado que \mathbf{U} y \mathbf{V} son ortonormales (no alteran la norma al operar) tenemos $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$.

- En el caso matricial se tiene que para cualquier matriz \mathbf{B}

$$\|\mathbf{BU}\|_2 = \|\mathbf{B}\|_2 \quad \text{y} \quad \|\mathbf{UB}\|_2 = \|\mathbf{B}\|_2$$

- ya que por ejemplo

Cálculo de κ

- ¿Como podemos calcular κ sin tener que invertir la matriz?
- Usamos la descomposición SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$,
- y usamos la norma $\|\cdot\|_2$. Dado que \mathbf{U} y \mathbf{V} son ortonormales (no alteran la norma al operar) tenemos $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$.

- En el caso matricial se tiene que para cualquier matriz \mathbf{B}

$$\|\mathbf{BU}\|_2 = \|\mathbf{B}\|_2 \quad \text{y} \quad \|\mathbf{UB}\|_2 = \|\mathbf{B}\|_2$$

- ya que por ejemplo $\|\mathbf{BU}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{BU}\mathbf{x}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}'\|_2=1} \|\mathbf{B}\mathbf{x}'\|_2 = \|\mathbf{B}\|_2$

Cálculo de κ

- Usando lo anterior tenemos que

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{USV}^\top\|_2 = \|\mathbf{S}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{S}\mathbf{x}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i x_i)^2} =$$

- y de manera análoga

- Por lo tanto:

Cálculo de κ

- Usando lo anterior tenemos que

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{USV}^\top\|_2 = \|\mathbf{S}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{S}\mathbf{x}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i x_i)^2} = s_1$$

- y de manera análoga

- Por lo tanto:

Cálculo de κ

- Usando lo anterior tenemos que

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{USV}^\top\|_2 = \|\mathbf{S}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{S}\mathbf{x}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i x_i)^2} = s_1$$

- y de manera análoga

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \|\mathbf{US}^{-1}\mathbf{V}^\top\|_2 = \|\mathbf{S}^{-1}\|_2 = \frac{1}{s_n}$$

- Por lo tanto:

Cálculo de κ

- Usando lo anterior tenemos que

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{USV}^\top\|_2 = \|\mathbf{S}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{S}\mathbf{x}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^n (s_i x_i)^2} = s_1$$

- y de manera análoga

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \|\mathbf{US}^{-1}\mathbf{V}^\top\|_2 = \|\mathbf{S}^{-1}\|_2 = \frac{1}{s_n}.$$

- Por lo tanto:

$$\kappa = \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = \frac{s_1}{s_n}.$$

Soluciones de ecuaciones de una variable

MAT-25 I

Dr. Alonso Ramírez Manzanares
CIMAT A.C.

e-mail: alam@cimat.mx

web: http://www.cimat.mx/~alam/met_num/

Dr. Salvador Botello
CIMAT A.C.

e-mail: botello@cimat.mx

¿Que tipos de ecuaciones queremos solucionar?

¿Que tipos de ecuaciones queremos solucionar?

- Por supuesto, si queremos usar aproximaciones numéricas, quiere decir que los métodos algebraicos no son viables, o bien, que quizá (de una manera no muy correcta) tenemos un módulo que quiere detectar soluciones de ecuaciones que no sabe diferenciar casos que se pueden tratar de manera analítica.

¿Que tipos de ecuaciones queremos solucionar?

- Por supuesto, si queremos usar aproximaciones numéricas, quiere decir que los métodos algebraicos no son viables, o bien, que quizá (de una manera no muy correcta) tenemos un módulo que quiere detectar soluciones de ecuaciones que no sabe diferenciar casos que se pueden tratar de manera analítica.

¿Que tipos de ecuaciones queremos solucionar?

- Por supuesto, si queremos usar aproximaciones numéricas, quiere decir que los métodos algebraicos no son viables, o bien, que quizá (de una manera no muy correcta) tenemos un módulo que quiere detectar soluciones de ecuaciones que no sabe diferenciar casos que se pueden tratar de manera analítica.

- Ejemplo: solucionar para β ecuaciones del tipo

¿Que tipos de ecuaciones queremos solucionar?

- Por supuesto, si queremos usar aproximaciones numéricas, quiere decir que los métodos algebraicos no son viables, o bien, que quizá (de una manera no muy correcta) tenemos un módulo que quiere detectar soluciones de ecuaciones que no sabe diferenciar casos que se pueden tratar de manera analítica.
- Ejemplo: solucionar para β ecuaciones del tipo
 - $C_1 = C_2 e^\beta + C_3/\beta (e^\beta - C_4)$

¿Que tipos de ecuaciones queremos solucionar?

- Por supuesto, si queremos usar aproximaciones numéricas, quiere decir que los métodos algebraicos no son viables, o bien, que quizá (de una manera no muy correcta) tenemos un módulo que quiere detectar soluciones de ecuaciones que no sabe diferenciar casos que se pueden tratar de manera analítica.
- Ejemplo: solucionar para β ecuaciones del tipo
 - $C_1 = C_2 e^\beta + C_3/\beta (e^\beta - C_4)$
- donde los valores C_i son constantes.

Método de la bisección (búsqueda binaria)

- Dado un intervalo $[a,b]$ donde sabemos que está la raíz p , basándonos en el teorema del valor intermedio y de los signos de la evaluación de la función:

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$. Entonces para cada u tal que $f(a) < u < f(b)$, existe al menos un c dentro de (a, b) tal que $f(c) = u$.

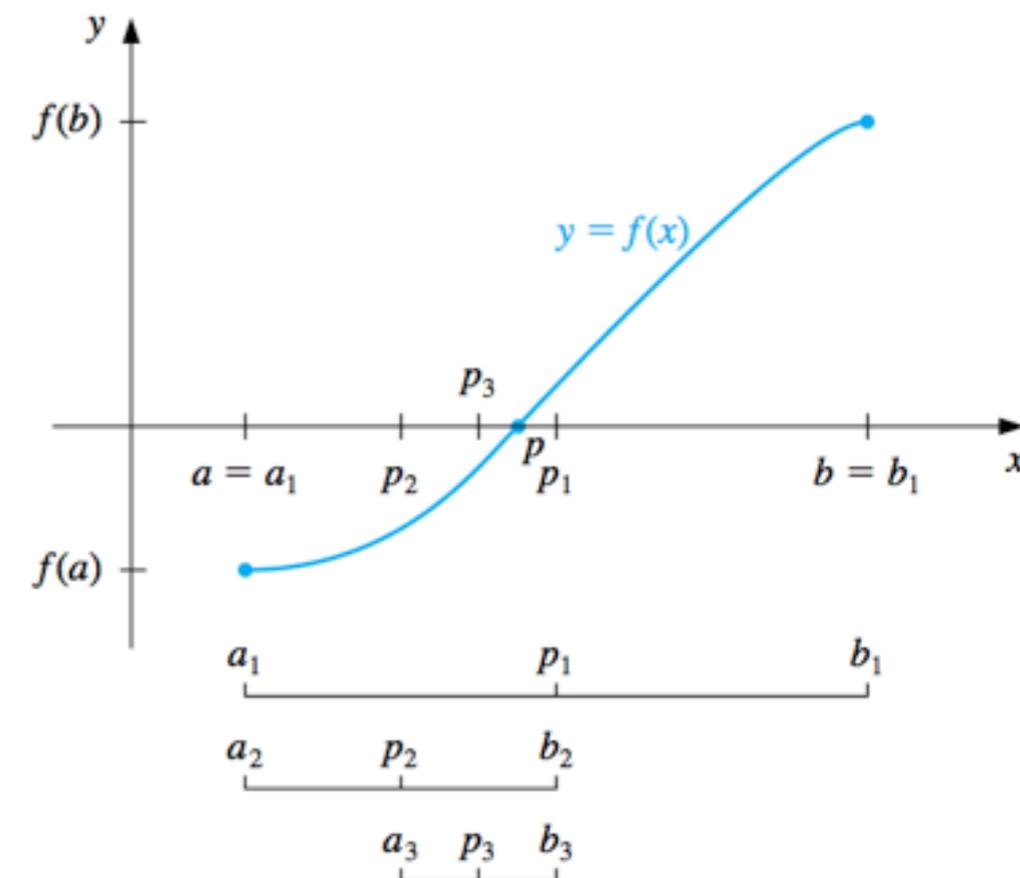
- procedemos a mover las cotas del intervalo de búsqueda hacia donde se encuentra la raíz con aproximaciones p_1, p_2, \dots, p_n .

Método de la bisección (búsqueda binaria)

- Dado un intervalo $[a,b]$ donde sabemos que está la raíz p , basándonos en el teorema del valor intermedio y de los signos de la evaluación de la función:

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$. Entonces para cada u tal que $f(a) < u < f(b)$, existe al menos un c dentro de (a, b) tal que $f(c) = u$.

- procedemos a mover las cotas del intervalo de búsqueda hacia donde se encuentra la raíz con aproximaciones p_1, p_2, \dots, p_n .



Método de la bisección (búsqueda binaria)

- Entonces, un intervalo $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ que contiene una aproximación a la raíz $f(x) = 0$ se construye del intervalo $[a_n, b_n]$ que contenía la raíz por medio de

$$p_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2}.$$

- Si $f(a_n)f(p_n) < 0$, hacemos $a_{n+1} = a_n$ $b_{n+1} = p_n$

- De lo contrario hacemos $a_{n+1} = p_n$ $b_{n+1} = b_n$

- Y debemos de agregar una tolerancia en el número de iteraciones o bien sobre la magnitud de la aproximación $f(p_i)$ (aunque esta última no es garantía).

Método de la bisección (búsqueda binaria)

- Nótese que el punto inicial está en medio del rango $[a,b]$ y que cada iteración divide el intervalo en 2 partes iguales, por lo que para nuestra aproximación de la raíz tenemos (empezando en la iteración 1):

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}.$$

- Por lo tanto para una tolerancia dada TOL tenemos que
- y podemos estimar el numero de iteraciones máximas como:

Método de la bisección (búsqueda binaria)

- Nótese que el punto inicial está en medio del rango $[a,b]$ y que cada iteración divide el intervalo en 2 partes iguales, por lo que para nuestra aproximación de la raíz tenemos (empezando en la iteración 1):

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}.$$

- Por lo tanto para una tolerancia dada TOL tenemos que

$$\frac{b - a}{2^n} < TOL.$$

- y podemos estimar el numero de iteraciones máximas como:

Método de la bisección (búsqueda binaria)

- Nótese que el punto inicial está en medio del rango $[a,b]$ y que cada iteración divide el intervalo en 2 partes iguales, por lo que para nuestra aproximación de la raíz tenemos (empezando en la iteración 1):

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}.$$

- Por lo tanto para una tolerancia dada TOL tenemos que

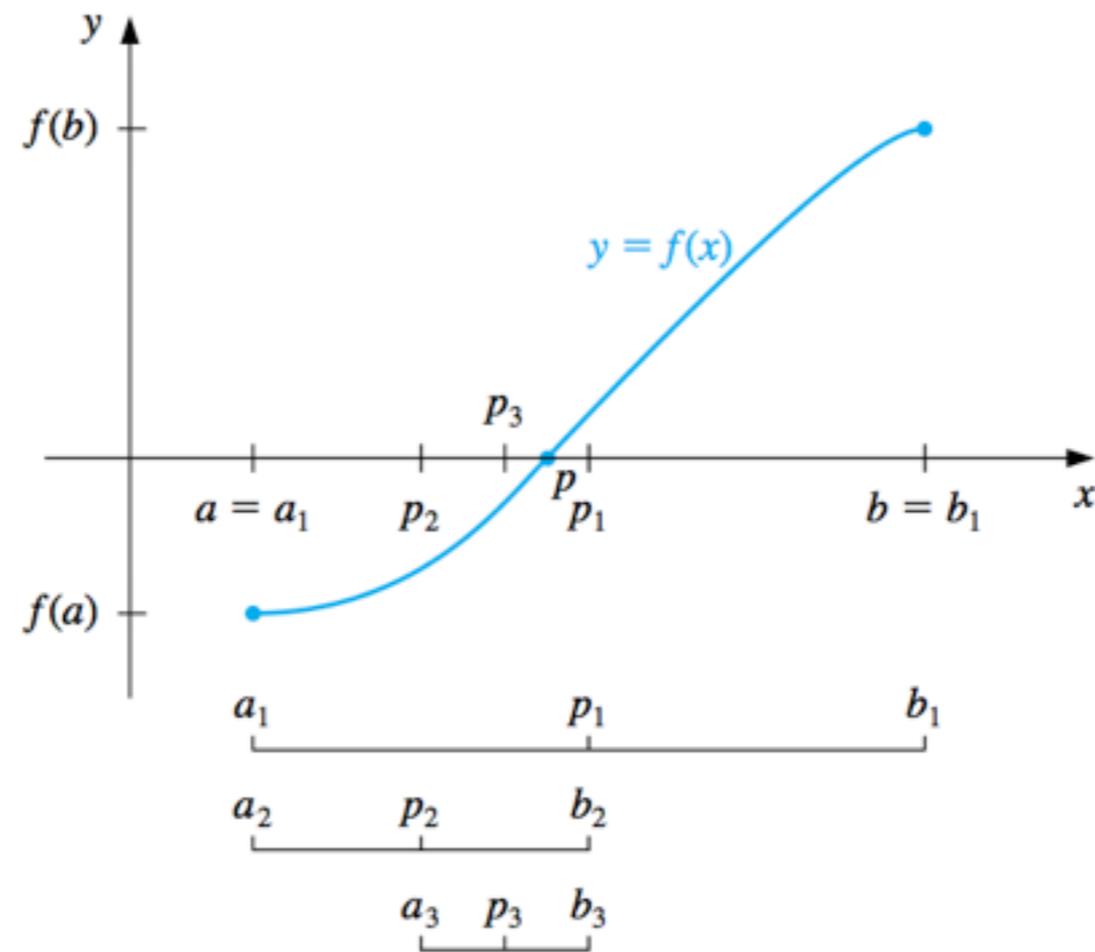
$$\frac{b - a}{2^n} < TOL.$$

- y podemos estimar el numero de iteraciones máximas como:

$$\log_2 \left(\frac{b - a}{TOL} \right) < n.$$

Método de la bisección (búsqueda binaria)

- Nótese que p_1 podría estar más cerca de la raíz que p_2 , en este sentido el algoritmo es “ciego”.



- La cota que calculamos es máxima, en muchas ocasiones se necesitan menos iteraciones.

Método de la bisección (búsqueda binaria)

- Consideraciones numéricas

- El punto medio se debe de calcular con $p_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$
- y no con $p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.
- ya que cuando $b_n - a_n$ es muy pequeño habrá errores de aproximación. En la primera se hace una corrección a un a_n conocido, en la segunda ecuación el punto medio puede estar fuera del intervalo.

- Cuando se pregunta $f(a_n) * f(p_n) < 0$, es mejor usar la función signo

- $\text{sgn}(f(a_n)) * \text{sgn}(f(p_n)) < 0$

- ya que la multiplicación original puede dar un “overflow” o un “underflow”.

- Es lento pero siempre converge a la solución, a veces se usa como inicializador de otros métodos.

Serie de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x - a)^3 + \dots$$

Método de Newton ó Newton-Rapson

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Supongamos que $f \in C^2[a,b]$, sea p_0 una aproximación de la raíz real p tal que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p-p_0|$ es pequeño.

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Supongamos que $f \in C^2[a,b]$, sea p_0 una aproximación de la raíz real p tal que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p-p_0|$ es pequeño.
- La aproximación de la serie de Taylor de primer orden alrededor de p_0 es

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Supongamos que $f \in C^2[a,b]$, sea p_0 una aproximación de la raíz real p tal que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p-p_0|$ es pequeño.
- La aproximación de la serie de Taylor de primer orden alrededor de p_0 es
 - $f(x) \approx f(p_0) + (x - p_0) f'(p_0)$

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Supongamos que $f \in C^2[a,b]$, sea p_0 una aproximación de la raíz real p tal que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p-p_0|$ es pequeño.
- La aproximación de la serie de Taylor de primer orden alrededor de p_0 es
 - $f(x) \approx f(p_0) + (x - p_0) f'(p_0)$
 - evaluándolo en p tenemos

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Supongamos que $f \in C^2[a,b]$, sea p_0 una aproximación de la raíz real p tal que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p-p_0|$ es pequeño.
- La aproximación de la serie de Taylor de primer orden alrededor de p_0 es
 - $f(x) \approx f(p_0) + (x - p_0) f'(p_0)$
 - evaluándolo en p tenemos
 - $0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0)$

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Supongamos que $f \in C^2[a,b]$, sea p_0 una aproximación de la raíz real p tal que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p-p_0|$ es pequeño.
- La aproximación de la serie de Taylor de primer orden alrededor de p_0 es
 - $f(x) \approx f(p_0) + (x - p_0) f'(p_0)$
 - evaluándolo en p tenemos
 - $0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0)$
- (como $|p - p_0|$ es muy pequeño, despreciamos la contribución del término de 2º orden que multiplica por esta diferencia elevada al cuadrado).

Método de Newton ó Newton-Rapson

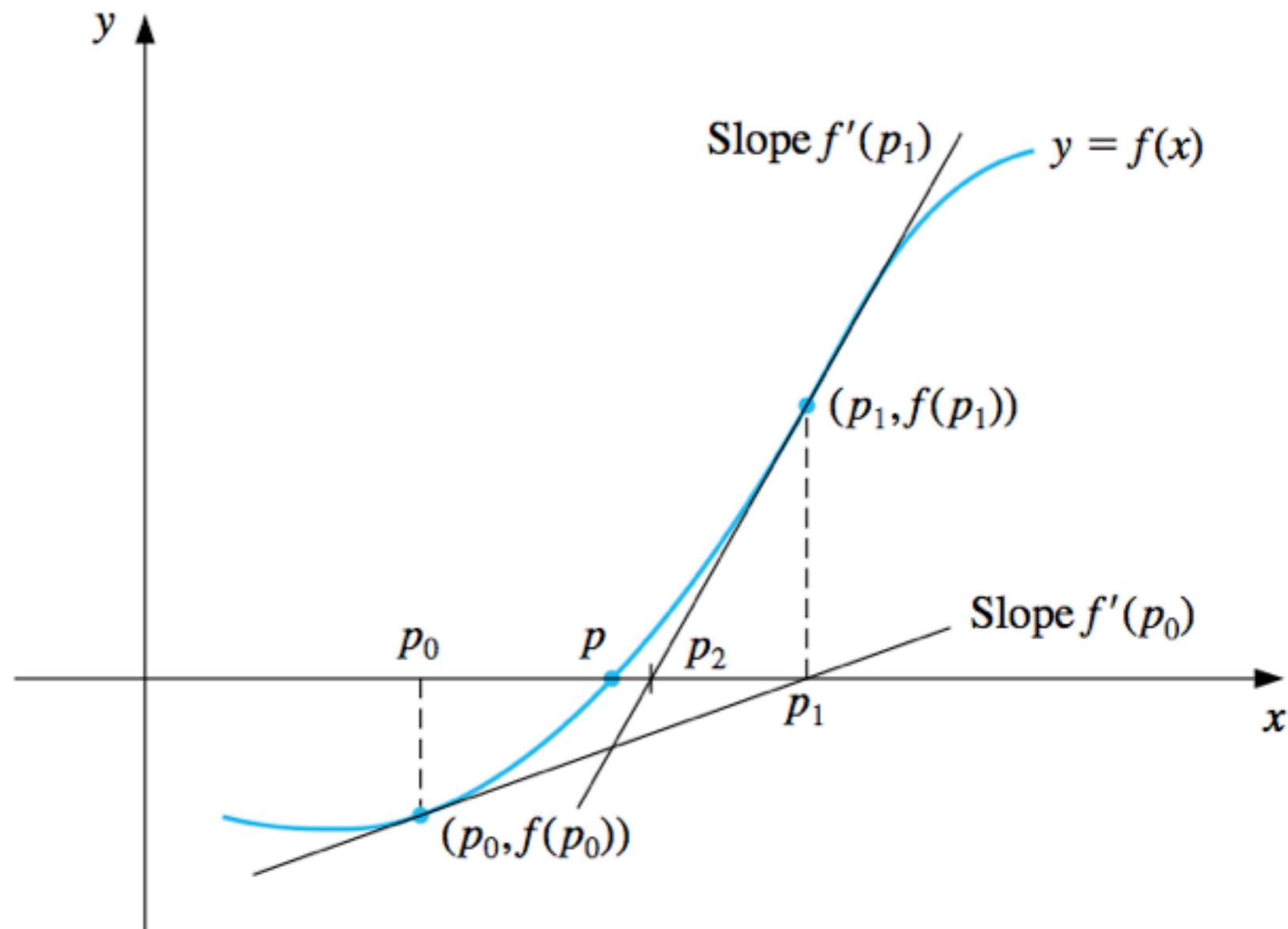
- Despejando p de
 - $0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0)$
- tenemos
 - $p = p_0 - f(p_0) / f'(p_0)$
- Dando como resultado la aproximación sucesiva

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)},$$

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Despejando p de
 - $0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0)$
- tenemos
 - $p = p_0 - f(p_0) / f'(p_0)$
- Dando como resultado la aproximación sucesiva

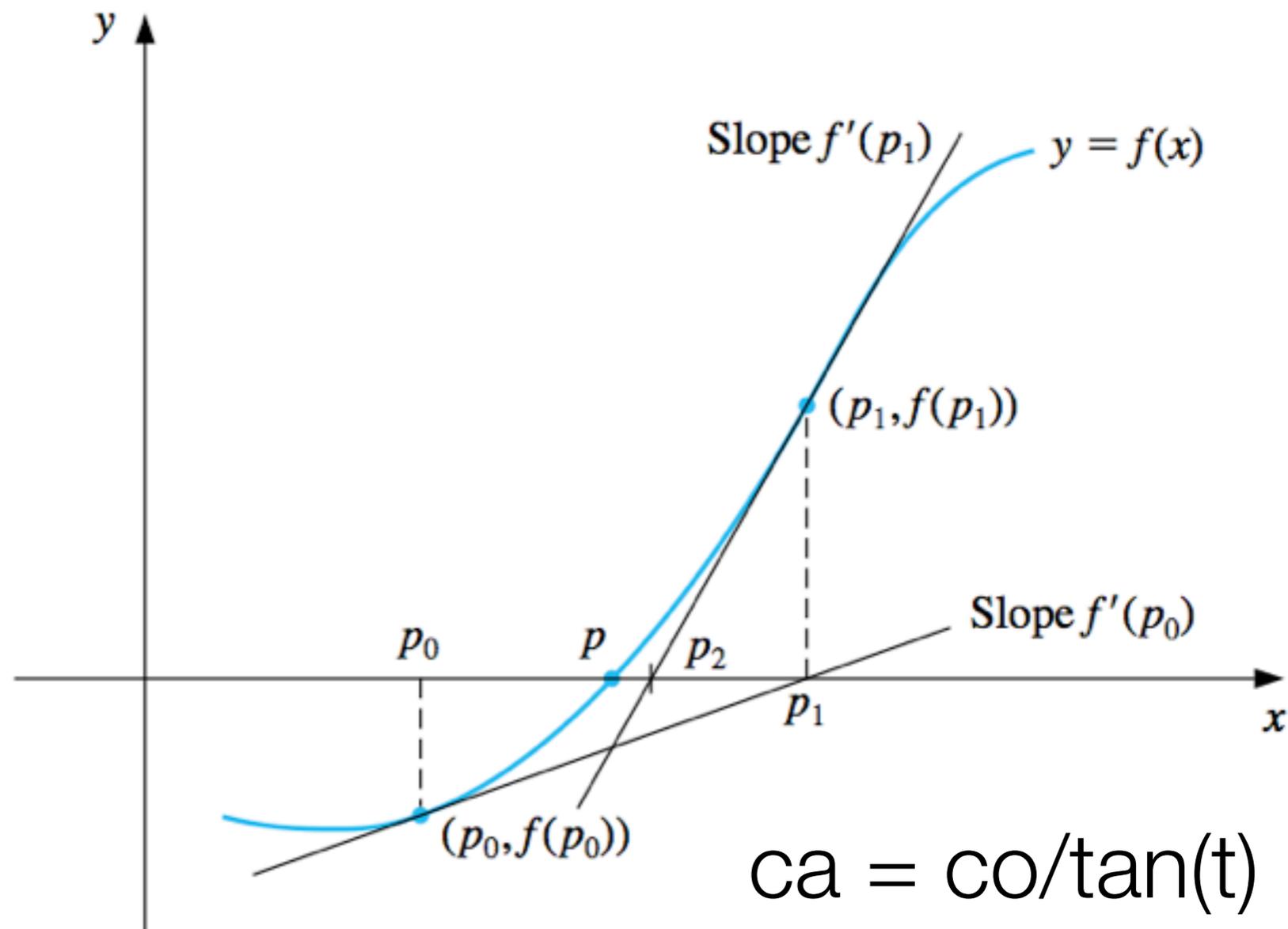
$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)},$$



Método de Newton ó Newton-Rapson

- Despejando p de
 - $0 \approx f(p_0) + (p - p_0) f'(p_0)$
- tenemos
 - $p = p_0 - f(p_0) / f'(p_0)$
- Dando como resultado la aproximación sucesiva

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)},$$



Método de Newton ó Newton-Rapson

- El algoritmo iterativo queda por supuesto

$$p_{n+1} = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}.$$

- Criterios de paro
 - $|p_n - p_{n-1}| < e$
 - $|p_n - p_{n-1}| / |p_n| < e$
 - $f(p_n) < e$

Método de Newton ó Newton-Rapson

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Se necesita tener una buena aproximación de la derivada, pero si esta es buena, el método converge rápidamente.

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Se necesita tener una buena aproximación de la derivada, pero si esta es buena, el método converge rápidamente.
- Para haber usado la aproximación de Taylor de primer orden, también se supone que el punto está cerca tal que el término de segundo orden es despreciable.

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Se necesita tener una buena aproximación de la derivada, pero si esta es buena, el método converge rápidamente.
- Para haber usado la aproximación de Taylor de primer orden, también se supone que el punto está cerca tal que el término de segundo orden es despreciable.
- Por eso se puede usar como método de refinamiento dado un inicializador como el método de la bisección.

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Se necesita tener una buena aproximación de la derivada, pero si esta es buena, el método converge rápidamente.
- Para haber usado la aproximación de Taylor de primer orden, también se supone que el punto está cerca tal que el término de segundo orden es despreciable.
- Por eso se puede usar como método de refinamiento dado un inicializador como el método de la bisección.
- Si p es el valor de la raíz, ¿qué pasa si $f'(p) \sim 0$?

Método de Newton ó Newton-Rapson

- Se necesita tener una buena aproximación de la derivada, pero si esta es buena, el método converge rápidamente.
- Para haber usado la aproximación de Taylor de primer orden, también se supone que el punto está cerca tal que el término de segundo orden es despreciable.
- Por eso se puede usar como método de refinamiento dado un inicializador como el método de la bisección.
- Si p es el valor de la raíz, ¿qué pasa si $f'(p) \sim 0$?
- Desventaja importante: necesitamos calcular el valor de la derivada en cada paso. Si la estimamos, se deriva **el método de la secante**.