La libreta pingüino

Elaborado por Marte Alejandro Ramírez Ortegón

Septiembre de 2005

Índice de contenido

A mi madre

A mi padre

A mis entrenadores

1 La demostración en las matemáticas

Uno de los principales objetivos en la olimpiada, es la de enseñar a los jóvenes un pensamiento ordenado y la capacidad para plasmar sus ideas así como para demostrar de manera rigurosa, las afirmaciones matemáticas que se plantean en los problemas.

El mayor reto de un chico, cuando se inicia en el mundo de las matemáticas, es la de entender que es una demostración y de qué cosas se permiten emplear y que no. El pensamiento ordenado y lógico es una habilidad que se desarrolla no con una lectura sino a través de un proceso de preparación que requiere una fuerte dosis de perspicacia y otra tanta de disciplina.

¿Qué es una demostración matemática? A palabras simples, es una secuencia de afirmaciones lógicas, las cuales suceden una a la otra para llegar de una proposición inicial a otra proposición final. Podríamos decir que es una secuencia de enunciados, cada enunciado nuevo, se desprende del enunciado anterior hasta llegar a una afirmación final.

Por ejemplo, supongamos que sabemos lo siguiente:

Todos los mamíferos amamantan a sus crías.

Sólo los elefantes, vacas y leones son mamíferos.

Entre los mamíferos, sólo los leones comen carne.

De lo anterior podríamos deducir algunas cosas si alguien nos dice: *He visto un animal amarillo que come carne y amamanta a sus cachorros*. Entonces podemos deducir lo siguiente:

Si amamanta sus crías, entonces es mamífero. Por tanto, sólo puede ser un elefante o vaca o un león.

Sólo los leones comen carne, entonces, los leones son amarillos.

En general supongamos que afirmamos que si x ocurre, entonces ocurre y. Sin embargo no es evidente que x implica y. Por lo que es necesario pasar por afirmaciones intermedias, estas ideas intermedias se desprenden una de otra. Supongamos que de x es obvio que pasa z. Ahora, pensando que pasa z es obvio que pasa w,y así sucesivamente, hasta que llegamos a una idea q tal que y. es evidente.

Problema 1 La suma de tres números enteros consecutivos es múltiplo de tres.

Primero pensemos como representar tres números consecutivos de manera general. La una forma tradicional es: n, $(n+1)$ y $(n+2)$. Ahora procedemos a sumar para ver que pasa.

$n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3$

Ahora evidente que podemos factorizar el tres y de ello se desprende que es múltiplo de tres.

L.Q.Q.D

En el anterior ejemplo hemos hecho un paso muy importante… Generalizar la idea. Ya que es imposible mostrar para todas las ternas de números consecutivos, es necesario encontrar una manera de mostrar, de manera general, como todos los números cumplen con dicha proposición. En nuestro caso, la generalización se consigue con denominar a n como un número cualquiera y mostrar adecuadamente sus números consecutivos.

Problema 2 Lo números 1, 2, 3,… 100 se ponen en el arreglo de 10x10 como se muestra en la figura. Si escoges 10 números de tal modo que no haya dos de ellos en el mismo renglón o columna. ¿Cuáles son las posibles sumas que te pueden dar estos números?

1	**2**	**3**	**…**	**10**
11	**12**	**13**	**…**	**20**
…				**…**
91	**92**	**93**	**…**	**100**

Cuadrícula de números.

La respuesta es 505. Una demostración es la siguiente: Primero que nada, se toma un número de cada renglón (ya que no hay otra manera de escoger 10 diferentes de diferente reglón). Ahora observemos que en cada renglón se tiene un número puede escribirse como la suma de las decenas más las unidades. Para cada renglón sabemos cuanto es el valor de las decenas pero no de las unidades, por lo que tendríamos algo así:

Para el primer renglón: $0 + x_1$

Para el segundo renglón: $10 + x_2$

Para el tercer renglón: $20 + x_3$

…

Para el décimo renglón: $90 + x_{10}$

En total tenemos que la suma es: $(10+20+…+90) + (x_1+ x_2+…+ x_{10})$. Ahora recordemos que las x son dígitos y son diez diferentes. Entonces es la suma del uno al diez. En conclusión se tiene: $450 + 55 = 505$.

L.Q.Q.D

En el problema dos, se requirió una capacidad de abstracción sobre la estructura del problema planteado. En muchas ocasiones, la cantidad de casos es enorme, por no decir infinita. Por ello, se requiere buscar formas alternativas que reduzcan nuestro problema inicial. Nuestra alternativa fue precisamente dividir nuestro problema por los renglones. De manera similar, el problema 3, ejemplifica como la diversidad de alternativas se puede reducir en tan solo dos casos.

Problema 3 Considera un juego para dos jugadores. El juego consiste en retirar, de manera alternada, una moneda de uno de los extremos de una fila de monedas. La fila de monedas está formada por $2n$ monedas de diferente denominación y además, la suma de todas es un número impar. ¿Existe estrategia ganadora para algún jugador y si la hay, muestra como?*

* Una estrategia ganadora es aquella que garantiza el triunfo del jugador.

El jugador uno gana: La forma es la siguiente: El jugador uno cuenta cuanto suman las monedas que ocupan los lugares impares de la fila (contando de izquierda a derecha por ejemplo) y cuanto los del lugar par. Si las monedas del lugar impar suman más, entonces para cada jugada, el jugador uno escoge la moneda del extremo que ocupe un lugar impar. En el otro caso, escogería las monedas que ocupan el lugar par.

L.Q.Q.D

Para el problema 4, se requiere un grado de observación sobre el comportamiento de todos los números enteros, con respecto al número 11. Analizar y recordar las propiedades básicas de divisibilidad, nos proporciona una manera de simplificar nuestro problema a unos cuantos casos. El truco consiste en fijarnos en los residuos de los números.

Problema 4 En una colección de 7 números siempre hay dos cuya suma o diferencia es múltiplo de 7.

Primero hagamos una observación sencilla. Si dos números de la colección son iguales, entonces, podemos tomarlos y restarlos con lo que tendríamos un múltiplo de 11.

Más aún si dos números dejan el mismo residuo, entonces al estarlo tendremos un múltiplo de 11. Para verlo basta con representarlos de la siguiente manera:

$x = 11k + r$ y sea $y = 11q + r$

entonces al restar tenemos $x .- y = 11(k - q)$ lo cual es múltiplo de 11.

Entonces entre los 7 número no podemos tener dos números con el mismo residuo. Pensemos que todos tienen diferente residuo. Observemos que los residuos de las siguientes parejas no pueden estar juntas pues tendríamos que su suma es múltiplo de 11: (1,10), (2,9), (3,8), (4,7) y el (5,6). En todos los casos, no debemos tener dos números que formen una de esas parejas. Pero sólo contamos con 6 parejas diferentes, por lo que sólo podemos tomar 6 residuos diferentes antes de formar una pareja.

L.Q.Q.D

1.1 La demostración por inducción

La inducción es un poderoso método empleado para la demostración de proposiciones que de manera directa suelen ser difíciles o truculentas. Se emplea sobre el dominio de los naturales, esto es, el proceso sólo tiene valides cuando hablamos de cosas enteras que tienen un inicio aunque no necesariamente un final. El método se divide en tres partes.

1. Comprobación de los casos iniciales.
2. Proposición de la hipótesis de inducción.
3. Demostración del paso de inducción.

Para explicarlo, recurriremos a un ejemplo sencillo. Demostremos que la suma de los primeros *n* números es igual a $S(n)=\frac{n(n+1)}{2}$.

Probemos que la formula es correcta para *n* = 1:

$\frac{1(1+1)}{2}=1$ Entonces hemos probado que es válido para *n* = 1.

Hagamos la hipótesis de inducción: "la fórmula $S(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ es válida para todo entero menor o igual a *n*".

Hagamos el paso de inducción.

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n+1)=[1+2+3+\ldots+n]+(n+1)$$

Ahora recordemos que por hipótesis de inducción, la suma hasta *n* es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$ entonces:

$$S(n+1)=S(n)+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ahora veamos que la suma es igual a la fórmula de la hipótesis salvo que se sustituye *n* por *n* + 1.

L.Q.Q.D

Intuitivamente, hemos demostrado que la formula es correcta para $n = 1$ en el paso 1. Luego en el paso 3, demostramos que si la fórmula fuera correcta para n entonces también lo es para $n + 1$. Entonces, como demostramos para $n = 1$. entonces la fórmula es válida para 2, pero ahora sabemos que la fórmula es válida para 2, entonces es valida para 3, como es válida para 3, es válida para 4, etc…

Problema 5 Demostrar que para todo entero n $3^{2n+1}+2^{n+2}$ es múltiplo de 7.

Probemos para n = 1. $3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35$ el cual es múltiplo de 7.

Supongamos que la afirmación es cierta para n. Probemos para $n + 1$.

$$3^{2(n+1)+1}+2^{n+1+2}=3^{2n+3}+2^{n+3}$$
$$3^{2n+3}+3^2 2^{n+2}+2^{n+3}-3^2 2^{n+2}$$
$$3^2\left(3^{2n+1}+2^{n+2}\right)+2^{n+2}(2-9)$$

Recordemos veamos que por hipótesis de inducción, el primer sumando es múltiplo de 7 mientras que el segundo sumando tiene un factor -7 al realizar la resta. Por tanto, es múltiplo de 7.

L.Q.Q.D

Como pudimos apreciar, la inducción nos ha facilitado la demostración de una fórmula que sospechamos correcta pero cuya demostración sería muy difícil. En todas las demostraciones, es indispensable utilizar la hipótesis de inducción durante la demostración del paso de inducción. En nuestro caso, astutamente metimos unos factores para poder sacar el factor conocido de la hipótesis.

Problema 6 Demostrar que la suma de los primero n cuadrado es igual a:

$$S(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Probemos $n = 1$. $S(1)=\frac{1*2*3}{6}=1$

Supongamos que es válido para n, probemos que es válido para $n + 1$.

$$S(n+1)=1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$
$$S(n+1)=(n+1)\left[\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right]=(n+1)\left[\frac{2n^2+n+6n+6}{6}\right]$$
$$S(n+1)=(n+1)\left[\frac{(n+2)(2n+3)}{6}\right]=(n+1)\left[\frac{((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}\right]$$

L.Q.Q.D

Como pudimos apreciar, el método de la inducción nos facilita la demostración de ciertas afirmaciones. Sin embargo, tiene un grave defecto, no es deductiva… Es decir, nosotros tenemos que concluir o sospechar de alguna afirmación y después demostrarla. Con la inducción, no hemos determinado la fórmula, sólo hemos comprobado la fórmula dada o la afirmación dada. Por tanto, la inducción se aplica únicamente para comprobar algo que se afirma.

1.2 Demostración por contradicción

Hace muchos siglos, Euclides demostró que la cantidad de números primos es infinita. Es decir, siempre puedes encontrar un primo mayor a otro primo dado. ¿Cómo puede demostrar que hay infinitos si no hay manera de contarlos? La solución es pensar de manera inversa. Pensemos por un momento que no hay un número infinito de primos. Entonces, se pueden colocar, todos los primos, en una lista de la siguiente forma: $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n$.

Sea $s = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots p_n + 1$. Claramente s es mayor al más grande de los primos. Además, debe ser un número compuesto ya que p_n es el último primo que hay. Sin embargo, observemos lo siguiente. Si s es compuesto, entonces algún primo lo tiene que dividir. Supongamos que ese primo es p_i. Entonces $p_i | s \Rightarrow p_i | p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n + 1$ Pero es claro que p_i divide a $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_n$ ya que es un factor de este, por lo que también tiene que dividir a 1!!! Esto es una contradicción ya que ningún primo divide a uno.

¿Qué salio mal? Todas las implicaciones son correctas suponiendo que la anterior es correcta. Sin embargo, al final hemos llegado a algo que ¡no puede ser! Pensemos que tenemos x, y_1, y_2,,…y_n, z. donde y_1 es la implicación que se tiene si x es verdadera, y_2 es la implicación que se tiene si y_1 es verdadera, etc… hasta llegar a z si y_n. Esto es:

- $x \Rightarrow y_1$
- $y_1 \Rightarrow y_2$
- $y_2 \Rightarrow y_3$
- …
- $y_n \Rightarrow z$

Sin embargo, z es verdadera sólo si y_n es ocurre pero y_n, ocurre si y_{n-1}, ocurre, y así sucesivamente hasta llegar a y_1, el cual ocurre sólo si x es verdadera. Por tanto, como la z es falsa, entonces x es falso.

Problema 7 Si tenemos la suma: $1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 100$ ¿Es posible acomodar los signos + o – de tal modo que la suma sea 2005?

La respuesta es ¡NO! Hagamos la demostración por contradicción. Supongamos que hay una manera de encontrar dicho acomodo. Si a un número k se le asigna un negativo, entonces eso equivale a sumarlo una vez y restarlo dos (k – $2k$=k). Por tanto, podemos pensar que el arreglo solución puede verse de este modo:

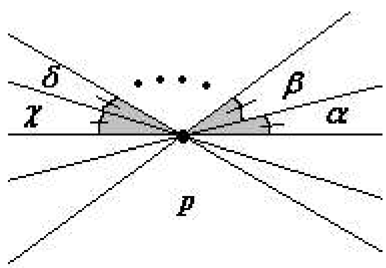
2005 = S -2Q donde S es la suma de todos los números del 1 al 100 y Q es la suma de los números que hemos escogido como negativos. Haciendo cuentas:

2005 = 5050 – 2Q. Despejando se tiene: 2Q = 3045 Lo que implica que 2 divide a 3045!!! Contradicción y por tanto no hay manera alguna.

L.Q.Q.D

Problema 8 Demostrar que al menos dos de las diagonales de un polígono 20 se interceptan en un ángulo menor o igual a 18 grados.

Tomemos una diagonal como horizontal y tracemos una paralela a cada diagonal, que pase por un punto p como se muestra en la figura.



Entonces tenemos 20 ángulos (uno por cada diagonal) marcados como grises. Ahora, es fácil ver que todos ellos tienen que sumar 180º en total. Si pensamos que ni uno de ellos es menor o igual 18º entonces se tiene que

$$\alpha > 18^{\circ}$$

$$\beta > 18^{\circ}$$

$$\ldots$$

$$\chi > 18^{\circ}$$

$$\delta > 18^{\circ}$$

Entonces la suma es $\alpha + \beta + .. \chi + \delta > 360^{\circ}$ Lo cual es una contradicción ya que la suma debe ser 360º exactamente.

L.Q.Q.D

Problema 9 Si en el juego de ajedrez se permitieran dos movimientos por jugada. Demostrar que el primer jugador tiene un estrategia no perdedora (una estrategia no perdedora es la estrategia que garantiza que el jugador no perderá aunque no necesariamente gane).

La respuesta es sencilla. Si el jugador dos tuviera una estrategia ganadora (es decir, una estrategia que le garantiza la victoria sobre sus oponentes), entonces el jugador uno movería y regresaría el caballo en la primera jugada (utilizando un movimiento para mover y otro para regresar el caballo). De ese modo, el jugador uno toma la postura del jugador dos y por tanto podría utilizar la jugada ganadora del jugador dos. Por tanto, siempre hay una estrategia no perdedora del jugador uno.

L.Q.Q.D

2 Divisibilidad

Cuando consideramos dos números naturales (nosotros consideraremos el cero también como natural), *n* y *m*, decimos que ***m* divide a *n***, cuando existe otro entero positivo k tal que: $n = m \cdot k$

En tal caso, decimos que n es un múltiplo de m y que m es un divisor de n. La notación m|n es empleada para indicar que m es divisor de n. Cuando un número no es divisor de otro lo denotaremos como m¦n. Para este caso es posible mostrar que existen un par único de naturales q y r tal que: $n = m \cdot q + r$ con $0 < r < m$. Observemos que cuando n se divide entre m se tiene como cociente a q y como residuo a r.

Lista 2.1:Sea *n, m, s, w, k* naturales entonces se tienen las siguientes relaciones:

1. **$n|n$ para toda n (Es reflexiva).**
2. **$n|0$ para toda n.**
3. **Si $n|m$ y $m|n$ si y sólo si $n = m$.**
4. **Si $n|m$ y $m|s$. Entonces $n|s$ (Es transitiva).**
5. **Si $n|m$ Entonces $n|k \cdot m$ para toda *k*. Esto es, divide a todos sus múltiplos.**
6. **Si $n|m$ y $n|s$. Entonces $n|(k \cdot m \pm s \cdot w)$.**
7. **Si $n|m$ y $n|(m \pm s)$. Entonces $n|s$.**

2.1 Primos

Decimos que *un número entero positivo p es* ***primo*** *si y sólo si tiene exactamente dos divisores diferentes*. En particular, se concluyen que tales números son: 1 y *p*. Los números primos son muy estudiados por las propiedades peculiares que presentan. Entre ellas podemos enunciar el teorema fundamental de la aritmética que dice:

Teorema 1: ***Teorema fundamental de la aritmética****: Todo número que no es primo es compuesto y tiene una factorización única de primos salvo por permutaciones en el orden de los primos.*

Lista 2.1.1: Sea *n, m* naturales y *p* primo. Entonces se tienen las siguientes relaciones:

1. **Si $p|n \bullet m$. Entonces p|n ó p|m**
2. **Si $p \nmid n$ para toda $p < \sqrt{n}$. Entonces n es primo**
3. **Si pk|n y qs|n con $p \neq q$ primos. Entonces pk•qs|n**

La relación 1 aprovecha la propiedad de indivisibilidad de un número primo. De este modo, si un número k se puede expresar como múltiplo de otros dos números n, m y si $p|k$ entonces, p tiene qué ser divisor de al menos uno de los dos números.

De la relación 2 de la lista anterior se tiene un resultado en la búsqueda de primos. "n" es primo si para todo primo $p< \sqrt{n}$ $p \nmid n$ (p no divide a n). Lo cual no a una cota para buscar los divisores primos de un número cualquiera y ver si es primo o no.

Con la tercera relación tenemos un hecho importante ya que si queremos demostrar que un número m divide a otro n. Basta demostrar que cada primo, con su debida multiplicidad, que divide a m también divide a n.

2.2 Máximo Común Divisor

El **Máximo Común Divisor** o m.c.d. de dos números n y m se define como el número más grande que es divisor tanto de n como de m. Se denota como (n,m). Siempre existe el m.c.d. de dos o m´s números ya que le 1 es divisor de todos los naturales. En particular se tiene las siguientes propiedades:

Lista 2.2.1: Sea $n > m, s, w, d$ números naturales y k = m.c.d.(n,m)

1. **Si $d|n$ y $d|m$. Entonces $d|k$**
2. **$k|(s \bullet n \pm w \bullet m)$**
3. **m.c.d.(n,n) = n**
4. **Si $n = m \bullet s$. Entonces m.c.d.(n,m) = m**
5. **Si $n = m \bullet s + w$ con $0 < w < m$. Entonces m.c.d.(n,m) = m.c.d.(m,w)**

De la propiedad dos y tres tenemos un importante resultado del derivó el algoritmo de Euclides. Euclides pensó hace mucho tiempo un procedimiento para obtener el m.c.d. de dos números naturales empleando la propiedad de $k|(n - m)$. Observemos que **m.c.d.(n,m) = m.c.d.(n-m,m)** Con la diferencia de que si $n - m < n$.

2.2.1 Algoritmo de Euclides

El Algoritmo de Euclides se basa en las propiedades 4 y 5. Debido a que podemos simplificar el problema al pasar de dos números n y m (con Si $n = m \bullet s + w$) a lo números m y w donde claramente $w < n$. Entonces conviene estudiar más a fondo dicha propiedad. Recordemos que una manera de encontrar el m.c.d. es encontrar todos los factores comunes del par de números con los que se trabaja. Sin embargo, el anterior método tiene un grave inconveniente ante números grandes (digamos arriba de

1000). Ya que exige probar con todos los primos menores lo que, sin duda, es un trabajo arduo y tedioso. Afortunadamente, gracias a Euclides tenemos un proceso iterativo con el que podemos calcular de manera más eficiente y rápida (y sin necesidad de conocer los primos) el m.c.d.

Sea n y m dos números con $n = m \bullet s + w$. Entonces sigamos los siguientes pasos:

1) Sea w el residuo de dividir n entre m y pasamos al paso 2 o 3 según la w.

2) Si w **es cero**, entonces m es el m.c.d. de n y m. Por lo tanto m es nuestro m.c.d. de los números n y m originales.

3) Si w **no es cero**, entonces sustituyamos a n por m y a m por w y volvamos al paso 1.

Ejemplo:

Sea $n = 23983$ y $m = 5735$.

Por paso 1 tenemos $w = 1043$.

Entonces hacemos $n = 5735$ y $m = 1043$ y pasamos a paso 1.

$w = 520$

Entonces hacemos $n = 1043$ y $m = 520$ y repetimos el paso 1.

$w = 3$

Entonces hacemos $n = 520$ y $m = 3$ y repetimos el paso 1.

$w = 1$

Entonces hacemos $n = 3$ y $m = 1$ y repetimos el paso 1.

$w = 0$

Entonces el m.c.d. de 23983 y 5735 es 1.

2.2.2 Coprimos

Decimos que dos números diferentes n y m son **primos relativos** o **Coprimos** si m.c.d.$(n,m) = 1$. En otras palabras, n y m son primos relativos si para todo primo p tal que $p|n$ se tiene que $p¦m$.

Lista 2.2.2.1: Sea *n, m, s, p, q* enteros.

1. **m.c.d.$(n,m) = 1$ si y sólo si n y m son primos relativos.**
2. **Si pk$|n$ y qs$|n$ con $p \neq q$ primos relativos. Entonces pk$\bullet q$s $|n$.**
3. **Si $k =$ m.c.d.(n,m), $n = d \bullet s$ y $m = d \bullet w$. Entonces s y w son primos relativos.**

2.3 Mínimo Común Múltiplo

El Mínimo Común Múltiplo o m.c.m. de dos números n y m se define como el menor número que es múltiplo tanto de n como de m. Se denota como $[n,m]$. Siempre existe el m.c.d. de dos o m´s números ya que le $n•m$ es múltiplo de todos de n y m. En particular se tiene las siguientes propiedades:

Lista 2.3.1: Sea $n > m, s, w, d$ números naturales y k = m.c.m.(n,m)

1. **Si $n|d$ y $m|d$. Entonces $k|d$**
2. **m.c.m.$(n,n) = n$**
3. **Si $n = m•s$. Entonces m.c.d.$(n,m) = n$**
4. **Si n y m son coprimos. Entonces $k = n•m$**

Un resultado importante se desprende de la relación que existe entre el m.c.d. y el m.c.m. ya que si d = m.c.d.(n,m) y $k = [n,m]$ Entonces $d•k = n•m$.

Su demostración es la siguiente:

Sea $n = d•s$ y $m = d•w$.

Entonces:

$n•m = d•s•d•w = d•(d•s•w)$.

Sea $z = d•s•w$. Demostremos que $z = k$

Como $s = d•s•w = n•w$ lo que implica que

n|z análogamente $m|z$.

Además si $k = x•n = x•d•s = y•d•w$;

Lo que implica:

$x•s = y•w$ pero w es coprimo de s.

Entonces:

$w|x$ *y* por lo tanto $w•d•s|x•d•s$

En conclusión $z|k$ pero ya demostramos que z es múltiplo de n y m.

De lo anterior se tiene que $k|z$ por lo tanto $z = k$.

L.Q.Q.D

2.4 Congruencias

Si tomáramos dividiéramos todos los números naturales entre un número n y anotáramos sus residuos obtendríamos una lista como la siguiente:

0, 1, 2, 3, ... ,$(n - 2)$, $(n - 1)$, 0, 1, 2, ... ,$(n - 2)$, $(n - 1)$, 0, 1,...

Como podemos ver, tenemos una sucesión de recurrencia n. Cuando tomamos dos números cualesquiera a y b expresados en términos de un número n y los sumamos tenemos la siguiente relación:

$a = n \bullet q_1 + r_1$ con $0 < r_1 < n$

$b = n \bullet q_2 + r_2$ con $0 < r_2 < n$

$a + b = n \bullet (q_1 + q_2) + r_1 + r_2$

Entonces basta ver si $r_1 + r_2$ suman justamente n para determinar si $n|(a + b)$. Luego es evidente que la suma de cualquier pareja de números cuyos residuos sumen n será múltiplo de n. Ahora pensemos que $n|(a + b)$ entonces cualquier c cuyo residuo sea igual a b cumplirá con la propiedad de que $n|(a + c)$. De aquí podemos observar una clara relación entre b y c ya son "relativamente equivalentes".

Dos naturales ***a* y *b* son congruentes en modulo *n*** si $n|(a - b)$. En otras palabras, deben de tener el mismo residuo al ser divididos entre n. Se denota como $a \equiv b$ mod(n). De este modo, $5 \equiv 16$ mod(11) pero 5 ≡! 16 mod(10) (**≡! denota que no son congruentes**).

Lista 2.4.1: Sea a, b, c, d, s, w y n enteros

1. **$a \equiv a$ mod(n) para toda a (simétrica)**
2. **Si $a \equiv b$ mod(n). Entonces $b \equiv a$ mod(n) (reflexiva)**
3. **Si $a \equiv b$ mod(n) y $b \equiv c$ mod(n).Entonces $a \equiv c$ mod(n) (transitiva)**
4. **Si $a \equiv b$ mod(n). Entonces $k \bullet a \equiv k \bullet b$ mod(n) Y también $k \bullet a \equiv k \bullet b$ mod($k \bullet n$)**
5. **Si $a \equiv b$ mod(n) y $k|n$. Entonces $a \equiv b$ mod(k)**
6. **Si $a \equiv b$ mod(n) y $c \equiv d$ mod(n). Entonces $s \bullet a \pm w \bullet c \equiv s \bullet b \pm w \bullet d$ mod(n)**
7. **Si $a \equiv b$ mod(n) y $c \equiv d$ mod(n). Entonces $a \bullet c \equiv b \bullet d$ mod(n)**

La propiedad 4 se puede demostrar de manera sencilla si expresamos a y b en términos de n. Como a ≡ b mod(n) sea r su residuo con 0 < r < n.

$a = n \bullet q_1 + r$ y $b = n \bullet q_2 + r$

$k \bullet a = n \bullet k \bullet q_1 + k \bullet r$ y $k \bullet b = n \bullet k \bullet q_2 + k \bullet r$

Entonces: $k \bullet a - k \bullet b = n \bullet k \bullet (q_1 + q_2)$ Por lo tanto $n \,|(k \bullet a - k \bullet b)$ Esto implica que $k \bullet a \equiv k \bullet b$ mod(n)

L.Q.Q.D

Las propiedades 5, 6 y 7 de la lista 6, se pueden demostrar de la misma manera que la propiedad 4. Sin embargo, existen dos propiedades más que son de gran utilidad en la manipulación de residuos.

Si $a \equiv b$ mod(n). Entonces $\boldsymbol{ak \equiv bk}$ **mod($\boldsymbol{n}$)**.

La anterior propiedad se puede demostrar empleando la propiedad 6 de la lista 6 de manera recursiva n veces.

Si $k\bullet a \equiv k\bullet b$ mod(n). Entonces $a \equiv b$ mod(n/m.c.d.(k,n))

Demostración:

Sea d = m.c.d.(k,n), $k = d\bullet s$, $n = d\bullet w$ $a = w\bullet q_1 + r_1$, $b = w\bullet q_2 + r_2$

De arriba sabemos que s y w son coprimos.

Por otro lado sabemos que: $k\bullet a \equiv k\bullet b$ mod(n)

Entonces: $k\bullet r_1 \equiv k\bullet r_2$ mod(n)

Por tanto, $d\bullet s\bullet r_1 \equiv d\bullet s\bullet r_2$ mod($d\bullet w$) Lo que implica que:

$d\bullet w|(d\bullet s\bullet r_1 - d\bullet s\bullet r_2)$

$w|(s\bullet r_1 - s\bullet r_2)$

$w|(s\bullet(r_1 - r_2))$

Pero $w\nmid s$ por ser coprimos. Entonces $w|(r_1 - r_2)$

L.Q.Q.D

Cabe mencionar que la congruencia no solo se emplea en números positivos. Podemos hacer uso con números negativos. Por ejemplo: 13 ≡ -3 mod(8) ya que 8|(13 - (-3)). Por otro lado, hay que recalcar que existen "*n* clases" básicas en modulo *n* que son: 0, 1, 2, ... , (n - 2), (n - 1). **Para cualquier número *a* existe una $0 \leq r <$ n tal que *a* es congruente con *r* en modulo *n*.**

2.5 Sucesiones

Hablando informalmente, una sucesión es una regla que asocia un número a cada número natural 0, 1, 2, 3, 4, ... , el número asociado a k se llama el "k-ésimo término" de la sucesión y se lo indica con a_k. A menudo, se indica una sucesión escribiendo sus primeros términos; en tal caso, se supone que la regla para formar el "término general", es decir, el k-ésimo término para cualquier k, es clara. Por ejemplo:

(a) 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...

(b) 1, 3, 5, 7, 9, ...

(c) 1, 0, 1, 0, 1, ...

(d) 1, 1, 2, 6, 24, 120, ...

(e) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

En nuestros ejemplos:

$a_k = 2 \bullet k$

$b_k = 2 \bullet k + 1$

$c_k = [1+(-1)k]/2$

$d_0 = 1$ y $d = k \bullet d_k\text{-}1$ si $k > 1$

$e_0 = 1$, $e_1 = 1$ y $e_k = e_k\text{-}1 + e_k\text{-}2$ si $k > 2$

Cuando, como en el caso de las dos últimas sucesiones, para conocer el valor de a_k se hace necesario conocer el valor de uno o más de los términos anteriores se habla de fórmulas de recurrencia.

La sucesión del ejemplo (d) es la que define el factorial de k ($k!$) y la del ejemplo (e) es la famosa sucesión de Fibonacci.

2.5.1 Notación Sigma

La **Notación Sigma** es empleada frecuentemente para indicar la suma de una sucesión de términos. Supongamos que tenemos una sucesión de la siguiente manera:

f(0), f(1), f(2),... f(n),... y queremos expresar s = f(n) + f(n+1) + ... + f(m-1) + f(m)

Entonces la notación sigma nos abrevia de la siguiente manera:

$$\sum_{i=n}^{m} f(i)$$

Donde la f representa la función de la sucesión cuyos elementos estamos sumando, la i varía entre los valores n y m que están indicados en la parte inferior y superior de la sigma respectivamente.

Dos propiedades importantes son:

Distribuye la suma y resta de funciones: $\sum_{i=n}^{m} [f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=n}^{m} f(i) \pm \sum_{i=n}^{m} g(i)$

Saca constantes de la sigma: $\sum_{i=n}^{m} k\, f(i) = k \sum_{i=n}^{m} f(i)$

No distribuye la multiplicación $\sum_{i=n}^{m}[f(i)\cdot g(i)] \neq \sum_{i=n}^{m} f(i)\cdot \sum_{i=n}^{m} g(i)$:

Algunas fórmulas conocidas son las siguientes:

Suma de una constante *k*: $\sum_{i=a}^{b} k = \frac{(b-a+1)}{k}$

Suma de los primeros n enteros positivos: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Suma de los primeros n cuadrados: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Suma de los primeros n pares: $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$

Suma de los primeros n impares: $\sum_{i=1}^{n} 2i+1 = n^2$

Suma de los primeros n cubos: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

2.5.2 Sucesión Aritmética

Una de las sucesiones más comunes es precisamente la Sucesión Aritmética. Esta se define para cada elemento, como la suma del elemento anterior más una constante. En termines de funciones podemos describirla como:

$f(0) = a$ y $f(i+1) = f(i) + r$, para toda $i > 0$ y r constante. La sucesión quedaría como: a, $a + r$, $a + 2r$, $a + 3r$,... ,$a + nr$,...

Es fácil determinar entonces que la suma de los primeros n términos es: $a \bullet n + r \bullet n \bullet (n-1)/2$.

2.5.3 Sucesión Geométrica

La Sucesión Geométrica se define para cada elemento, como el producto del elemento anterior con una constante. En termines de funciones podemos describirla como:

$f(0) = a$ y $f(i+1) = f(i) \cdot r$, para toda $i > 0$ y r constante. La sucesión quedaría como: a, $a \cdot r$, $a \cdot r2$, $a \cdot r3$,... ,$a \cdot rn$,...

2.5.4 Criterio de Divisibilidad

A continuación tenemos una lista de criterios de divisibilidad que son indispensables tener siempre presentes.

Un número es divisible por 2 si su última cifra es par

Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3

Un número es divisible por 4 si el número formado por sus 2 últimas cifras es múltiplo de 4

Un número es divisible por 5 si termina en 0 o 5

Un número es divisible por 6 si lo es por 2 y 3

Un número es divisible por 9 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9

Un número es divisible por 11 si la diferencia de la suma de los dígitos de lugar par y la suma de los dígitos de lugar impar, es múltiplo de 11

3 Geometría

3.1 Teorema de Thales

Thales de Mileto fue un filósofo griego antecesor a Euclides pero que aportó uno de los principios más sencillos y útiles en la geometría euclidiana. El teorema de Tales se enuncia de la siguiente manera.

Teorema 2: Teorema de tales: *Considere tres rectas y dos rectas transversales a ellas como se muestra en la figura. Entonces las rectas AD, BE y CF son paralelas si y sólo si:* $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ *. Recíprocamente, si* $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$ *entonces AD, BE y CF son paralelas.*

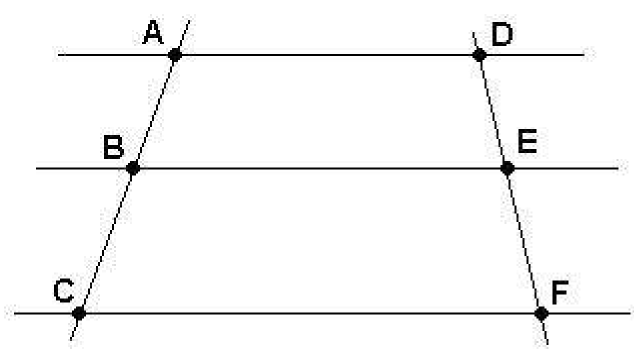


Figura 3.1.1 Teorema de tales.

Su manejo es fundamental para la mayor parte de los resultados que emplearemos. Hay un dicho en la olimpiada que dice así: *"Todos los problemas de geometría salen con Thales y Pitágoras sabiendolos utilizar".*

3.2 Triángulos

Como todos conocemos desde pequeños, un triángulo es la figura plana que consta de tres lados y tres ángulos internos. Esta simple figura encierra muchas cualidades que a todo geómetra han cautivado en el inicio de sus estudios. Antes de comenzar, acordemos referirnos a un triángulo con el **símbolo** Δ. Para comenzar enunciaremos varias propiedades intrínsecas de los triángulos:

Lista 3.2.1: Sea un ΔABC de lados *a*, *b* y *c*.

1. **La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º.** $\alpha + \beta + \gamma = 180º$
2. **El ángulo externo de un triángulo es igual a las suma de los ángulos internos no adyacentes.**
3. **Para cualquier triángulo se cumple que:** $a + b > c$ $a + c > b$ $b + c > a$

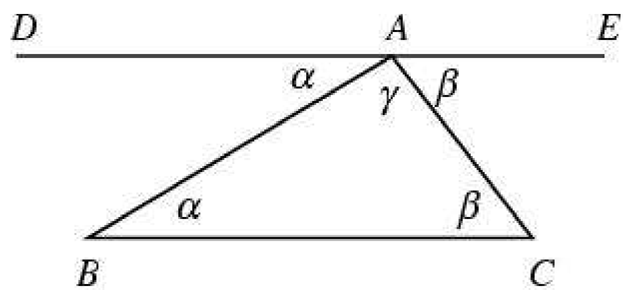


Figura 3.2.1 Triangulo.

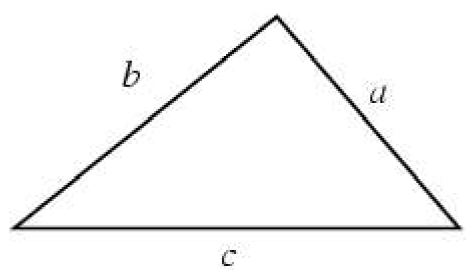


Figura 3.2.2 Lados a, b y c del triángulo.

3.2.1 Clasificación

Los triángulos se clasifican de varias maneras. En particular, veamos algunos nombres típicos que dependen de las propiedades que tienen sus ángulos o lados.

3.2.1 Clasificación

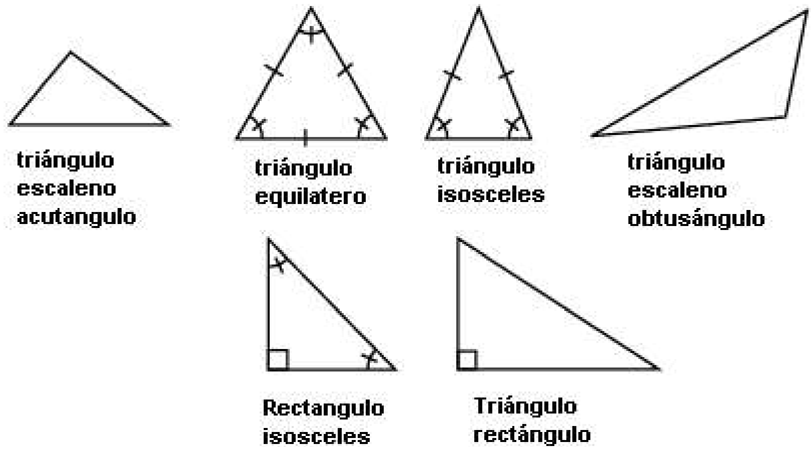


Figura 3.2.1.1 Tipos de triángulos.

Por ángulos:

Triángulo Acutángulo: *todos sus ángulos son menores a 90º.*

Triángulo Rectángulo: *tiene un ángulo igual a 90º.*

Triángulo Obtusángulo: *tiene un ángulo mayor a 90º.*

Por lados:

Triángulo Escaleno*: todos sus lados son de longitud diferentes*.

Triángulo Isósceles: *dos lados de longitud igual.*

Triángulo Equilátero: *tres lados de longitud igual.*

En particular, un triángulo equilátero tiene tres ángulos iguales y uno isósceles tiene dos.

3.2.2 Semejante y congruencia

La gran mayoría de los problemas geométricos requieren una fuerte dosis de ingenio en el uso triángulos semejantes. Muchos olímpicos afirman (con toda certeza) que los problemas nacionales se reducen a dos cosas: semejanza de triángulos y "pitagorazos". Desde luego, el determinar cuales semejanzas y cuando hay que utilizarla, es todo un arte que un buen olímpico debe dominar. Veremos los criterios de semejanza y congruencias más sin embargo, creo que la mejor manera de comprender el tema es resolver muchos, muchos, "muchisimos" problemas. A continuación hacemos una lista de los criterios de semejanza y congruencia.

Decimos que dos triángulos ΔABC y ΔA'B'C' con congruentes como ΔABC ≅ ΔA'B'C' y son semejantes como ΔABC ~ ΔA'B'C'. Los criterios de congruencia y de semejanza son idénticos con la diferencia de proporcionalidad (y no de igualdad) en los lados.

Lista 3.2.2.1: Dos triángulos ABC y A'B'C' son congruentes (semejantes) si:

1. **Caso LLL:** ***sus tres lados correspondientes son iguales (proporcionales)*.**
2. **Caso ALA:** ***dos ángulos son iguales y un lado es igual (proporcional)*.**
3. **Caso LAL:** ***dos lados son iguales (proporcionales) y el ángulo que forman es igual*.**

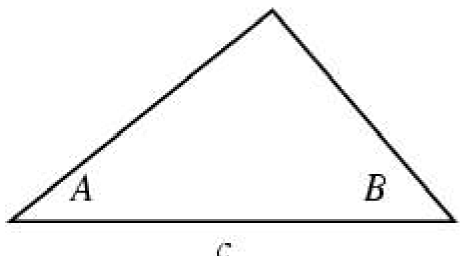


Figura 3.2.2.1 Criterio de ALA

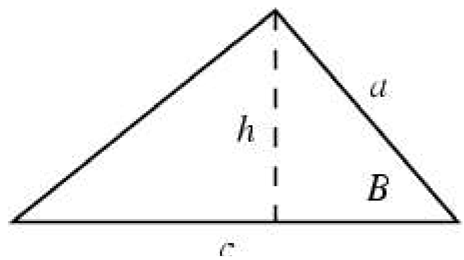


Figura 3.2.2.2 Criterio LAL.

Las propiedades más interesantes de la semejanza es la que se establece entre un par de triángulos para poder determinar similitudes o calcular distancias. Bajo la propia definición de semejanza se tiene que:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k$$

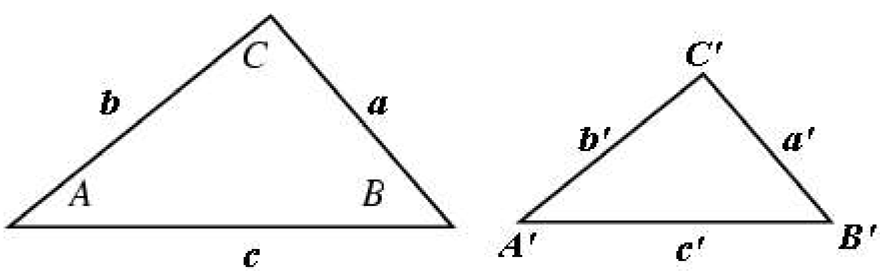


Figura 3.2.2.3 Semejanza de triángulos.

Así también tenemos que para cualquier lado *x, x', w* y *w'* se cumple la proporcionalidad. En general todos los segmentos son proporcionales a una misma razón

$$\frac{x}{w} = \frac{x'}{w'}$$

Teorema 3: *La razón de las áreas de dos triángulos semejantes, con razón de semejanza k, es igual a k^2. Es decir, al cuadrado de la razón entre los lados.*

Demostración:

Sea ΔABC ~ ΔA'B'C' como en la figura 3.2.2.3 entonces sabemos que:

$$\frac{a}{a'} = k \Rightarrow a = a'k \ .$$

Además sabemos que si *h* y *h'* son las altura respectivas desde el vértice A y A' en el ΔABC y ΔA'B'C' entonces *h = h'k.* Por tanto:

$$\frac{ah}{2} = \frac{a'kh'k}{2} = k^2 \frac{a'h'}{2}$$

L.Q.Q.D.

3.2.3 Teorema de Pitágoras

Como ya había comentado, uno de los principales teoremas empleados en la olimpiada es precisamente el teorema de Pitágoras. Existen muchas maneras de demostrar este teorema (realizado por el filósofo griego del mismo nombre) y es un buen ejercicio ingeniarse para tener diferentes demostraciones. Antes de seguir, veamos un poco más a detalle el triángulo rectángulo.

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos mientras que el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa. En la figura 3.2.3.1 tenemos dos rectángulos de uso común (casi, casi por obligación los rectángulos de los problemas olímpicos son alguno de los dos anteriores).

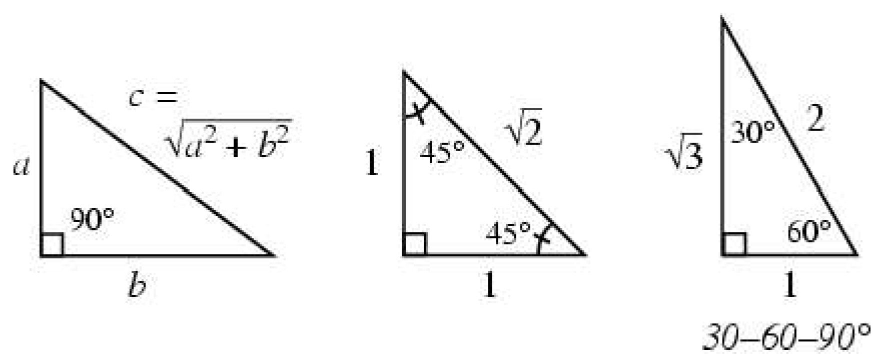


Figura 3.2.3.1 Triángulos rectángulos.

Teorema 4: El Teorema de Pitágoras dice que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa. En la figura 3.2.3.1 mostramos la relación de los catetos con su hipotenusa.

Demostración:

Tomemos un triángulo rectángulo y tracemos su altura desde el vértice del ángulo recto como se muestra en la figura 3.2.3.2. Entonces tenemos dos triángulos menores y semejantes al primero. Aplicando semejanza tenemos las siguientes relaciones:

$$\frac{b}{y}=\frac{x+y}{b}\Rightarrow b^2=xy+y^2 \text{ y } \frac{a}{x}=\frac{x+y}{a}\Rightarrow a^2=xy+x^2$$

Sumando ambas relaciones se tiene:

$$a^2+b^2=x^2+2xy+y^2$$

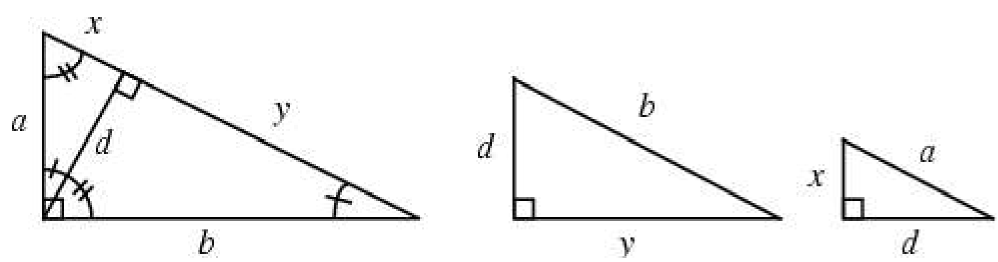


Figura 3.2.3.2 Teorema de Pitágoras.

3.2.4 Líneas recurrentes

Las propiedades del triángulo se extienden mucho más. En particular, existen líneas que determinan puntos cuyas propiedades tienen una aplicación importante en el mundo real.

Decimos que tres o más rectas (diferentes entre si) **concurren** si todas las rectas se interceptan en un punto en común.

3.2.4.1 Medianas

Definición 3.2.4.1.1*: Mediana: Una mediana de un triángulo es la línea que une a un vértice con el punto medio de su lado opuesto.*

3.2.4.1 Medianas

Dada la definición anterior, tenemos que un triángulo tiene tres medianas.

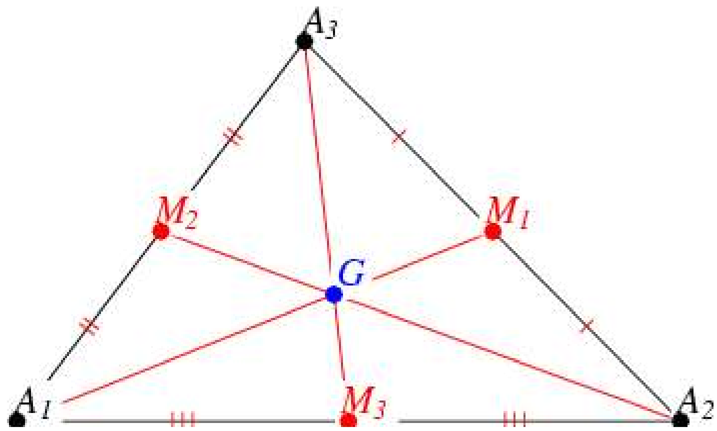


Figura 3.2.4.1.1 Medianas de un triángulo y su baricentro.

Lista 3.2.4.1.1:

1. **Las medianas de un triángulo concurren en un punto llamado Centroide, Gravicentro o Baricentro denotado comúnmente como *G.***
2. **Las medianas se bisecan en razón 2:1. En otras palabras:** $A_1G = 2GM_1$, $A_2G = 2GM_2$ y $A_3G = 2GM_3$.
3. **Si a_i es el lado i del triángulo entonces:**
4. $m_1^2=\frac{1}{4}\left(2a_2^2+2a_3^2-a_1^2\right)$
5. $m_1^2+m_2^2+m_3^2=\frac{3}{4}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)$

3.2.4.2 Bisectrices

***Definición 3.2.4.2.1**: La **bisectriz** de un ángulo se define como la línea que biseca el ángulo en dos ángulos iguales. Las bisectrices pueden aplicarse a cualquier ángulo y no exclusivamente al triángulo. Sin embargo, las bisectrices de un triángulo tienen propiedades muy interesantes y que veremos a continuación.*

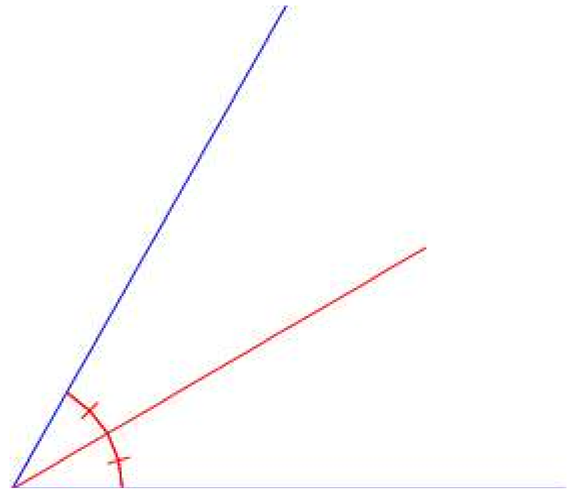


Figura 3.2.4.2.1 Bisectriz de un ángulo.

Propiedades de las bisectrices internas (ya que para también podemos considerar los ángulos externos de los vértices) en un triángulo.

Lista 3.2.4.2.1:

1. **Las *bisectrices* concurren en un punto al que llamamos *Incentro* y denotamos regularmente como *I*.**
2. **El *incentro* es el centro del círculo de radio r (inradio) inscrito al triángulo y que es tangente a los tres lados del triángulo. Este único círculo se le conoce como el *incirculo*.**

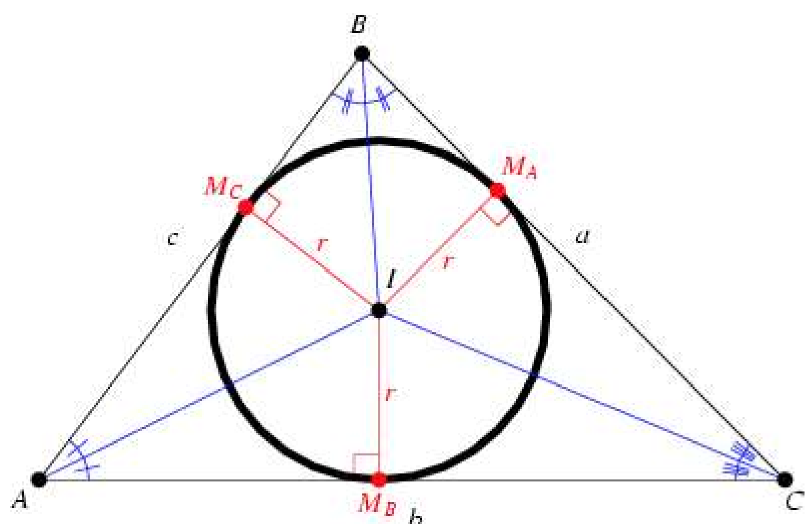


Figura 3.2.4.2.2 Mediatrices e Incentro de un triángulo.

3. **Sea K el punto de intersección entre la bisectriz desde A al segmento BC. Entonces:**
4. $\frac{CA}{AB}=\frac{CK}{KB}$
5. **El área del triángulo es:** $\Delta_{ABC}=r\cdot S$ **donde** $S=\frac{a+b+c}{2}$

3.2.4.3 Mediatriz

Si tomamos un segmento AB y trazamos una línea perpendicular al punto medio de AB entonces tenemos una recta a la que llamamos **mediatriz**. En la figura 3.2.4.3.1 mostramos la mediatriz *CD* de un segmento *AB*. Su construcción geométrica se realiza trazando dos circunferencias de igual radio centradas cada uno en un extremo.

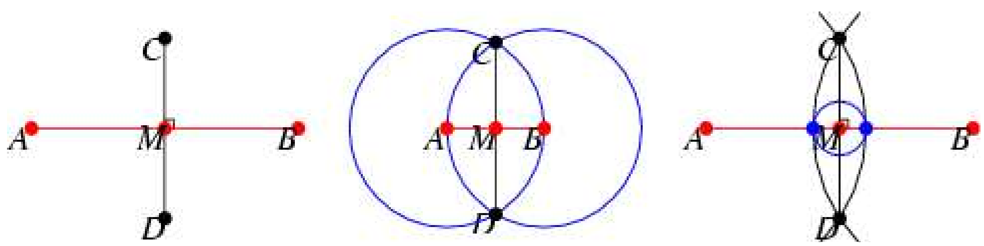


Figura 3.2.4.3.1 Mediatriz de un segmento.

Un triángulo tiene 3 mediatrices (una por cada lado) las cuales también ofrecen diferentes propiedades:

Lista 3.2.4.3.1:

1. **Las *mediatrices* de un ∆ ABC concurren en un punto llamado *circuncentro*. Este punto se denota ordinariamente como *O*.**

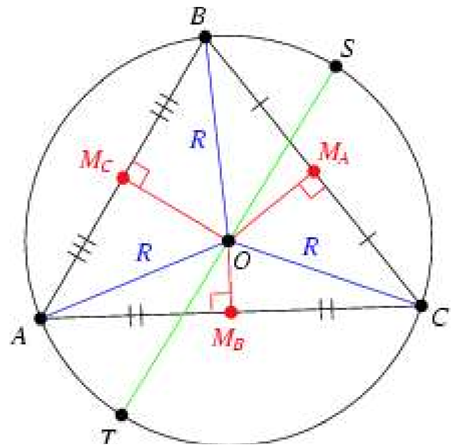


Figura 3.2.4.3.2 Mediatrices y circuncentro del triángulo.

2. **El circuncentro es el centro del la circunferencia circunscrita al ∆ABC que contiene a los vértices A, B y C. El radio del circuncentro se llama circunradio se denota como R.**

3. **El área de un triángulo esta determinada por:** $\Delta_{ABC} = \frac{abc}{4R}$

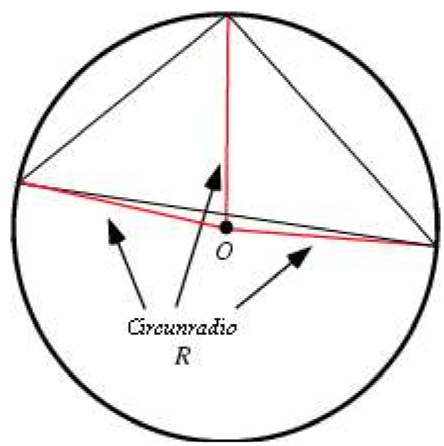


Figura 3.2.4.3.3 Circunradio.

3.2.4.4 Alturas

La altura de un triángulo respecto a un vértice se define como el segmento perpendicular entre el vértice y la recta que contiene al segmento del lado opuesto al vértice. Cabe mencionar entonces que la altura de un triángulo puedes estar fuera de triángulo.

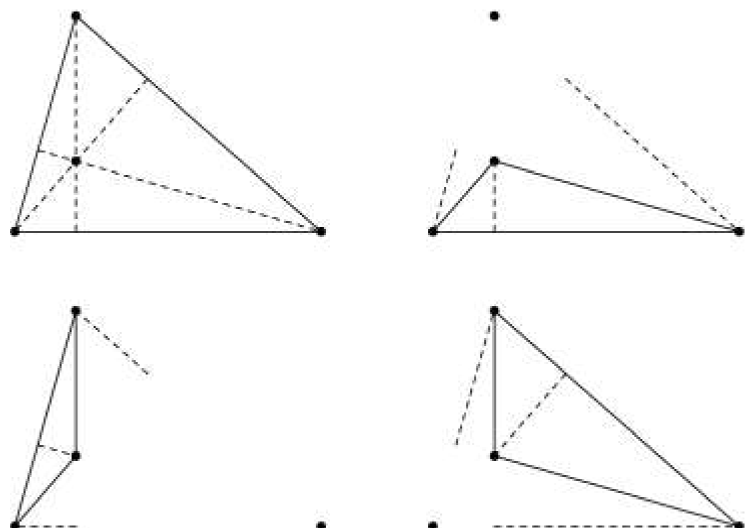


Figura 3.2.4.4.1 Alturas de los triángulos.

Las alturas al igual que medianas, mediatrices y bisectrices tienen diferentes propiedades que enunciamos a continuación:

Lista 3.2.4.4.1:

1. **Las alturas de un triángulo concurren en un punto llamado *ortocentro* y que se denota por *H*.**
2. **La altura de una altura se puede calcular como:** $h_a = \frac{bc}{2R} = c\sin(B) = b\sin(C)$
3. **Si *r* es el inradio entonces:** $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$

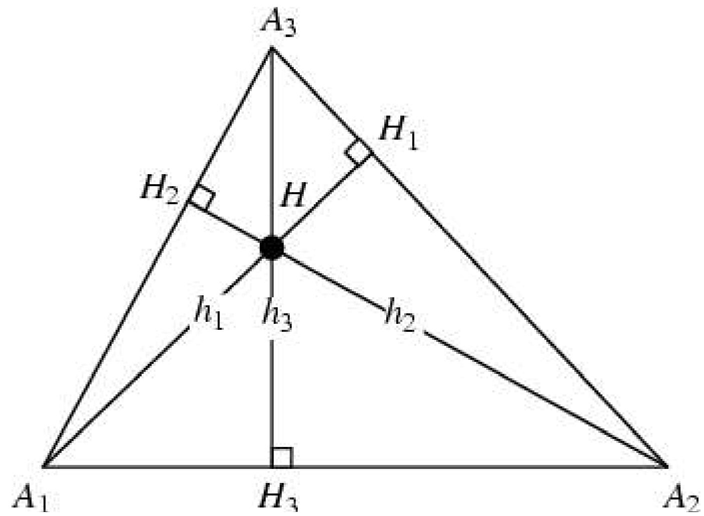


Figura 3.2.4.4.2 Alturas y ortocentro de un triángulo.

3.2.5 Área de un triángulo

La siguiente colección de fórmulas puede ser de gran ayuda en la solución de varios problemas.

1) $\Delta_{ABC}=\frac{ah_a}{2}$ Donde h_a es la altura desde el vértice A y a es su lado opuesto.

2) $\Delta_{ABC}=b\cdot c\cdot sen(A)$

3) $\Delta_{ABC}=r\cdot S$ donde $S=\frac{a+b+c}{2}$ y r en el inradio.

4) $\Delta_{ABC}=\frac{abc}{4R}$ donde R es el circunradio.

5) $\Delta_{ABC}=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

3.3 Circunferencias

Definición 3.3.1:*Un* ***círculo*** *se define como el lugar geométrico de todos aquellos puntos, llamada circunferencia, cuya distancia a un punto fijo O es una constante r.*

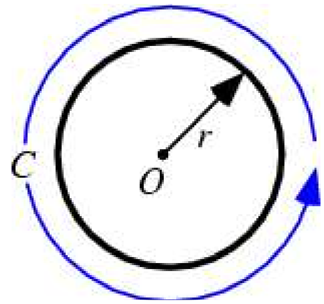


Figura 3.3.1 Círculo.

La longitud de la circunferencia $C = \pi \cdot r$ donde

π = 3.14159265358979323846264338327950…

es una constante irracional. En otras palabras, nunca se vuelve periódico (no hay un ciclo de números que se repita). Hoy en día se conocen miles y miles de cifras de π aunque eso es básicamente una curiosidad matemática ya que en la práctica con algunos cuantos cifras basta para los cálculos.

El área de un círculo es: $area = \pi \cdot r^2$

Un círculo tiene diferentes rectas, ya conocemos el radio y el diámetro pero existen otras rectas.

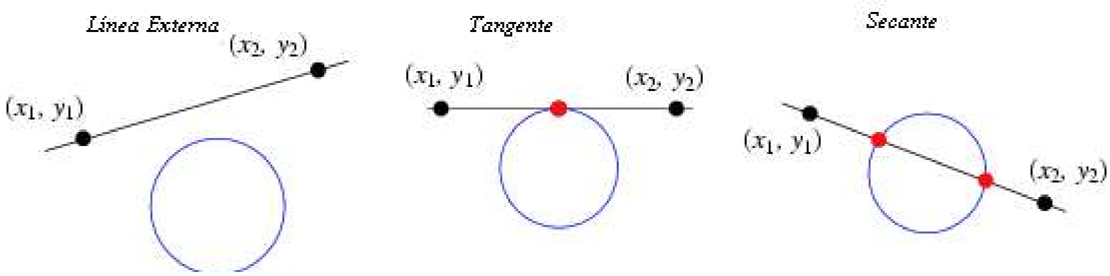


Figura 3.3.2 Rectas que pasan por la circunferencia.

***Definición 3.3.2**: Una línea que no toca al círculo se le conoce como línea externa.*

***Definición 3.3.3:** Cuando una línea toca a la circunferencia en un solo punto entonces se le llama tangente.*

***Definición 3.3.4**: Sí una línea corta en dos puntos entonces se le conoce como **secante**.*

Una de las propiedades interesantes de la tangente es la relación de perpendicularidad entre este y el radio que va desde el punto de tangencia hasta el centro del círculo.

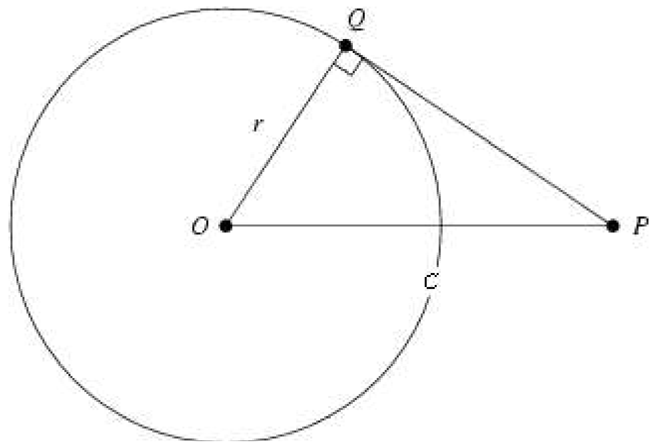


Figura 3.3.3 Tangente a un círculo.

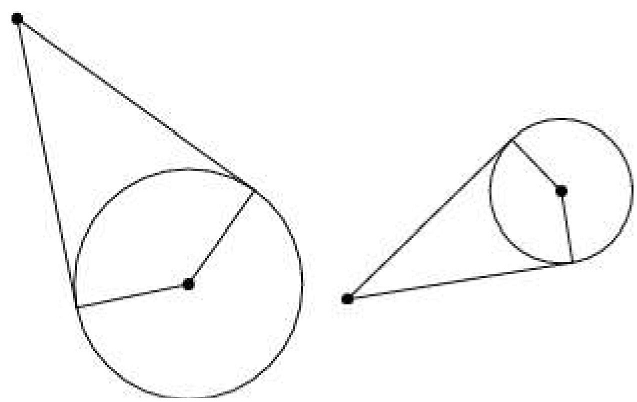


Figura 3.3.4 Simetría en las tangentes desde un punto exterior.

En la figura 3.3.3 Tenemos el segmento *PQ* tangente al circulo de centro *O* en *Q*. Entonces *OQ* es perpendicular a *PQ*. A través de la misma figura podemos comprender entonces que las tangentes a una circunferencia, trazadas de un punto externo, tienen la misma longitud.

Definición 3.3.5: Una **cuerda** es un segmento que uno a dos puntos de la circunferencia.

Cuando la cuerda pasa por el centro entonces tenemos el caso particular de tener un diámetro. En la figura 3.3.5 tenemos que el segmento AB es una cuerda y PT es una tangente.

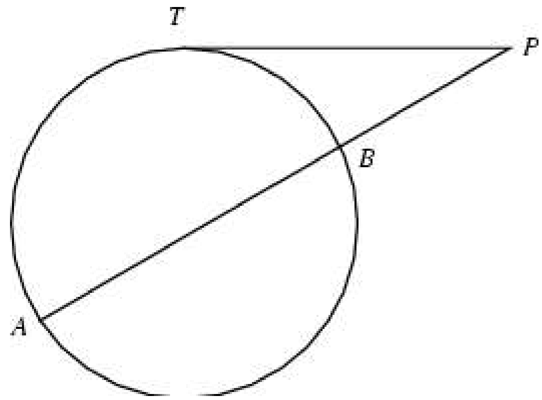


Figura 3.3.5 Secante y tangente.

3.3.1 Ángulos en una circunferencia.

Un sección de de la circunferencia se le conoce como ***arco***. En la figura 3.3.1.1 tenemos El arco AC. En particular, los arcos son caracterizados por el ángulo que forman sus extremos con el centro. Se ha acordado que un círculo forma un ángulo total de 360º que es igual a 2π si hablamos en términos de radianes.

La longitud del arco esta determinada por la siguiente fórmula:

$$\frac{\theta \cdot C}{2 \cdot \pi} \quad \text{ó} \quad \frac{\alpha \cdot C}{360}$$

Donde *C* es la longitud de la circunferencia, θ esta en radianes y α en grados. A continuación hacemos un listado de los diferentes ángulos que hay en una circunferencia.

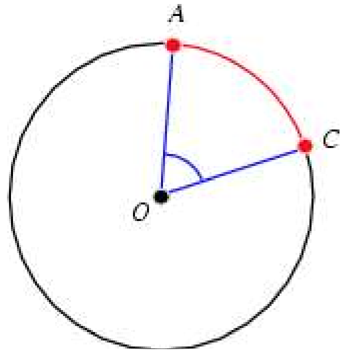


Figura 3.3.1.1 Arco de una circunferencia.

Definición 3.3.1.1: *el ángulo central es el ángulo formado por dos puntos de la circunferencia y el centro. Su longitud de arco es r*θ *y su ángulo es igual a su ángulo de arco.*

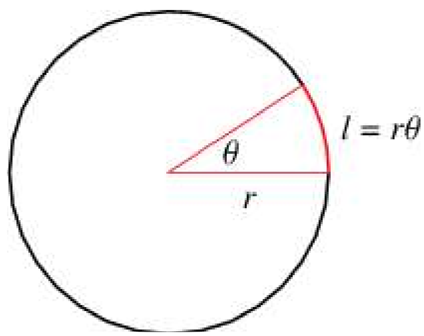


Figura 3.3.1.2 Longitud del arco.

Definición 3.3.1.2: *Un **ángulo inscrito** está formado por tres puntos de la circunferencia. En nuestro caso el ángulo inscrito es el ángulo ABC en la figura 3.3.1.3. EL ángulo ∠ABC es igual a la mitad del arco* $\overline{AOC}$ *. Es decir:* $\widehat{ABC} = \frac{\overline{\widehat{AOC}}}{2}$

Definición 3.3.1.3: *Un ángulo **semi-inscrito** esta determinado por una cuerda y una tangente (figura 3.3.1.4).*

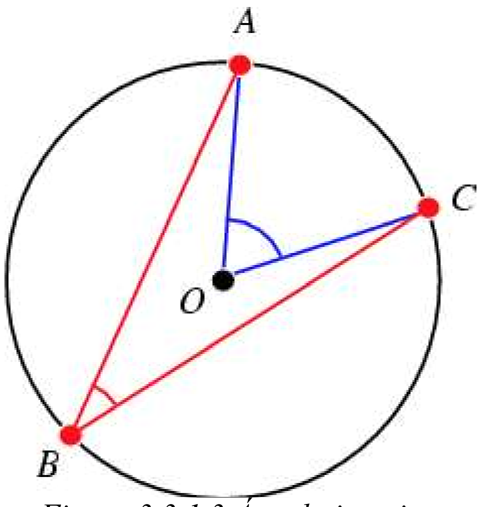


Figura 3.3.1.3 Ángulo inscrito.

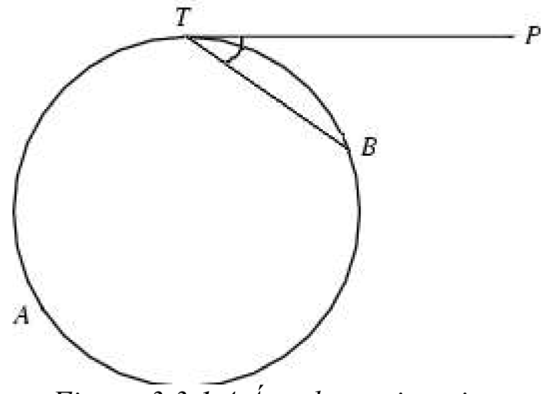


Figura 3.3.1.4 Ángulo seminscrito.

Definición 3.3.1.4: Un ángulo interno *está el formado por dos cuerdas. Su medida esta dada por:* $\theta = \dfrac{\widehat{\mathrm{CXA}} + \widehat{\mathrm{BXD}}}{2}$

Definición 3.3.1.5: Un ángulo externo *está formado por dos secantes. Su medida está dada por:* $\varphi = \dfrac{\widehat{\mathrm{RUT}} - \widehat{\mathrm{SUQ}}}{2}$

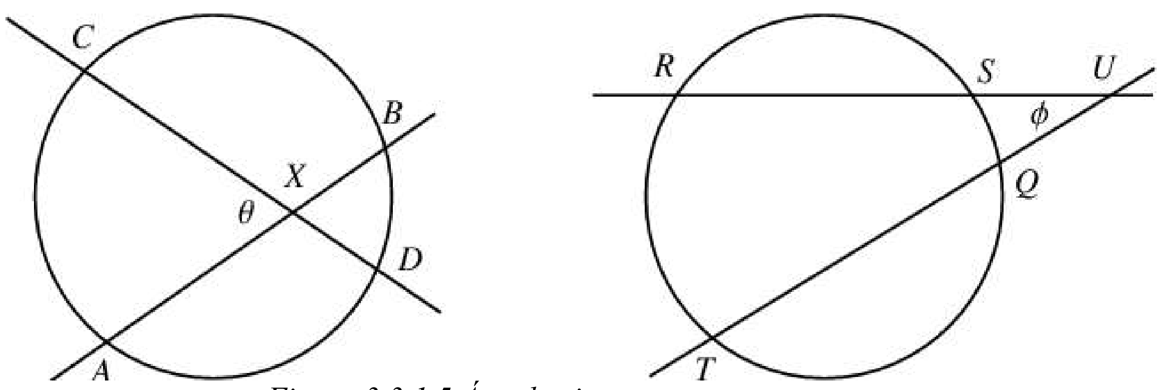


Figura 3.3.1.5 Ángulos interno y externo .

3.3.2 Potencia de un punto.

Uno de los recursos geométricos de mayor uso es la potencia de un punto. La potencia de un punto puede tener varias versiones aunque en lo esencial es la misma idea.

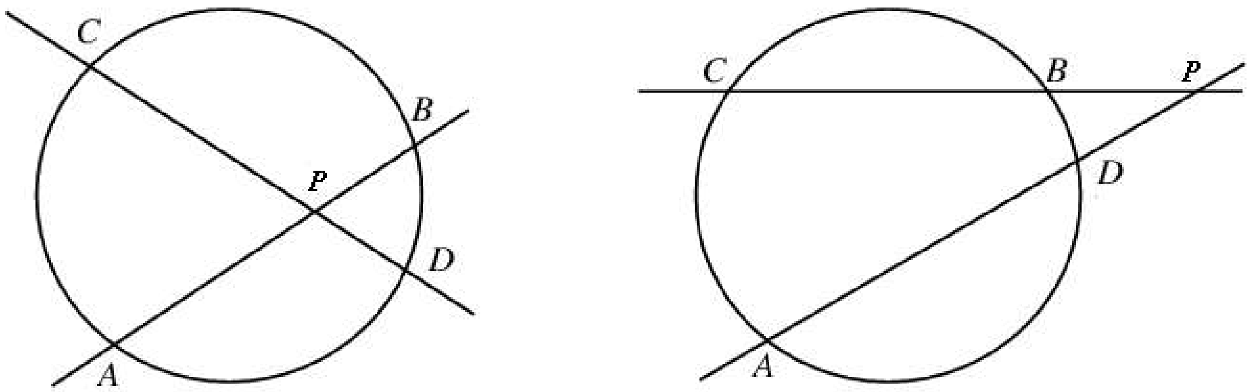


Figura 3.3.2.1 Potencia de un punto.

En la figura 3.3.2.1 tenemos un punto *P* que es la intersección de dos cuerdas *AB* y *CD*. Entonces se cumple que:

$$\overline{AP}\cdot\overline{PB}=\overline{CP}\cdot\overline{PD}$$

Un caso especial se presenta con la tangente como se muestra en la figura 3.3.2.2, tenemos la relación:

$$\overline{PQ}^2=\overline{OP'}\cdot\overline{P'P}$$

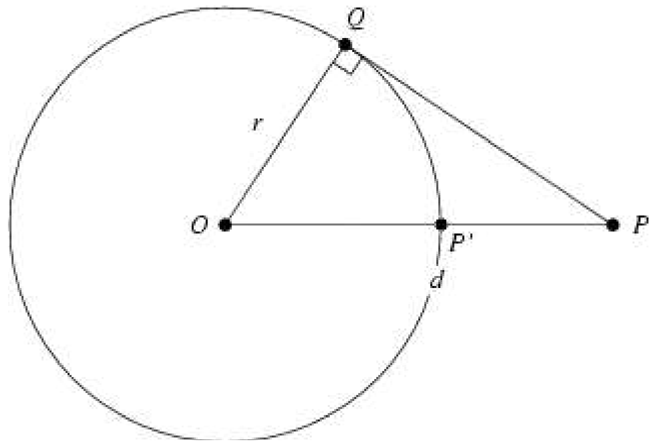


Figura 3.3.2.2 Potencia de un punto en el caso de tangente.

3.4 Cuadriláteros

Definición 3.4.1: *Un* ***cuadrilátero*** *es la figura formado por cuadro lados y cuatro ángulos interiores que suman 360º. Existen diferentes tipos de cuadriláteros según las propiedades de sus lados.*

Los segmentos a, b, c y d forman los lados. Como se puede apreciar en la figura 3.4.1, no todos los cuadriláteros son **convexos**, esto es, no todos sus ángulos interiores son menores a 180. Cuando no son convexos los llamamos **entrantes.** También existen cuadriláteros degenerados como es el caso del cuadrilátero de la izquierda al cual llamamos **cruzado**. Los segmentos p y q las llamamos diagonales.

Diremos que *un par de lados es* ***opuest****o si no comparten vértices en común y* ***adyacentes*** *cuando comparte un vértice como extremo*. De igual manera*, dos vértices son* ***opuestos*** *si no comparten un lado en común de lo contrario son* ***adyacentes****.*

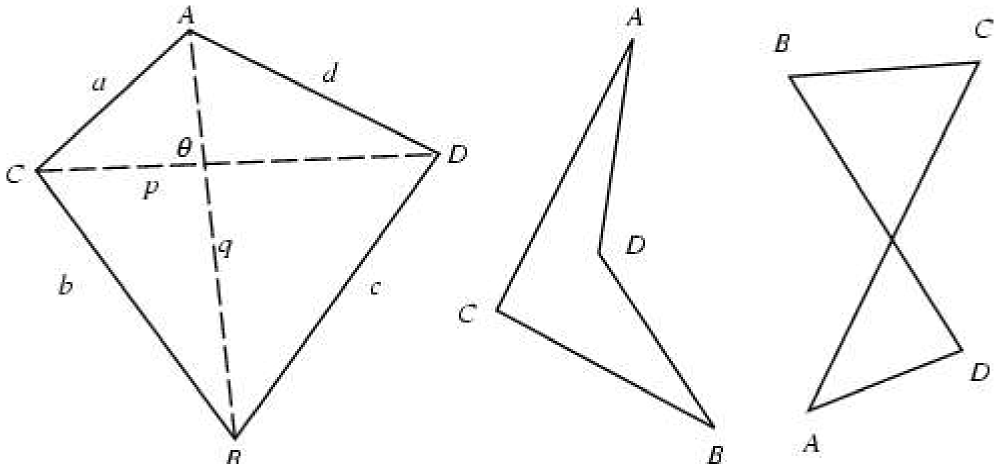


Figura 3.4.1 Cuadriláteros: convexo, oblicuo y cruzado.

Fórmula de Brahmagupta: *Si a, b, c y d son los lados de un cuadrilátero y A es el ángulo entre a y d y B el ángulo entre b y c (véase la figura 3.1). Entonces el área del cuadrilátero es*:

$$Area(ABCD)=\sqrt{(S-a)\cdot(S-b)\cdot(S-c)\cdot(S-d)-abcd\cdot\cos^2\left[\frac{1}{2}(A+B)\right]}$$

3.4.1 Tipos de Cuadriláteros

3.4.1.1 Trapecio

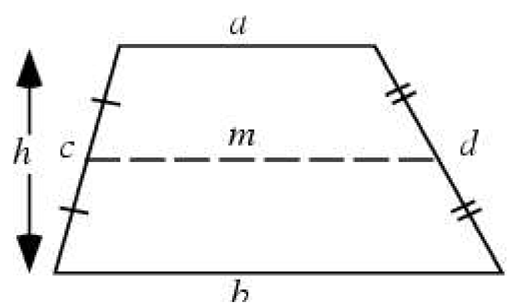


Figura 3.4.1.1.1 Cuadrilátero.

Figura 3.1.1.1

*Un **Trapecio** tiene un par de lados paralelos*. En particular tenemos que su área esta determinada por:

$$Area(ABCD)=\frac{(a+b)\cdot h}{2}=m\cdot h \text{ donde } m=\frac{a+b}{2}$$

*Un **trapecio isósceles** es aquel cuyo ángulos de la base son iguales y los lados no paralelos también.*

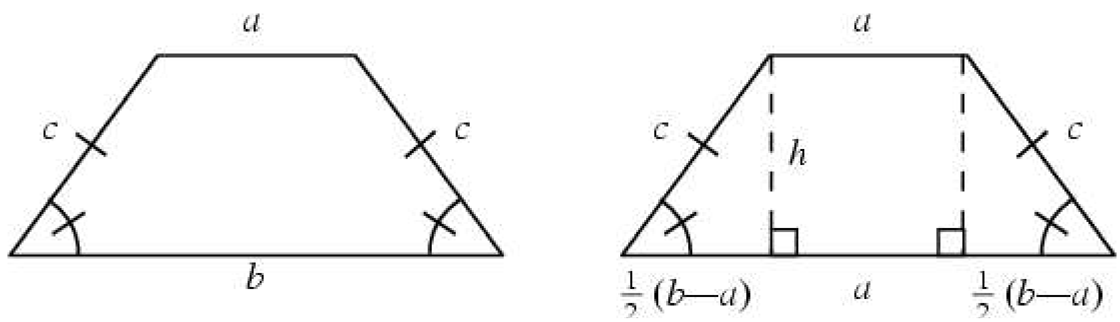


Figura 3.4.1.1.2 Cuadriláteros isósceles.

Por lo tanto su altura *h* se expresa como:

$$h=\sqrt{c^2-\frac{1}{4}(b-a)^2}$$

Su área queda como:

$$Area(ABCD)=\frac{1}{2}(a+b)\sqrt{c^2-\frac{1}{4}(b-a)^2}$$

3.4.2 Paralelogramo

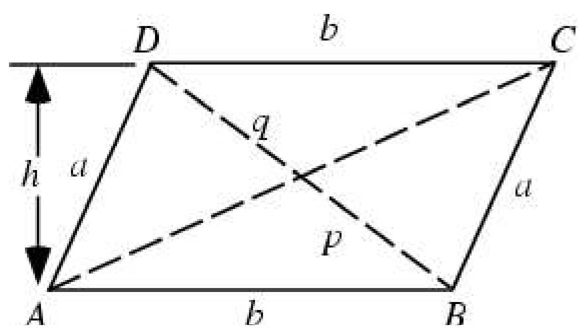


Figura 3.4.2.1 Paralelogramo.

Un paralelogramo tiene propiedades muy interesantes, ya que sus lados opuestos son paralelos. Podemos mencionar:

1) Su área es:

$$Area(ABCD)=b\cdot h \quad \text{donde} \quad h=a\cdot seno(A)$$

2) Sus diagonales están determinadas por las siguientes relaciones:

$$p=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(A)}$$

$$q=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(B)}$$

3) Las diagonales se bisecan.

4) Los lados y las diagonales satisfacen la **ley del paralelogramo**:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=p^2+q^2$$

3.4.3 Rectángulo

El rectángulo es un caso particular de un paralelogramo. Sus cuadro ángulos son iguales por lo que son de 90º.

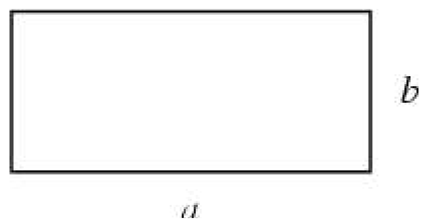


Figura 3.4.3.1 Rectángulo

Algunas de sus propiedades son:

1) Su área es: $Area(ABCD)=a\cdot b$

2) Sus diagonales son iguales y son: $p=q=\sqrt{a^2+b^2}$

Cabe mencionar que el **cuadrado** (4 lados iguales y ángulos iguales) es un caso particular de los rectángulos. Es buen ejercicio determinar como se simplifican las fórmulas anteriores.

3.4.4 Cuadriláteros cíclicos y circunferencias inscritas

Entre los problemas comunes que tienen los cuadriláteros, es determinar cuando se encuentran en una circunferencia, es decir, cuando son cíclicos sus vértices.

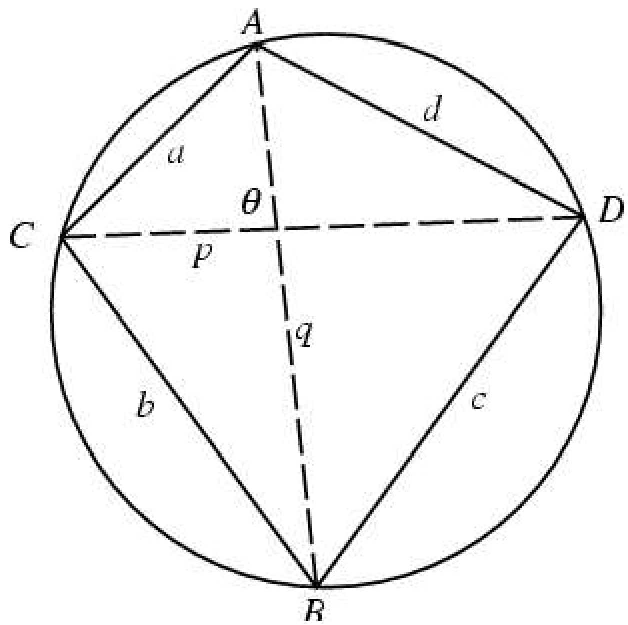


Figura 3.4.4.1 Cuadrilátero inscrito.

Es fácil probar a través de ángulos inscritos que los ángulos opuestos internos de un cuadrilátero cíclico suman 180º. Esto es:

$$\measuredangle CAD + \measuredangle CBD = 180° = \measuredangle ACB + \measuredangle ADB$$

Además si R es el circunradio, su área esta determinada por la siguiente fórmula:

$$Area(ACBD) = \sqrt{(S-a)\cdot(S-b)\cdot(S-c)\cdot(S-d)} = \frac{\sqrt{(ab-cd)\cdot(ac-bd)\cdot(ad-bc)}}{4R}$$

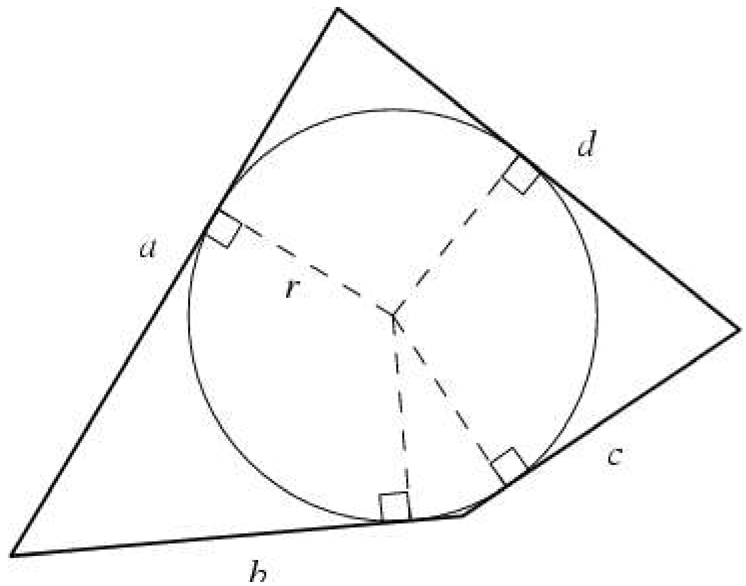


Figura 3.4.4.2 Cuadrilátero circunscrito.

Cuando es posible trazar una circunferencia dentro de un cuadrilátero (lo cual no siempre se puede). Entonces se cumple que la suma de los lados opuestos es igual. Es decir:

$$a+c=S=b+d \quad \text{donde} \quad S=\frac{a+b+c+d}{2}$$

Resulta entonces que el área se puede calcular de la siguiente manera:

$$Area(ABCD)=S\cdot r \quad \text{donde } r \text{ es el inradio.}$$

Una relación bonita con respecto a r es:

$$r=\frac{\sqrt{4p^2q^2-\left(a^2-b^2+c^2-d^2\right)^2}}{2(a+b+c+d)}$$

En ocasiones un cuadrilátero puede tener tanto un círculo inscrito como circunscrito. En tal caso existen algunas relaciones interesantes:

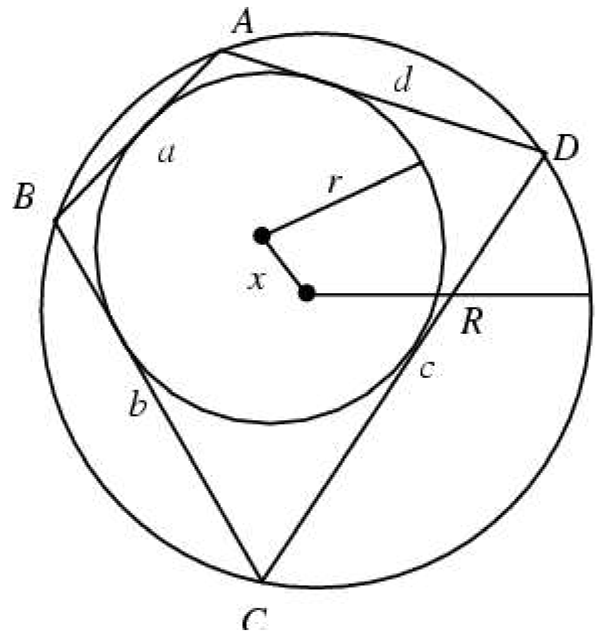


Figura 3.4.4.3 Relación de los radios de los círculos inscritos y circunscritos a un cuadrilátero.

Se cumple que:

1. $r=\frac{\sqrt{abcd}}{S}$
2. $R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)\cdot(ac+bd)\cdot(ad+bc)}{abcd}}$
3. $\text{Area}(\text{ACBD})=\sqrt{abcd}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2-(ac-bd)^2}$
4. $\frac{1}{(R-x)^2}+\frac{1}{(R+x)^2}=\frac{1}{r^2}$

3.5 Teoremas selectos.

Teorema de Ptolomeo: *un cuadrilátero es cíclico, si y solo si, el producto de sus diagonales es igual a la suma del producto de sus lados opuestos* (*véase la figura* 3.2.1):

$$AB\cdot CD=AC\cdot BD+AD\cdot BC$$

Teorema de Varignon: *En todo cuadrilátero, los puntos medios forman un paralelogramo llamado* ***Paralelogramo de Varignon****. Cuyo área es la mitad del cuadrilátero original y su perímetro es igual a la suma de las diagonales del cuadrilátero original.*

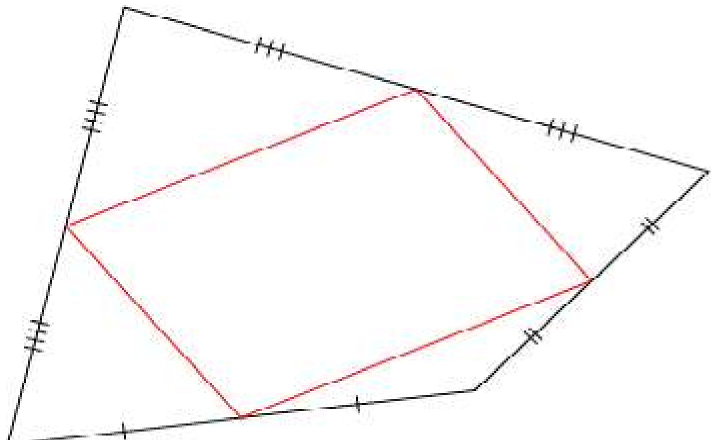


Figura 3.5.1 Teorema de Varignon.

Teorema de Menelao: *Dado un* ΔABC y una línea que corta en D, E y F a los lados (o prolongaciones) a los lados AB, BC y CA respectivamente. Se cumple:

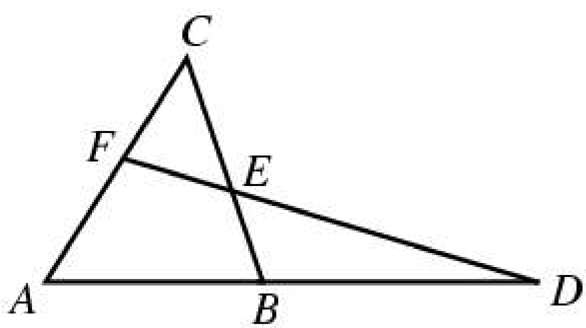


Figura 3.5.2 El teorema de Menelao

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}\cdot\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}\cdot\frac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=1$$

Teorema de Ceva: *Dado un* ΔAB*C y tres cevianas concurrentes en un punto P. Se cumpl:*

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} \cdot \frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{CB'}}{\overline{B'A}} = 1$$

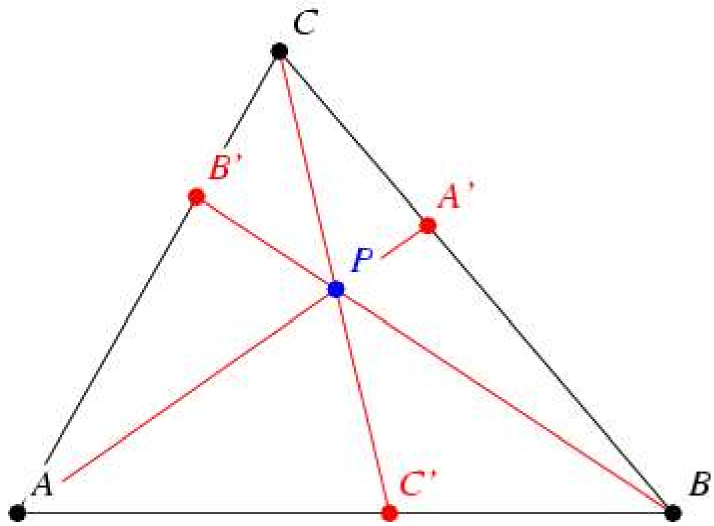


Figura 3.5.3 Teorema de Ceva.