UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN

Facultad de Matemáticas

Comportamiento Asintótico de un Sistema en Competencia con Retardo

TESIS

que para obtener el grado de

Licenciado En Matemáticas

PRESENTA:

Miguel Ángel Uh Zapata

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Angel Estrella González

Dr. Eric Ávila Vales

Diciembre 2005 **Mérida, Yucatán, México**

Agradecimientos

A Dios por ser el soporte de todo lo bueno que hago.

A mis padres por todo su esfuerzo hecho para brindarme la oportunidad de estudiar esta carrera. No puedo dejar de mencionar a mis hermanos y hermanas que siempre fueron un apoyo para seguir adelante.

A mis asesores, Dr. Angel Estrella González y Dr. Eric Ávila Vales, por los consejos y sugerencias en el desarrollo de este trabajo.

A todos mis compañeros de generación, que de una u otra manera fueron un factor importante en la terminación de mi carrera. En especial a mis amigos y amigas: *Abigail Barroso, Julio Che, Heidy Escamilla, Reymundo Itzá , Oscar Muñoz, Edith Pech y Fadelli Pérez,* de quienes siempre conté con su apoyo incondicional. En particular quiero agradecer a Heidy por tomarse la molestia de revisar el presente trabajo.

También quiero agradecer a todos los compañeros y maestros que formaron parte del comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Yucatán durante todo el tiempo que formé parte de este, sin duda fue una gran experiencia trabajar con ellos.

A todos mis maestros de la facultad, por la paciencia que me tuvieron en su determinado momento y por ser un ejemplo académico y humano a seguir.

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

1.1. Retardo

En las aplicaciones de muchos modelos que involucran ecuaciones diferenciales, tanto parciales como ordinarias, se asume que el comportamiento futuro de muchos fenómenos está únicamente determinado por el presente e independiente del pasado. Pero, por ejemplo en modelos poblacionales, la razón de crecimiento no responde instantáneamente a los cambios en el tamaño de la población.

Para describir modelos como las mencionadas anteriormente usaremos un tipo especial de ecuaciones diferenciales llamadas *Ecuaciones Diferenciales con Retardo*.

Los retardos en tiempo son componentes naturales de los sistemas biológicos y existen numerosas razones para incluirlos en modelos matemáticos. Por ejemplo, los retardos podrían ser incluidos para representar lapsos de regeneración de recursos, períodos de maduración, lapsos por alimentación, etc.

1.2. Ecuaciones Diferenciales con Retardo

Precisamente es en las *Ecuaciones Diferenciales con Retardo* (EDR), o mas general las *Ecuaciones Diferenciales Funcionales* (EDF), donde el pasado ejerce influencia sobre el futuro de una manera muy significativa. La gran mayoría de los modelos son mejor representados por EDF.

Durante los últimos 60 años y especialmente los últimos 40 las EDR han sido y continúan siendo investigados a pasos agigantados. Una de las motivaciones de su desarrollo se ha centrado en particular en la Biomatemática.

Uno de los primeros en incorporar el Retardo fue Volterra en 1926 considerando el Retardo en la respuesta de la razón de cambio de la muerte de una población a los cambios en la densidad de la misma población, causada por una acumulación de contaminantes en el pasado.

Una *Ecuación Diferencial con Retardo* es una ecuación diferencial en la cual los argumentos de la función desconocida puede ser retardada con respecto a la derivada del más alto orden de esa función (la cual es no retardada).

La forma general de una EDR de primer orden es la siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, y(t-\tau_1(t)), y(t-\tau_2(t)), \cdots, y(t-\tau_m(t)))$$

donde $\tau_j(t)$ (los retardos) son funciones positivas de t y

$$y(t) : [t_0 - r] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad , \quad f : [t_0 - r] \times \mathbb{R}^{n\times m} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

son funciones vectoriales.

La solución de una EDR con condición inicial, en general no es única. Aún si se especifican las derivadas de todos los órdenes de la solución en un punto, la solución no necesariamente será única. Para que la solución de una EDR sea única se necesita de una función inicial sobre $[t_0 - r, t_0]$ donde r es una cota suficientemente grande. Esto significa que uno puede trabajar en espacios infinito-dimensionales a diferencia de las EDO que solo trabajan en espacios finito-dimensionales.

1.3. Retardo Discreto y Continuo

Consideraremos dos tipos de modelos con EDR dependiendo del retardo empleado: un modelo con *Retardo Discreto* y un modelo con *Retardo Continuo*.

Primeramente tenemos aquellas ecuaciones diferenciales donde la razón de crecimiento per capita $y'(t)/y(t)$ es una función del tamaño de la población $y(t - \tau)$ esto es τ unidades de tiempo previos. En este caso decimos que tenemos un *Retardo Discreto* τ.

La suposición de un retardo fijo τ conducirá a una Ecuación Diferencial Funcional de la forma:

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau))$$

por lo tanto en la ecuación uno debe prescribir datos iniciales para un intervalo de longitud τ con respecto a t mas que un valor inicial $y(0)$. En otras palabras uno especifica una función $y_0(t)$ para $[-\tau, 0]$, por lo tanto se requiere la condición inicial $y(t) = y_0(t)$ en toda esta region.

También consideraremos ecuaciones con distribución de Retardo, llamado con *Retardo Continuo*, en la cual parte de la razón de crecimiento es una integral sobre el pasado.

La suposición de un Retardo Continuo conducirá a una Ecuación Integro-Diferencial de la forma:

$$y'(t) = f(t, y(t), p * y)$$

donde

$$p * y = \int_0^{\infty} w(\tau) g(y(t), y(t-\tau)) d\tau$$

para el cual uno debe prescribir valores iniciales sobre $[-\infty, 0]$.

1.4. Ejemplos de EDR

Nuestras definiciones anteriores las podemos ejemplicar mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria conocida como *Modelo Logístico* para el crecimiento en una población.

En 1836 Verhulst propuso el siguiente modelo poblacional

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = ry(t)\left[1 - \frac{y(t)}{K}\right]$$

donde el crecimiento per capita

$$r\left[1 - \frac{y(t)}{K}\right]$$

depende de $y(t)$. La constante K es la capacidad de carga del ambiente, el cual es usualmente determinado por los recursos disponibles.

En el modelo anterior se supone que la razón de crecimiento de una población en cualquier tiempo depende del número relativo de individuos en dicho tiempo, así Hutchinson en el año de 1948 propuso una ecuación logística más realista dada por la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = ry(t)\left[1 - \frac{y(t-\tau)}{K}\right]$$

donde $\tau > 0$ es constante. La ecuación anterior es llamada *Ecuación Logística con Retardo*.

Pero realmente el retardo debería ser un promedio sobre el pasado de la población, dado que nos interesa conocer de manera general lo que ha transcurrido en todo el pasado, por lo tanto resulta una ecuación Integro-Diferencial. Entonces un modelo más preciso esta dado por la ecuación

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = ry(t)\left[1 - \frac{1}{K}\int_0^{\infty} w(\tau)y(t-\tau)d\tau\right]$$

donde $w(t)$ es un factor de peso, el cual dice que tanto énfasis debería ser dado al tamaño de la población en tiempos más tempranos para determinar el efecto presente. Prácticamente $w(t)$ se aproximará a cero para tiempos negativos y positivos, t, muy lejanos y probablemente tiene un máximo en algún tiempo representante T. Una típica función $w(t)$ es como el ilustrado en la siguiente figura

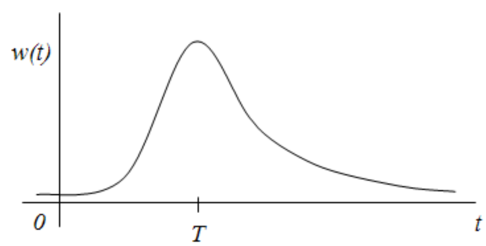


Figura §1. Ejemplo típico de la función de peso $w(t)$

1.5. Ecuaciones Diferenciales con Difusión y Retardo

En las últimas dos décadas, modelos biológicos con difusión y tiempos de retardo han sido estudiados extensivamente y muchos resultados se han establecido. Por el momento, la ecuación logística con retardo discreto de la forma

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + ry(t,x)\left[1 - \frac{y(t-\tau,x)}{K}\right]$$

con condiciones de frontera de Neumann o Dirichlet han sido investigados por Green y Stech (1981), Feng y Lu (1996), Faria y Huang (2002), por mencionar algunos.

La ecuación logística con difusión y retardo continuo de la forma

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + ry(t,x)\left[1 - \frac{1}{K}\int_0^\infty w(\tau)y(t-\tau,x)d\tau\right]$$

ha sido estudiado por Schiaffino (1979), Yamada (1993), Pao (1997), entre otros.

Recientemente, los investigadores han estudiado la combinación de los efectos de la difusión y varios retardos sobre la dinámica de diversos modelos.

1.6. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales con Difusión y Retardo

Muchas veces más que describir el crecimiento de una sola población, se está interesado en el comportamiento de varias poblaciones que interactúan entre si, ya sea beneficiandose o perjudicandose durante su interacción. Para describir este tipo de comportamiento más que de una ecuación diferencial es necesario un sistema de ecuaciones diferenciales.

Por ejemplo, el sistema

$$\frac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t} = r_1 y_1(t)\left[1 - \frac{y_1(t)}{K_1}\right] - d_1 y_1(t) y_2(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y_2(t)}{\mathrm{d}t} = r_2 y_2(t)\left[1 - \frac{y_2(t)}{K_2}\right] - d_1 y_1(t) y_2(t)$$

representa el comportamiento de dos especies $y_1(t)$ y $y_2(t)$ el cual describen individualmente un comporatmiento logístico y además la interacción entre las especies es perjudical para ambas. Esto último se observa dado que esta interacción está representada por la multiplicación del tamaño de ambas poblaciones. En este caso se dice que las poblaciones estan en *competencia*.

En los siguientes capítulos estaremos interesados en sistemas como el de arriba donde la interacción entre ambas especies es perjudicial para ambas, pero estos son algo más complejos.

Específicamente trabajaremos un sistema con difusión, donde dado las dos poblaciones $u_1(t,x)$ y $u_2(t,x)$ la intearcción entre ambas no serán en un mismo tiempo, sino que estará dada por la multiplicación del tamaño presente de una especie, por el tamaño en un tiempo retardado de la otra, es decir

$$u_1(t,x)u_2(t-\tau_2,x) \qquad \text{y} \qquad u_2(t,x)u_1(t-\tau_1,x)$$

Individualmente las poblaciones $u_1(t,x)$ y $u_2(t,x)$ estan representadas por las ecuaciones

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 + u_1\left[a_1 - b_1u_1 - \int_0^\infty f_1(\tau)u_1(t-\tau,x)d\tau\right]$$

y

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + u_2\left[a_2 - b_2u_2 - \int_0^\infty f_2(\tau)u_2(t-\tau,x)d\tau\right],$$

y posteriormente en el Capítulo 3 las constantes serán substituidas por funciones acotadas.

En las ecuaciones diferenciales anteriores se supone que el crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población (a_iu_i) e inversamente proporcional a la interacción entre la misma población ($-b_iu_i^2$), además se considera un retardo continuo

$$\int_0^\infty f_i(\tau)u_i(t-\tau,x)d\tau$$

con pesos $f_i(t)$ sobre todo el pasado.

Cabe observar que x se encuentra en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, de aquí que representemos a la difusión mediante el Laplaciano.

En las ecuaciones diferenciales parciales, aparte de mis condiciones iniciales, es necesario determinar condiciones de frontera. Trabajaremos con la diferencial normal como condición de frontera, que en el caso de $\mathbb{R}$ se reduce a las condiciones de frontera de Neumann Nulas.

Por lo tanto trabajaremos con los sistemas integro-diferenciales

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \Delta u_1 + u_1\left[a_1 - b_1 u_1 - \int_0^\infty f_1(\tau)u_1(t-\tau,x)d\tau - d_1 u_1(t,x)u_2(t-\tau_2,x)\right],$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_2 + u_2\left[a_2 - b_2 u_2 - \int_0^\infty f_2(\tau)u_2(t-\tau,x)d\tau - d_2 u_2(t,x)u_1(t-\tau_1,x)\right]$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} \;=\; & A\Delta u_1(t,x) + u_1(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)u_1(t,x) - c_1(t,x)\int_0^\infty u_1(t-\tau,x)d\mu_1(\tau) \\
& -d_1 u_2(t-r_2,x)\Big], \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} \;=\; & A\Delta u_2(t,x) + u_2(t,x)\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)u_2(t,x) - c_2(t,x)\int_0^\infty u_2(t-\tau,x)d\mu_2(\tau) \\
& -d_2 u_1(t-r_1,x)\Big],
\end{aligned}$$

cuyas especificaciones se dan en el Capítulo 2 y el Capítulo 3 respectivamente.

Capítulo 2

Sistema con Coeficientes Constantes.

2.1. El Sistema

En este capítulo estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones del siguiente sistema de reacción-difusión con tiempos de retardo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \Delta u_1 + u_1\left[a_1 - b_1 u_1 - \int_0^\infty f_1(\tau) u_1(t-\tau, x) d\tau - d_1 u_2(t - r_2, x)\right], \;\; t > 0, \;\; x \in \Omega, \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \Delta u_2 + u_2\left[a_2 - b_2 u_2 - \int_0^\infty f_2(\tau) u_2(t-\tau, x) d\tau - d_2 u_1(t - r_1, x)\right], \;\; t > 0, \;\; x \in \Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.1}$$

$$u_i(t, x) = \phi_i(t, x), \quad i = 1, 2 \quad t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

donde:

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ es un dominio acotado con frontera suave $\partial\Omega$.
- $\dfrac{\partial}{\partial \eta}$ denota la derivada normal exterior sobre $\partial\Omega$.
- a_i, b_i, d_i y r_i $(i = 1, 2)$ son constantes positivas.
- $\phi_i \in C^1((-\infty, 0]) \times \bar{\Omega}$ es acotada no negativa.

- u_1 y u_2 son las funciones de densidad de dos especies en competencia con recursos limitados compartidos.
- $f_i \in C(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$.
- La parte integral significa el término hereditario concerniente al efecto de la historia pasada sobre la razón de crecimiento presente.

2.2. Resultados Importantes

Ahora introduciremos el siguiente resultado sobre el comportamiento asintótico de la ecuación logística con difusión y tiempos de retardo, el cual es vital para la demostración de nuestro teorema principal.

Consideremos el siguiente problema de valores iniciales con condiciones de frontera.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + u\left[a - bu - \int_0^\infty f(\tau)u(t-\tau,x)d\tau\right], \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0 \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(t,x) &= \phi(t,x), \quad t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Lema 2.1

Asumamos que $f \in C(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ y $b > \int_0^\infty |f(s)|ds$, entonces el sistema (2.2) tiene una única solución acotada y no negativa. Mas aún, si $\phi(0,x)$ no es la función cero, entonces $u(x,t) > 0$ para todo $(t,x) \in (0,\infty) \times \bar{\Omega}$ y

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x) = \frac{a}{b + \int_0^\infty f(s)ds} \quad \textit{uniformemente para } x \in \bar{\Omega}.$$

Otro resultado importante para la demostración de nuestro teorema principal es el dado por las soluciones superiores e inferiores de nuestro sistema.

Definición.

Un par de funciones suaves $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ y $\widehat{u} = (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ son llamadas soluciones superiores e inferiores de (2.1), si $\widetilde{u}_i \geq \widehat{u}_i$ $(i = 1, 2)$, en $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ y para todo $\widehat{u}_i \leq \psi_i \leq \widetilde{u}_i$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} - \Delta \widetilde{u}_i &\geq \widetilde{u}_i \Big[a_i - b_i \widetilde{u}_i - \int_0^\infty f_i(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau - d_i \widehat{u}_j(t - r_j, x) \Big], \\
&\qquad\qquad j \neq i, \ \ t > 0, \ \ x \in \Omega, \\
\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} - \Delta \widehat{u}_i &\leq \widehat{u}_i \Big[a_i - b_i \widehat{u}_i - \int_0^\infty f_i(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau - d_i \widetilde{u}_j(t - r_j, x) \Big], \\
&\qquad\qquad j \neq i, \ \ t > 0, \ \ x \in \Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial \eta} \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2.3}$$

$$\widehat{u}_i(t, x) \leq \phi_i(t, x) \leq \widetilde{u}_i(t, x) \quad t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Lema 2.2

Si existe un par de soluciones superiores e inferiores $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$, $\widehat{u} = (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ para (2.3), entonces el problema (2.1) tiene una única solución (u_1^*, u_2^*) tal que para $i = 1, 2$ se tiene que $\widehat{u}_i \leq u_i^* \leq \widetilde{u}_i$.

2.3. El Principal Resultado

Llamemos para $i = 1, 2$ y $s \geq 0$

$$f_i^+ = \text{máx}(0, f_i(s)) \qquad \text{y} \qquad f_i^- = \text{máx}(0, -f_i(s))$$

entonces no es difícil ver que

$$f_i = f_i^+ - f_i^- \qquad \text{y} \qquad |f_i| = f_i^+ + f_i^-.$$

Además denotaremos para $i = 1, 2$

$$c_i^+ = \int_0^\infty f_i^+(s)ds \qquad \text{y} \qquad c_i^- = \int_0^\infty f_i^-(s)ds.$$

El principal resultado de este capítulo se establece en el siguiente teorema.

Teorema 2.1

Asumamos que $f_i \in C(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ ($i = 1, 2$) y que se cumple

$$b_1 > \int_0^\infty |f_1(s)|ds, \quad b_2 > \int_0^\infty |f_2(s)|ds \tag{2.4}$$

y

$$\frac{d_2(b_2 - c_2^-)}{(b_1 - c_1^-)(b_2 - c_2^+ - c_2^-)} < \frac{a_2}{a_1} < \frac{(b_2 - c_2^-)(b_1 - c_1^+ - c_1^-)}{d_1(b_1 - c_1^-)}, \tag{2.5}$$

entonces para cualquier $\phi_i \in C^1((-\infty, 0]) \times \bar{\Omega}$ con $\phi_i(0, x)$ distinto a la función cero, la solución de (2.1) satisface

$$\lim_{t\to\infty} u_1(t, x) = \frac{a_1(b_2 + c_2^+ - c_2^-) - a_2 d_1}{(b_1 + c_1^+ - c_1^-)(b_2 + c_2^+ - c_2^-) - d_1 d_2}, \tag{2.6}$$

$$\lim_{t\to\infty} u_2(t, x) = \frac{a_2(b_1 + c_1^+ - c_1^-) - a_1 d_2}{(b_1 + c_1^+ - c_1^-)(b_2 + c_2^+ - c_2^-) - d_1 d_2}, \tag{2.7}$$

uniformemente para $x \in \bar{\Omega}$.

2.4. Demostración de los Principales Resultados

El método de prueba es via sucesivas soluciones superiores e inferiores de sistemas adecuados. El siguiente diagrama es un bosquejo del procedimiento que emplearemos en dicha prueba.

PASO 1

Se propone un sistema superior $\bar{u}_i^{(1)}$

$$\Rightarrow u_i \leq \bar{u}_i^{(1)}$$

Aplicamos Lema 2.1 a $\bar{u}_i^{(1)}$.
Entonces

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} \bar{u}_i^{(1)}(t,x) \leq \beta_i^{(0)}$$

Por lo tanto

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_i(t,x) \leq \beta_i^{(0)}$$

Se propone un sistema inferior $\underline{u}_i^{(1)}$

$$\Rightarrow \underline{u}_i^{(1)} \leq u_i$$

NO podemos aplicar el Lema 2.1 a $\underline{u}_i^{(1)}$, así que construimos un sistema inferior $v_i^{(1)}$.

$$\Rightarrow v_i^{(1)} \leq \underline{u}_i \leq u_i$$

Aplicamos el Lema 2.1 a $v_i^{(1)}$.
Entonces

$$\alpha_i^{(0)} + \varepsilon k_1 \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} v_i^{(1)}(t,x)$$

Por lo tanto

$$\alpha_i^{(0)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_i(t,x)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(0)} &\leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_i(t,x) \\ &\leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_i(t,x) \leq \beta_i^{(0)} \end{aligned}$$

$\longrightarrow$

PASO 2

Se propone un sistema superior $\bar{u}_i^{(2)}$

$$\Rightarrow u_i \leq \bar{u}_i^{(2)}$$

NO podemos aplicar el Lema 2.1 a $\bar{u}_i^{(2)}$, así que construimos un sistema superior $w_i^{(1)}$.

$$\Rightarrow u_i \leq \bar{u}_i^{(2)} \leq w_i^{(1)}$$

Aplicamos el Lema 2.1 a $w_i^{(1)}$.
Entonces

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} w_i(t,x) \leq \beta_i^{(1)} + \varepsilon h_1$$

Por lo tanto

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_i(t,x) \leq \beta_i^{(1)}$$

Se propone un sistema inferior $\underline{u}_i^{(2)}$

$$\Rightarrow \underline{u}_i^{(2)} \leq u_i$$

NO podemos aplicar el Lema 2.1 a $\bar{u}_i^{(2)}$, así que construimos un sistema inferior $v_i^{(2)}$.

$$\Rightarrow v_i^{(2)} \leq \underline{u}_i^{(2)} \leq u_i$$

Aplicamos el Lema 2.1 a $v_i^{(2)}$.
Entonces

$$\alpha_i^{(1)} + \varepsilon k_2 \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} v_i^{(2)}(t,x)$$

Por lo tanto

$$\alpha_i^{(1)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_i(t,x)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(1)} &\leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_i(t,x) \\ &\leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_i(t,x) \leq \beta_i^{(1)} \end{aligned}$$

Además

$$0 < \alpha_i^{(0)} \leq \alpha_i^{(1)} \leq \beta_i^{(1)} \leq \beta_i^{(0)}$$

$\longrightarrow$

INDUCCIÓN

Tabla §1. Procedimiento de prueba.

Entonces procedamos a desarrollar algunos resultados que nos servirán en la demostración del Teorema 2.1.

Por hipótesis inicial tenemos que para $i = 1, 2$ la función $\phi_i(t, x) \in C^1((-\infty, 0]) \times \bar{\Omega}$ es acotada, entonces llamemos para $i = 1, 2$

$$||\phi_i|| = \sup\{|\phi_i(t, x)| : (t, x) \in (-\infty, 0] \times \bar{\Omega}\}.$$

Sean K_1, K_2 las constantes tales que

$$K_1 \geq \text{máx}\left\{||\phi_1||, \frac{a_1}{b_1 - \displaystyle\int_0^\infty |f_1(s)|ds}\right\},$$

$$K_2 \geq \text{máx}\left\{||\phi_2||, \frac{a_2}{b_2 - \displaystyle\int_0^\infty |f_2(s)|ds}\right\}.$$

Veamos que $(0, 0)$ y (K_1, K_2) son un par de soluciones inferior y superior del sistema (2.1).

Tenemos que demostrar que $K_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$ en $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ y que para todo $0 \leq \psi_i \leq K_i$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_i}{\partial t} - \Delta K_i &\geq K_i\left[a_i - b_i K_i - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau, x)d\tau - d_i \cdot 0\right], \quad t > 0, \ \ x \in \Omega, \\ \frac{\partial 0}{\partial t} - \Delta 0 &\leq 0\left[a_i - b_i \cdot 0 - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau, x)d\tau - d_i K_j\right], \quad j \neq i, \ \ t > 0, \ \ x \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial 0}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial K_i}{\partial \eta} \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$0 \leq \phi_i(t, x) \leq K_i \quad t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (i = 1, 2).$$

Así por hipótesis inicial $\quad b_i > \displaystyle\int_0^\infty |f_i(\tau)|d\tau \quad$ y $\quad a_i > 0 \quad$ entonces

$$\frac{a_i}{b_i - \displaystyle\int_0^\infty |f_i(\tau)|d\tau} > 0,$$

además tenemos que

$$K_i \geq \frac{a_i}{b_i - \displaystyle\int_0^\infty |f_i(\tau)|d\tau},$$

por lo tanto $K > 0$ para todo $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ e $\quad i = 1, 2.$

Ahora supongamos que $0 \leq \psi_i \leq K_i$ y veamos que se cumplen las últimas cuatro desigualdades.

Dado que $\psi_i \leq K_i$, entonces $-K_i \leq -\psi_i$, así tenemos que

$$\begin{aligned} -K_i \int_0^\infty |f_i(\tau)|d\tau &= \int_0^\infty K_i\Big[-|f_i(\tau)|\Big]d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \psi_i(t-\tau, x)\Big[-|f_i(\tau)|\Big]d\tau \\ &\leq \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau, x)d\tau \end{aligned}$$

entonces

$$-K_i \int_0^\infty |f_i(\tau)|d\tau \leq \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau, x)d\tau.$$

Pero hemos visto que

$$\frac{a_i}{b_i - \displaystyle\int_0^\infty |f_i(\tau)|d\tau} \leq K_i\ ,$$

lo que implica que

$$a_i \leq K_i b_i - K_i \int_0^\infty |f_i(\tau)|d\tau.$$

Añadiendo el resultado anterior obtenemos

$$a_i \leq K_i b_i + \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau,$$

entonces

$$0 \geq a_i - K_i b_i - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau,$$

además como $0 \leq K_i$, lo anterior implica

$$0 \geq K_i\left[a_i - K_i b_i - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau\right],$$

el cual es equivalente a mi primera desigualdad.

La segunda y tercera desigualdad se reducen a $0 \leq 0$ y $0 \leq 0 \leq 0$ respectivamente, lo cual claramente es cierto.

Por hipótesis inicial tenemos que $0 \leq \phi_i(t,x)$ para $t \leq 0$, $x \in \bar{\Omega}$ y además por la definición de K_i, para $i = 1,2,\;\; t \leq 0$ y $x \in \bar{\Omega}$ se tiene que

$$0 \leq \phi_i(t,x) \leq ||\phi_i|| \leq K_i,$$

entonces se cumple la última desigualdad.

Por lo tanto $(0,0)$ *y* (K_1,K_2) *son un par de soluciones inferior y superior de (2.1).*

Entonces por el Lema 2.2, tenemos una única solución no negativa global (u_1,u_2) tal que

$$0 \leq u_1 \leq K_1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq u_2 \leq K_2.$$

Definamos $\bar{u}_1^{(1)}(x,t)$, $\bar{u}_2^{(1)}(x,t)$ por

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_1^{(1)}}{\partial t} &= \Delta \bar{u}_1^{(1)} + \bar{u}_1^{(1)}\left[a_1 - b_1\bar{u}_1^{(1)} + \int_0^\infty f_1^-(\tau)\bar{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)d\tau\right], \;\; t>0, \;\; x\in\Omega,\\ \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial t} &= \Delta \bar{u}_2^{(1)} + \bar{u}_2^{(1)}\left[a_2 - b_2\bar{u}_2^{(1)} + \int_0^\infty f_2^-(\tau)\bar{u}_2^{(1)}(t-\tau,x)d\tau\right], \;\; t>0, \;\; x\in\Omega,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{(1)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t>0, \quad x\in\partial\Omega, \tag{2.8}$$

$$\bar{u}_i^{(1)}(t,x) = K_i, \quad i=1,2, \quad t\le 0, \quad x\in\bar{\Omega} \quad (i=1,2).$$

En el sistema no acoplado (2.8) tenemos que

$$-f_i^- \in C(\mathbb{R}^+)\cap L^1(\mathbb{R}^+)$$

y para $i=1,2$

$$b_i > \int_0^\infty |f_i(s)|ds \ge \int_0^\infty |-f_i^-(s)|ds.$$

Además tenemos que $\bar{u}_i^{(1)}(0,x) = K_i$ (distinta de la función cero). Así las condiciones anteriores son justamente las necesarias para aplicar el Lema 2.1.

Por lo tanto por el Lema 2.1 tenemos que para toda $(t,x)\in(0,\infty)\times\bar{\Omega}$

$$\bar{u}_i^{(1)}(t,x) > 0$$

y además

$$\lim_{t\to\infty} \bar{u}_i^{(1)}(t,x) = \frac{a_i}{b_i + \displaystyle\int_0^\infty [-f_i^-(s)]ds} = \frac{a_i}{b_i - c_i^-} = \beta_i^{(0)} \quad i=1,2. \tag{2.9}$$

Veamos que $(0,0)$ y $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$ son un par de soluciones inferior y superior del sistema (2.1).

Tenemos que demostrar que $\bar{u}_i^{(1)} \geq 0$ $(i = 1, 2)$ en $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ y que para todo $0 \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(1)}$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_i^{(1)} \geq \bar{u}_i^{(1)} \left[a_i - b_i \bar{u}_i^{(1)} - \int_0^\infty f_i(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau - d_i \cdot 0 \right], \quad t > 0, \;\; x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial 0}{\partial t} - \Delta 0 \leq 0 \left[a_i - b_i \cdot 0 - \int_0^\infty f_i(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau - d_i \bar{u}_j^{(1)}(t - r_j, x) \right] \;\; j \neq i, \;\; t > 0, \;\; x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial 0}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} \quad t > 0, \quad x \in \partial \Omega,$$

$$0 \leq \phi_i(t, x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t, x) \quad t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (i = 1, 2).$$

Dado que $\bar{u}_i^{(1)}(t, x) = K_i \geq 0$ para $(t, x) \in (-\infty, 0] \times \bar{\Omega}$ tenemos que $0 \leq \bar{u}_i^{(1)}$ en este dominio. Y como vimos $\bar{u}_i^{(1)}(t, x) > 0$ para toda $(t, x) \in (0, \infty) \times \bar{\Omega}$. Por lo tanto para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $x \in \bar{\Omega}$ e $i = 1, 2$ se tiene que

$$0 \leq \bar{u}_i^{(1)}(t, x).$$

Ahora supongamos que $0 \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(1)}$ y veamos que se cumplen las últimas cuatro desigualdades.

Como $\bar{u}_i^{(1)} \geq \psi_i$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_i^{(1)} &= \bar{u}_i^{(1)} \left[a_i - b_i \bar{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau, x) d\tau \right] \\
&\geq \bar{u}_i^{(1)} \left[a_i - b_i \bar{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau \right] \\
&= \bar{u}_i^{(1)} \left[a_i - b_i \bar{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty (f_i^+ - f_i)(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau \right] \\
&= \bar{u}_i^{(1)} \left[a_i - b_i \bar{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i^+(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau) - \int_0^\infty f_i(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau \right] \\
&\geq \bar{u}_i^{(1)} \left[a_i - b_i \bar{u}_i^{(1)} - \int_0^\infty f_i(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau \right]
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_i^{(1)} \geq \bar{u}_i^{(1)}\left[a_i - b_i\bar{u}_i^{(1)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau\right].$$

La segunda y tercera desigualdad se reducen a $0 \leq 0$ y $0 \leq 0 \leq 0$ respectivamente, lo cual claramente es cierto.

La última desigualdad es cierta para $t \leq 0$, $x \in \bar{\Omega}$ porque

$$0 \leq \phi_i(t,x) \leq ||\phi_i(t,x)|| \leq K_i = \bar{u}_i^{(1)}(t,x).$$

Por lo tanto $(0,0)$ *y* $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$ *son soluciones inferior y superior de (2.1).*

Entonces aplicando el Lema 2.2 tenemos que para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \bar{\Omega}$

$$0 \leq u_1 \leq \bar{u}_1^{(1)} \quad \text{y} \quad 0 \leq u_2 \leq \bar{u}_2^{(1)}.$$

Entonces de (2.9) tenemos que para $i = 1, 2$

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_i(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} \bar{u}_1^{(1)}(t,x) = \frac{a_i}{b_i - c_i^-} = \beta_i^{(0)}. \tag{2.10}$$

Veamos que $(0,0)$ *y* (K_1, K_2) *no sólo son un par de soluciones inferior y superior del sistema (2.1), si no también del sistema (2.8).*

Tenemos que demostrar que $K_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$ en $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ y que para todo $0 \leq \psi_i \leq K_i$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_i}{\partial t} - \Delta K_i &\geq K_i\left[a_i - b_iK_i - \int_0^\infty f_i^-(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau\right], \quad t>0,\ \ x \in \Omega, \\
\frac{\partial 0}{\partial t} - \Delta 0 &\leq 0\left[a_i - b_i\cdot 0 - \int_0^\infty f_i^-(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau\right], \quad j \neq i,\ \ t>0,\ \ x\in\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial 0}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial K_i}{\partial \eta} \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$0 \leq \phi_i(t,x) \leq K_i \quad t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (i = 1, 2).$$

Notemos que la primera desigualdad la hemos demostrado, así supongamos que $0 \leq \psi_i \leq K_i$ y veamos que se cumple la cuatro últimas desigualdades.

Dado que $\psi_i \leq K_i$ entonces $-K_i \leq -\psi_i$, así tenemos que

$$\begin{aligned} -K_i \int_0^\infty |f_i(\tau)| d\tau &= \int_0^\infty K_i \Big[-|f_i(\tau)| \Big] d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \psi_i(t-\tau, x) \Big[-|f_i(\tau)| \Big] d\tau. \end{aligned}$$

Pero tenemos que

$$f_i^-(\tau) \leq |f_i(\tau)|,$$

entonces

$$-|f_i(\tau)| \leq -f_i^-(\tau),$$

de aquí

$$-K_i \int_0^\infty |f_i(\tau)| d\tau \leq -\int_0^\infty f_i^-(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau.$$

Pero tenemos que

$$\frac{a_i}{b_i - \displaystyle\int_0^\infty |f_i(\tau)| d\tau} \leq K_i \ ,$$

lo que implica

$$a_i \leq K_i b_i - K_i \int_0^\infty |f_i(\tau)| d\tau,$$

entonces, añadiendo lo anterior

$$0 \geq a_i - K_i b_i - \int_0^\infty f_i^-(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau,$$

además como $0 \leq K_i$, tenemos que

$$0 \geq K_i \left[a_i - K_i b_i - \int_0^\infty f_i^-(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau \right],$$

el cual es equivalente a mi primera desigualdad.

La segunda y tercera desigualdad se reducen a $0 \leq 0$ y $0 \leq 0 \leq 0$ respectivamente, lo cual claramente es cierto.

La última desigualdad se cumple trivialmente dado que $\phi_i(t,x) = K_i$ para $t \leq 0$ y $x \in \bar{\Omega}$.

Por lo tanto $(0,0)$ *y* (K_1, K_2) *son un par de soluciones inferior y superior de (2.8).*

Entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \bar{\Omega}$ se cumple que

$$0 \leq \bar{u}_1^{(1)} \leq K_1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \bar{u}_2^{(1)} \leq K_2.$$

De la definición de límite superior en (2.9) tenemos que para $i = 1, 2$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, t_1' > 0 \text{ tal que } \quad \max_{x \in \bar{\Omega}} \bar{u}_i^{(1)}(t,x) < \beta_i^{(0)} + \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_1'$$

Por otro lado para $i = 1, 2$ tenemos que

$$c_i^+ = \int_0^\infty f_i^+(s)ds = \lim_{t \to \infty} \int_0^t f_i^+(s)ds$$

entonces

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, t_1'' > 0 \ \text{ tal que } \quad c_i^+ - \int_0^t f_i^+(s)ds = \left| c_i^+ - \int_0^t f_i^+(s)ds \right| < \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_1''$$

Tomemos $t_1 = t_1' + t_1'' + \max\{r_1, r_2\}$.

Así para $i = 1, 2$ y $t \geq t_1$ tenemos que

$$t - r_i \geq t_1 - r_i = (t'_1 + t''_1 + \text{máx}\{r_1, r_2\}) - r_i \geq t'_1 \ ,$$

entonces para $i = 1, 2$ y $t \geq t_1$

$$\bar{u}_i^{(1)}(t - r_i, x) < \beta_i^{(0)} + \varepsilon \ .$$

También para $t \geq t_1$ tenemos que

$$t - t'_1 \geq t_1 - t'_1 = (t'_1 + t''_1 + \text{máx}\{r_1, r_2\}) - t'_1 \geq t''_1 \ ,$$

entonces para $i = 1, 2$ y $t \geq t_1$

$$c_i^+ - \int_0^{t - t'_i} f_i^+(s) ds < \varepsilon \ .$$

Por lo tanto para $i = 1, 2$ y $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \, t'_1 > 0$ y $t_1 > t'_1$ tal que

$$\begin{aligned}
&\max_{x \in \bar{\Omega}} \bar{u}_i^{(1)}(t, x) < \beta_i^{(0)} + \varepsilon \quad \text{para} \ \ t \geq t'_1, \\
&\bar{u}_i^{(1)}(t - r_i, x) < \beta_i^{(0)} + \varepsilon \quad \text{para} \ \ t \geq t_1, \qquad (2.11) \\
&c_i^+ - \int_0^{t - t'_1} f_i^+(s) ds < \varepsilon \quad \text{para} \ \ t \geq t_1.
\end{aligned}$$

Definamos $\underline{u}_1^{(1)}(t,x)$, $\underline{u}_2^{(1)}(t,x)$ por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_1^{(1)}}{\partial t} &= \Delta \underline{u}_1^{(1)} + \underline{u}_1^{(1)}\Big[a_1 - b_1\underline{u}_1^{(1)} + \int_0^\infty f_1^-(\tau)\underline{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_1^+(\tau)\bar{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_1\bar{u}_2^{(1)}(t-r_2,x)\Big], \ \ t>t_1, \ \ x\in\Omega, \\
\frac{\partial \underline{u}_2^{(1)}}{\partial t} &= \Delta \underline{u}_2^{(1)} + \underline{u}_2^{(1)}\Big[a_2 - b_2\underline{u}_2^{(1)} + \int_0^\infty f_2^-(\tau)\underline{u}_2^{(1)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_2^+(\tau)\bar{u}_2^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_2\bar{u}_1^{(1)}(t-r_1,x)\Big], \ \ t>t_1, \ \ x\in\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_1^{(1)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{u}_2^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t>t_1, \quad x\in\partial\Omega, \tag{2.12}$$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) = \frac{1}{2}u_i(t,x), \quad (t,x)\in(-\infty,t_1]\times\bar{\Omega}.$$

Veamos que $(\underline{u}_1^{(1)},\underline{u}_2^{(1)})$ *y* $(\bar{u}_1^{(1)},\bar{u}_2^{(1)})$ *son un par de soluciones inferior y superior de (2.1).*

Tenemos que demostrar que $\bar{u}_i^{(1)} \geq \underline{u}_i^{(1)}$ en $\mathbb{R}\times\bar{\Omega}$ $(i=1,2)$ y que para todo $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(1)}$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta\bar{u}_i^{(1)} &\geq \bar{u}_i^{(1)}\Big[a_i - b_i\bar{u}_i^{(1)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big], \\
&\qquad j\neq i, \ \ t>t_1, \ \ x\in\Omega, \\
\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta\underline{u}_i^{(1)} &\leq \underline{u}_i^{(1)}\Big[a_i - b_i\underline{u}_i^{(1)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big], \\
&\qquad j\neq i, \ \ t>t_1, \ \ x\in\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} \quad t>t_1, \quad x\in\partial\Omega,$$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x) \quad t\leq t_1, \quad x\in\bar{\Omega} \quad (i=1,2).$$

Para $t\leq t_1$ tenemos que

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) = \frac{1}{2}u_i(t,x) \leq u_i(t,x).$$

Pero hemos demostrado que $(0,0)$ y $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$ son un par de soluciones inferior y superior del sistema (2.1), así que $u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Entonces para $t \leq t_1$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x),$$

que resulta ser la última desigualdad que queremos demostrar.

Por otro lado si observamos las ecuaciones (2.12) y (2.8) vemos que para $t > t_1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} &= \Delta \underline{u}_i^{(1)} + \underline{u}_i^{(1)} \left[a_i - b_i \underline{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x) d\tau \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty f_i^+(\tau) \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x) d\tau - d_i \bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \right] \\
&\leq \Delta \underline{u}_i^{(1)} + \underline{u}_i^{(1)} \left[a_i - b_i \underline{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x) d\tau \right]
\end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} = \Delta \bar{u}_i^{(1)} + \bar{u}_i^{(1)} \left[a_i - b_i \bar{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x) d\tau \right].$$

Así por un criterio de comparación de las soluciones entre estos dos problemas tenemos que para $t > t_1$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x).$$

Por lo tanto de los dos casos obtenemos que para $(t,x) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x).$$

Ahora supongamos que $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(1)}$ y demostremos las tres desigualdades restantes.

Nuevamente como $(0,0)$ y $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$ son un par de soluciones inferior y superior del sistema (2.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_i^{(1)} &\geq \bar{u}_i^{(1)}\left[a_i - b_i\bar{u}_i^{(1)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau\right] \\
&\geq \bar{u}_i^{(1)}\left[a_i - b_i\bar{u}_i^{(1)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\right].
\end{aligned}$$

Por lo tanto para $i \neq j$, $t > t_1$, $x \in \Omega$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_i^{(1)} \geq \bar{u}_i^{(1)}\left[a_i - b_i\bar{u}_i^{(1)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\right].$$

Para la segunda desigualdad tenemos que de (2.12)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_i^{(1)} = \; & \underline{u}_i^{(1)}\Bigg[a_i - b_i\underline{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau)\underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau \\
& - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Bigg]
\end{aligned}$$

Pero como $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_i^{(1)} &\leq \underline{u}_i^{(1)}\Bigg[a_i - b_i\underline{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Bigg] \\
&= \underline{u}_i^{(1)}\Bigg[a_i - b_i\underline{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty (f_i^+ - f_i)(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Bigg] \\
&= \underline{u}_i^{(1)}\Bigg[a_i - b_i\underline{u}_1^{(1)} + \int_0^\infty f_i^+(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Bigg] \\
&= \underline{u}_i^{(1)}\Bigg[a_i - b_i\underline{u}_i^{(1)} - \int_0^\infty f_i^+(\tau)(\bar{u}_i^{(1)} - \psi_i)(t-\tau,x)d\tau - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Bigg].
\end{aligned}$$

Como $\psi_i \leq \bar{u}_i^{(1)}$, entonces $(\bar{u}_i^{(1)} - \psi_i) \geq 0$, así para $i \neq j$, $t > t_1$, $x \in \Omega$ tenemos

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_i^{(1)} \leq \underline{u}_i^{(1)} \Big[a_i - b_i \underline{u}_i^{(1)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i \bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \Big].$$

La tercera desigualdad resulta obvia dado que para $t > t_1$, $x \in \partial\Omega$

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \leq 0 \leq 0 = \frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial \eta}.$$

Por lo tanto $(\underline{u}_1^{(1)} \underline{u}_2^{(1)})$ *y* $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$ *son un par de soluciones inferior y superior de (2.1).*

Entonces aplicando el Lema 2.2 tenemos que

$$\underline{u}_1^{(1)} \leq u_1 \leq \bar{u}_1^{(1)} \qquad \text{y} \qquad \underline{u}_2^{(1)} \leq u_2 \leq \bar{u}_2^{(1)}. \tag{2.13}$$

Tomando en cuenta el hecho de que $\bar{u}_i^{(1)} \leq K_i$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y por (2.11), tenemos que para $t \geq t_1$,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau + d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \\
= \;& \int_0^{t-t_1'} f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau + \int_{t-t_1'}^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau + d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \\
\leq \;& \int_0^{t-t_1'} f_i^+(\tau)(\beta_i^{(0)}+\varepsilon)d\tau + \int_{t-t_1'}^\infty K_i f_i^+(\tau)d\tau + d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) \\
\leq \;& (\beta_i^{(0)}+\varepsilon)\int_0^{t-t_1'} f_i^+(\tau)d\tau + K_i\int_{t-t_1'}^\infty f_i^+(\tau)d\tau + d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) \\
= \;& (\beta_i^{(0)}+\varepsilon)\int_0^\infty f_i^+(\tau)d\tau + K_i\Big(\int_0^\infty f_i^+(\tau)d\tau - \int_0^{t-t_1'} f_i^+(\tau)d\tau\Big) + d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) \\
= \;& (\beta_i^{(0)}+\varepsilon)c_i^+ + K_i\Big(c_i^+ - \int_0^{t-t_1'} f_i^+(\tau)d\tau\Big) + d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) \\
\leq \;& c_i^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) + d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) + K_i\varepsilon,
\end{aligned}$$

entonces para $t \geq t_1$

$$-\int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \geq -c_i^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon.$$

Por lo tanto sustituyendo en (2.12) se obtiene, para $t > t_1$, $x \in \Omega$, las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_1^{(1)}}{\partial t} &\geq \Delta\underline{u}_1^{(1)} + \underline{u}_1^{(1)}\Big[a_1 - b_1\underline{u}_1^{(1)} + \int_0^\infty f_1^-(\tau)\underline{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad -c_1^+(\beta_1^{(0)}+\varepsilon) - d_1(\beta_2^{(0)}+\varepsilon) - K_1\varepsilon\Big], \\
\frac{\partial \underline{u}_2^{(1)}}{\partial t} &\geq \Delta\underline{u}_2^{(1)} + \underline{u}_2^{(1)}\Big[a_2 - b_2\underline{u}_2^{(1)} + \int_0^\infty f_2^-(\tau)\underline{u}_2^{(1)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad -c_2^+(\beta_2^{(0)}+\varepsilon) - d_2(\beta_1^{(0)}+\varepsilon) - K_2\varepsilon\Big].
\end{aligned}$$

Por un principio de comparación, conseguimos para $t > t_1, \;\; x \in \Omega$

$$\underline{u}_1^{(1)} \geq v_1^{(1)} \quad \text{y} \quad \underline{u}_2^{(1)} \geq v_2^{(1)}, \tag{2.14}$$

donde $v_1^{(1)}$ y $v_2^{(1)}$ son la soluciones de los siguientes problemas, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial t} &= \Delta v_1^{(1)} + v_1^{(1)}\Big[a_1 - b_1 v_1^{(1)} + \int_0^\infty f_1^-(\tau)v_1^{(1)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad -c_1^+(\beta_1^{(0)}+\varepsilon) - d_1(\beta_2^{(0)}+\varepsilon) - K_1\varepsilon\Big], \;\; t > t_1, \;\; x \in \Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t > t_1, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$v_1^{(1)}(t,x) = \frac{1}{2}u_1(t,x), \quad (t,x) \in (-\infty, t_1] \times \bar{\Omega},$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial t} &= \Delta v_2^{(1)} + v_2^{(1)}\Bigg[a_2 - b_2 v_2^{(1)} + \int_0^\infty f_2^-(\tau) v_2^{(1)}(t-\tau,x)d\tau \\ &\quad -c_2^+(\beta_2^{(0)}+\varepsilon) - d_2(\beta_1^{(0)}+\varepsilon) - K_2\varepsilon\Bigg], \;\; t > t_1, \;\; x \in \Omega,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t > t_1, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$v_2^{(1)}(t,x) = \frac{1}{2}u_2(t,x), \quad (t,x) \in (-\infty, t_1] \times \bar{\Omega}.$$

Queremos aplicar el Lema 2.1 a los dos problemas anteriores, así que veamos si se cumplen las hipótesis necesarias.

Tenemos que

$$b_i > \int_0^\infty |f_i(\tau)|d\tau \geq \int_0^\infty |-f_i^-(\tau)|d\tau,$$

además se tiene que $v_i^{(1)}(t_1,x) = \frac{1}{2}u_2(t_1,x)$, el cual no es la función cero. Por último necesitamos que $0 < b_i$, el cual tenemos por hipótesis inicial, y

$$0 < a_i - c_i^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon.$$

Tomemos ε de manera que

$$0 < \varepsilon < \text{mín}\left\{\frac{a_1 - c_1^+\beta_1^{(0)} - d_1\beta_2^{(0)}}{c_1^+ + d_1 + K_1}, \frac{a_2 - c_2^+\beta_2^{(0)} - d_2\beta_1^{(0)}}{c_2^+ + d_2 + K_2}\right\},$$

entonces

$$\begin{aligned}\varepsilon < \frac{a_i - c_i^+\beta_i^{(0)} - d_i\beta_j^{(0)}}{c_i^+ + d_i + K_i} &\iff \varepsilon(c_i^+ + d_i + K_i) < a_i - c_i^+\beta_i^{(0)} - d_i\beta_j^{(0)} \\ &\iff 0 < a_i - c_i^+\beta_i^{(0)} - d_i\beta_j^{(0)} - \varepsilon c_i^+ - \varepsilon d_i - K_i\varepsilon \\ &\iff 0 < a_i - c_i^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon.\end{aligned}$$

Como $c_i^+ + d_i + K_i > 0$, únicamente nos falta garantizar que para $i = 1, 2$, $i \neq j$ se cumple

$$a_i - c_i^+ \beta_i^{(0)} - d_i \beta_j^{(0)} > 0,$$

para poder tomar la ε de la forma anterior.

Pero tenemos que

$$b_i > \int_0^\infty |f_i(\tau)| d\tau = \int_0^\infty (f_i^+ + f_i^-)(\tau) d\tau = \int_0^\infty f_i^+(\tau) d\tau + \int_0^\infty f_i^-(\tau) d\tau = c_i^+ + c_i^-,$$

entonces para $i = 1, 2$

$$b_i > c_i^+ + c_i^- \iff b_i - c_i^+ - c_i^- > 0,$$

además

$$b_i - c_i^- > b_i - c_i^+ + c_i^- > 0.$$

Por lo tanto la hipótesis inicial

$$\frac{d_2(b_2 - c_2^-)}{(b_1 - c_1^-)(b_2 - c_2^+ - c_2^-)} < \frac{a_2}{a_1} < \frac{(b_2 - c_2^-)(b_1 - c_1^+ - c_1^-)}{d_1(b_1 - c_1^-)}$$

es equivalente a

$$\frac{a_j}{a_i} < \frac{(b_j - c_j^-)(b_i - c_i^+ - c_i^-)}{d_i(b_i - c_i^-)} \qquad i = 1, 2, \;\; i \neq j.$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{a_j}{a_i} < \frac{(b_j - c_j^-)(b_i - c_i^+ - c_i^-)}{d_i(b_i - c_i^-)} &\iff 0 < \frac{(b_j - c_j^-)(b_i - c_i^+ - c_i^-)}{d_i(b_i - c_i^-)} - \frac{a_j}{a_i} \\ &\iff 0 < \frac{(b_j - c_j^-)(b_i - c_i^-) - (b_j - c_j^-)c_i^+}{d_i(b_i - c_i^-)} - \frac{a_j}{a_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff 0 < \frac{b_j - c_j^-}{d_i} - \frac{c_i^+(b_j - c_j^-)}{d_i(b_i - c_i^-)} - \frac{a_j}{a_i} \\
&\iff 0 < \frac{b_j - c_j^-}{a_i d_i}\left[a_i - \frac{a_i c_i^+}{b_i - c_i^-} - \frac{a_j d_i}{b_j - c_j^-}\right] \\
&\iff 0 < a_i - \frac{a_i c_i^+}{b_i - c_i^-} - \frac{a_j d_i}{b_j - c_j^-} \ ,
\end{aligned}$$

pero tenemos que

$$\beta_i^{(0)} = \frac{a_i}{b_i - c_i^-} \ ,$$

entonces

$$0 < a_i - c_i^+ \beta_i^{(0)} - d_i \beta_j^{(0)}.$$

Por lo tanto para ε suficientemente pequeño (menor que mi condición), tenemos

$$\begin{aligned}
a_1 - c_1^+(\beta_1^{(0)} + \varepsilon) - d_1(\beta_2^{(0)} + \varepsilon) - K_1\varepsilon &> 0 \ , \\
a_2 - c_2^+(\beta_2^{(0)} + \varepsilon) - d_2(\beta_1^{(0)} + \varepsilon) - K_2\varepsilon &> 0 \ .
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Por el Lema 2.1, obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} v_i^{(1)}(t,x) = \frac{a_i - c_i^+(\beta_i^{(0)} + \varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)} + \varepsilon) - K_i\varepsilon}{b_1 - c_1^-},$$

o equivalentemente

$$\lim_{t\to\infty} v_1^{(1)}(t,x) = \frac{a_1 - c_1^+\beta_1^{(0)} - d_1\beta_2^{(0)}}{b_1 - c_1^-} - \varepsilon\frac{c_1^+\beta_1^{(0)} + d_1\beta_2^{(0)} + K_1}{b_1 - c_1^-},$$

y

$$\lim_{t\to\infty} v_2^{(1)}(t,x) = \frac{a_2 - c_2^+\beta_2^{(0)} - d_2\beta_1^{(0)}}{b_2 - c_2^-} - \varepsilon\frac{c_2^+\beta_2^{(0)} + d_2\beta_1^{(0)} + K_2}{b_2 - c_2^-}.$$

Entonces por (2.14)

$$\lim_{t\to\infty} \underline{u}_i^{(1)}(t,x) \geq \frac{a_i - c_i^+\beta_i^{(0)} - d_i\beta_j^{(0)}}{b_i - c_i^-} - \varepsilon\frac{c_i^+\beta_i^{(0)} + d_i\beta_2^{(0)} + K_i}{b_i - c_i^-}.$$

Para ε suficientemente pequeño tenemos que

$$0 < \frac{a_i - c_i^+\beta_i^{(0)} - d_i\beta_j^{(0)}}{b_i - c_i^-} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} \underline{u}_i^{(1)}(t,x). \tag{2.16}$$

Por lo tanto por (2.13) y ε suficientemente pequeño

$$0 < \alpha_1^{(0)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \beta_1^{(0)}\ , \tag{2.17}$$

y

$$0 < \alpha_2^{(0)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \beta_2^{(0)}\ , \tag{2.18}$$

donde

$$\alpha_1^{(0)} = \frac{a_1 - c_1^+\beta_1^{(0)} - d_1\beta_2^{(0)}}{b_1 - c_1^-} \qquad \text{y} \qquad \alpha_2^{(0)} = \frac{a_2 - c_2^+\beta_2^{(0)} - d_2\beta_1^{(0)}}{b_2 - c_2^-}.$$

Entonces aplicando la definición de limite inferior en (2.16) y bajo un procedimiento análogo a (2.11) tenemos que para $i = 1,2$ y $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, t_2' > t_1$ y $t_2 > t_2'$ tal que

$$\begin{aligned}
&\min_{x\in\bar{\Omega}} \underline{u}_i^{(1)}(t,x) > \alpha_i^{(0)} - \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_2', \\
&\underline{u}_i^{(1)}(t - r_i, x) > \alpha_i^{(0)} + \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_2, \\
&c_i^+ - \varepsilon < \int_0^{t-t_2'} f_i^+(s)ds \quad \text{para } \ t \geq t_2.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Definamos $\bar{u}_1^{(2)}$ y $\bar{u}_2^{(2)}$ por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_1^{(2)}}{\partial t} &= \Delta \bar{u}_1^{(2)} + \bar{u}_1^{(2)}\Big[a_1 - b_1\bar{u}_1^{(2)} + \int_0^\infty f_1^-(\tau)\bar{u}_1^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_1^+(\tau)\underline{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_1\underline{u}_2^{(1)}(t-r_2,x)\Big], \;\; t>t_2, \;\; x\in\Omega, \\
\frac{\partial \bar{u}_2^{(2)}}{\partial t} &= \Delta \bar{u}_2^{(2)} + \bar{u}_2^{(2)}\Big[a_2 - b_2\bar{u}_2^{(2)} + \int_0^\infty f_2^-(\tau)\bar{u}_2^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_2^+(\tau)\underline{u}_2^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_2\underline{u}_1^{(1)}(t-r_1,x)\Big], \;\; t>t_2, \;\; x\in\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{(2)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{u}_2^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \quad t>t_2, \quad x\in\partial\Omega, \tag{2.20}$$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) = K_i, \quad (t,x)\in(-\infty,t_2]\times\bar{\Omega}.$$

Veamos que $(\underline{u}_1^{(1)}$ *y* $(\bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)})$ *son un par de soluciones inferior y superior de (2.1).*

Tenemos que demostrar que $\bar{u}_i^{(2)} \geq \underline{u}_i^{(1)}$ en $\mathbb{R}\times\bar{\Omega}$ $(i=1,2)$ y que para todo $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(2)}$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - \Delta\bar{u}_i^{(2)} &\geq \bar{u}_i^{(2)}\Big[a_i - b_i\bar{u}_i^{(2)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big] \\
&\qquad j\neq i, \;\; t>0, \;\; x\in\Omega, \\
\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta\underline{u}_i^{(1)} &\leq \underline{u}_i^{(1)}\Big[a_i - b_i\underline{u}_i^{(1)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big] \\
&\qquad j\neq i, \;\; t>0, \;\; x\in\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial \eta} \quad t>0, \quad x\in\partial\Omega,$$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x) \quad t\leq t_2, \quad x\in\bar{\Omega} \quad (i=1,2).$$

Hemos demostrado que $(0,0)$ y (K_1,K_2) son soluciones inferior y superior del sistema (2.1) entonces $u_i(t,x) \leq K_i$, entonces para $t \leq t_2$

$$u_i(t,x) \leq K_i = \bar{u}_i^{(2)}(t,x).$$

Tambien tenemos que $(\underline{u}_1^{(1)}, \underline{u}_2^{(1)})$ y $\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$ son soluciones inferior y superior de (2.1) entonces

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq u_i(t,x).$$

Por lo tanto para $t \leq t_2$ tenemos que

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x),$$

que resulta ser la última desigualdad que queremos demostrar.

Por otro lado de los problemas (2.20) y (2.12) tenemos que para $t > t_2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} &= \Delta \bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_i^{(2)}\Big[a_i - b_i\bar{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau)\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big] \\
&\geq \Delta \bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_i^{(2)}\Big[a_i - b_i\bar{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau)\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} &= \Delta \underline{u}_i^{(1)} + \underline{u}_i^{(1)}\Big[a_i - b_i\underline{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau)\underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big],
\end{aligned}$$

entonces por un criterio de comparación de las soluciones para $t > t_2$ tenemos que

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x).$$

Por lo tanto para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ tenemos que

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x).$$

Ahora supongamos que $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(2)}$ y demostremos las tres desigualdades restantes.

Para la primera desigualdad tenemos que para $i = 1, 2$, $j \neq i$, $t > t_2$, $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_i^{(2)} &= \bar{u}_i^{(2)} \Big[a_i - b_i \bar{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x) d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau) \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x) d\tau - d_i \underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \Big], \end{aligned}$$

dado que $\bar{u}_i^{(2)} \geq \psi_i$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_i^{(2)} &\geq \bar{u}_i^{(2)} \Big[a_i - b_i \bar{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \psi_i(t-\tau,x) d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau) \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x) d\tau - d_i \underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \Big] \\ &= \bar{u}_i^{(2)} \Big[a_i - b_i \bar{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty (f_i^+ - f_i)(\tau) \psi_i(t-\tau,x) d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau) \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x) d\tau - d_i \underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \Big] \\ &= \bar{u}_i^{(2)} \Big[a_i - b_i \bar{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^+(\tau) \psi_i(t-\tau,x) d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty f_i(\tau) \psi_i(t-\tau,x) d\tau - \int_0^\infty f_i^+(\tau) \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x) d\tau - d_i \underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \Big] \\ &= \bar{u}_i^{(2)} \Big[a_i - b_i \bar{u}_i^{(2)} - \int_0^\infty f_i(\tau) \psi_i(t-\tau,x) d\tau \\ &\quad + \int_0^\infty f_i^+(\tau) (\psi_i - \underline{u}_i^{(1)})(t-\tau,x) d\tau - d_i \underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \Big], \end{aligned}$$

pero como $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i$, entonces $\psi_i - \underline{u}_i^{(1)} \geq 0$, así para $j \neq i$, $t > t_2$, $x \in \Omega$,

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_i^{(2)} \geq \bar{u}_i^{(2)} \Big[a_i - b_i \bar{u}_i^{(2)} - \int_0^\infty f_i(\tau) \psi_i(t-\tau, x) d\tau - d_i \underline{u}_j^{(1)}(t - r_j, x) \Big].$$

Para la segunda desigualdad hemos visto que $\underline{u}_i^{(1)}$ y $\bar{u}_i^{(1)}$ son soluciones inferior y superior del sistema (2.1), entonces para $i = 1, 2$, $j \neq i$, $t > t_2$, $x \in \Omega$,

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_i^{(1)} \leq \underline{u}_1^{(1)} \Big[a_i - b_i \underline{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i(\tau) \psi(t-\tau, x) d\tau - d_i \bar{u}_j^{(1)}(t - r_j, x) \Big].$$

Si observamos las ecuaciones (2.20) y (2.8) vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} &= \Delta \bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_i^{(2)} \Big[a_i - b_i \bar{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau, x) d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau) \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau, x) d\tau - d_i \underline{u}_j^{(1)}(t - r_j, x) \Big] \\
&\leq \Delta \bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_i^{(2)} \Big[a_1 - b_1 \bar{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau, x) d\tau \Big],
\end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} = \Delta \bar{u}_i^{(1)} + \bar{u}_i^{(1)} \Big[a_1 - b_i \bar{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau, x) d\tau \Big],$$

entonces por un criterio de comparación de las soluciones entre estos dos problemas tenemos que para $t > t_2$

$$\bar{u}_i^{(2)} \leq \bar{u}_i^{(1)}.$$

Lo anterior implica que $-\bar{u}_i^{(1)} \leq -\bar{u}_i^{(2)}$, así para $i = 1, 2$, $j \neq i$, $t > t_2$, $x \in \Omega$

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_i^{(1)} \leq \underline{u}_1^{(1)} \Big[a_i - b_i \underline{u}_i^{(1)} + \int_0^\infty f_i(\tau) \psi(t-\tau, x) d\tau - d_i \bar{u}_j^{(2)}(t - r_j, x) \Big].$$

La tercera desigualdad resulta obvia dado que para $t > t_2$, $x \in \partial\Omega$

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \leq 0 \leq 0 = \frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial \eta}.$$

Por lo tanto $(\underline{u}_1^{(1)}, \underline{u}_2^{(1)})$ *y* $(\bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)})$ *son un par de soluciones inferior y superior del sistema (2.1).*

Entonces por el Lema 2.2

$$\underline{u}_1^{(1)} \leq u_1 \leq \bar{u}_1^{(2)} \qquad \text{y} \qquad \underline{u}_2^{(1)} \leq u_2 \leq \bar{u}_2^{(2)}. \tag{2.21}$$

Por (2.19) tenemos que para $t \geq t_2$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty f_i^+(\tau)\underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau + d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \\
= & \int_0^{t-t_2'} f_i^+(\tau)\underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau + \int_{t-t_2'}^\infty f_i^+(\tau)\underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau + d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \\
\geq & \int_0^{t-t_2'} f_i^+(\tau)(\alpha_i^{(0)}-\varepsilon)d\tau + d_i(\alpha_j^{(0)}-\varepsilon) \\
= & (\alpha_i^{(0)}+\varepsilon)\int_0^{t-t_2'} f_i^+(\tau)d\tau + d_i(\alpha_j^{(0)}-\varepsilon) \\
\geq & (\alpha_i^{(0)}-\varepsilon)(c_i^+-\varepsilon) + d_i(\alpha_j^{(0)}-\varepsilon) \\
= & c_i^+(\alpha_i^{(0)}-\varepsilon) - \varepsilon(\alpha_i^{(0)}-\varepsilon) + d_i(\alpha_j^{(0)}-\varepsilon) \\
\geq & c_i^+(\alpha_i^{(0)}-\varepsilon) + d_i(\alpha_j^{(0)}-\varepsilon) - \varepsilon\alpha_i^{(0)},
\end{aligned}$$

entonces

$$-\int_0^\infty f_i^+(\tau)\underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_1\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \leq -c_i^+(\alpha_i^{(0)}-\varepsilon) - d_i(\alpha_j^{(0)}-\varepsilon) + \varepsilon\alpha_i^{(0)}.$$

Así sustituyendo en (2.20) se tienen las siguientes desigualdades para $i = 1, 2$, $t > t_2$, $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} = & \Delta\bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_i^{(2)}\Big[a_i - b_i\bar{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau)\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\
& - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \Delta\bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_i^{(2)}\Big[a_i - b_i\bar{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau)\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\ &\quad -c_i^+(\alpha_i^{(0)}-\varepsilon) - d_i(\alpha_j^{(0)}-\varepsilon) + \varepsilon\alpha_i^{(0)}\Big]. \end{aligned}$$

Por lo tanto para $t > t_2$, $x \in \Omega$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{u}_1^{(2)}}{\partial t} &\leq \Delta\bar{u}_1^{(2)} + \bar{u}_1^{(2)}\Big[a_1 - b_1\bar{u}_1^{(2)} + \int_0^\infty f_1^-(\tau)\bar{u}_1^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\ &\quad -c_1^+(\alpha_1^{(0)}-\varepsilon) - d_1(\alpha_2^{(0)}-\varepsilon) + \varepsilon\alpha_1^{(0)}\Big], \\ \frac{\partial\bar{u}_2^{(2)}}{\partial t} &\leq \Delta\bar{u}_2^{(2)} + \bar{u}_2^{(2)}\Big[a_2 - b_2\bar{u}_2^{(2)} + \int_0^\infty f_2^+(\tau)\bar{u}_2^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\ &\quad -c_2^+(\alpha_2^{(0)}-\varepsilon) - d_2(\alpha_1^{(0)}-\varepsilon) + \varepsilon\alpha_2^{(0)}\Big]. \end{aligned}$$

Por un principio de comparación, conseguimos que para $t > t_2,\ x \in \Omega$

$$\bar{u}_1^{(2)} \leq w_1^{(1)} \quad \text{y} \quad \bar{u}_2^{(2)} \leq w_2^{(1)} \tag{2.22}$$

donde $w_1^{(1)}$ y $w_2^{(1)}$ son la soluciones de los siguientes problemas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial t} &= \Delta w_1^{(1)} + w_1^{(1)}\Big[a_1 - b_1 w_1^{(1)} + \int_0^\infty f_1^-(\tau)w_1^{(1)}(t-\tau,x)d\tau \\ &\quad -c_1^+(\alpha_1^{(0)}-\varepsilon) - d_1(\alpha_2^{(0)}-\varepsilon) + \varepsilon\alpha_1^{(0)}\Big],\ \ t > t_2,\ \ x \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t > t_2, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$w_1^{(1)}(t,x) = K_1, \quad (t,x) \in (-\infty, t_2] \times \bar{\Omega},$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial t} &= \Delta w_2^{(1)} + w_2^{(1)}\Bigg[a_2 - b_2 w_2^{(1)} + \int_0^\infty f_2^-(\tau) w_2^{(1)}(t-\tau,x)d\tau \\ &\quad -c_2^+(\alpha_2^{(0)}-\varepsilon) - d_2(\alpha_1^{(0)}-\varepsilon) + \varepsilon\alpha_2^{(0)}\Bigg], \;\; t>t_2, \;\; x\in\Omega,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t>t_2, \quad x\in\partial\Omega,$$

$$w_2^{(1)}(t,x) = K_2, \quad (t,x)\in(-\infty,t_2]\times\bar{\Omega}.$$

Queremos aplicar el Lema 2.1 a los dos problemas anteriores, así que se debe cumplir que $b_i>0$, el cual tenemos por hipótesis inicial, y

$$-c_i^+(\alpha_i^{(0)}-\varepsilon) - d_i(\alpha_j^{(0)}-\varepsilon) + \varepsilon\alpha_i^{(0)} > 0.$$

Pero por (2.15) tenemos que

$$a_i - c_i^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon > 0,$$

entonces

$$a_i - c_i^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) > 0.$$

Pero por (2.17) y (2.18) tenemos que $\alpha_i^{(0)} \le \beta_i^{(0)}$ entonces $-\alpha_i^{(0)} \ge -\beta_i^{(0)}$, así

$$a_i - c_i^+\alpha_i^{(0)} - c_i^+\varepsilon - d_i\alpha_j^{(0)} - d_i\varepsilon > 0,$$

además tenemos que

$$c_i^+ \ge -c_i^+ \qquad \text{y} \qquad d_i \ge -d_i,$$

entonces

$$a_i - c_i^+\alpha_i^{(0)} + c_i^+\varepsilon - d_i\alpha_j^{(0)} + d_i\varepsilon > 0.$$

Así

$$a_i - c_i^+\alpha_i^{(0)} + c_i^+\varepsilon - d_i\alpha_j^{(0)} + d_i\varepsilon + \varepsilon\alpha_i^{(0)} > 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} a_1 - c_1^+(\alpha_1^{(0)} - \varepsilon) - d_1(\alpha_2^{(0)} - \varepsilon) + \varepsilon\alpha_1^{(0)} &> 0 \,, \\ a_2 - c_2^+(\alpha_2^{(0)} - \varepsilon) - d_2(\alpha_1^{(0)} - \varepsilon) + \varepsilon\alpha_2^{(0)} &> 0 \,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Por el Lema 2.1, obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} w_i^{(1)}(t,x) = \frac{a_i - c_i^+(\alpha_i^{(0)} - \varepsilon) - d_i(\alpha_j^{(0)} - \varepsilon) + \varepsilon\alpha_i^{(0)}}{b_i - c_i^-}$$

o equivalentemente

$$\lim_{t\to\infty} w_1^{(1)}(t,x) = \frac{a_1 - c_1^+\alpha_1^{(0)} - d_1\alpha_2^{(0)}}{b_1 - c_1^-} + \varepsilon\frac{c_1^+\alpha_1^{(0)} + d_1\alpha_2^{(0)} + \varepsilon\alpha_1^{(0)}}{b_1 - c_1^-},$$

y

$$\lim_{t\to\infty} w_2^{(1)}(t,x) = \frac{a_2 - c_2^+\alpha_2^{(0)} - d_2\alpha_1^{(0)}}{b_2 - c_2^-} + \varepsilon\frac{c_2^+\alpha_2^{(0)} + d_2\alpha_1^{(0)} + \varepsilon\alpha_2^{(0)}}{b_2 - c_2^-}.$$

Entonces de (2.22)

$$0 < \lim_{t\to\infty} \bar{u}_i^{(2)}(t,x) \leq \frac{a_i - c_i^+\alpha_i^{(0)} - d_i\alpha_j^{(0)}}{b_i - c_i^-} + \varepsilon\frac{c_i^+\alpha_i^{(0)} + d_i\alpha_j^{(0)} + \varepsilon\alpha_i^{(0)}}{b_i - c_i^-}.$$

Para ε suficientemente pequeño tenemos que

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} \bar{u}_i^{(2)}(t,x) \leq \frac{a_i - c_i^+\alpha_i^{(0)} - d_i\alpha_j^{(0)}}{b_i - c_i^-}. \tag{2.24}$$

Por lo tanto por (2.21) y ε suficientemente pequeño

$$0 < \alpha_1^{(0)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \beta_1^{(1)} \tag{2.25}$$

y

$$0 < \alpha_2^{(0)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \beta_2^{(1)}, \tag{2.26}$$

donde

$$\beta_1^{(1)} = \frac{a_1 - c_1^+\alpha_1^{(0)} - d_1\alpha_2^{(0)}}{b_1 - c_1^-} \qquad \text{y} \qquad \beta_2^{(1)} = \frac{a_2 - c_2^+\alpha_2^{(0)} - d_2\alpha_1^{(0)}}{b_2 - c_2^-}.$$

Así para $i = 1, 2$

$$0 < \alpha_i^{(0)} \leq \beta_i^{(1)},$$

pero tenemos que

$$\beta_i^{(1)} = \frac{a_i - c_i^+\alpha_i^{(0)} - d_i\alpha_j^{(0)}}{b_i - c_i^-} \leq \frac{a_i}{b_i - c_i^-} = \beta_i^{(0)},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 \,<\, \alpha_1^{(0)} &\leq \beta_1^{(1)} \leq \beta_1^{(0)}, \\ 0 \,<\, \alpha_2^{(0)} &\leq \beta_2^{(1)} \leq \beta_2^{(0)}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Aplicando la definición de limite superior en (2.24) y bajo un procedimiento análogo a (2.12) tenemos que $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, t_3' > t_2$ y $t_3 > t_3'$ tal que

$$\begin{aligned} &\max_{x\in\bar{\Omega}} \bar{u}_i^{(2)}(t,x) < \beta_i^{(1)} + \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_3', \\ &\bar{u}_i^{(1)}(t - r_i, x) < \beta_i^{(1)} + \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_3, \\ &c_i^+ - \int_0^{t-t_3'} f_i^+(s)ds < \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_3. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Definamos $\underline{u}_1^{(2)}(t,x)$, $\underline{u}_2^{(2)}(t,x)$ por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_1^{(2)}}{\partial t} &= \Delta \underline{u}_1^{(2)} + \underline{u}_1^{(2)}\Big[a_1 - b_1\underline{u}_1^{(2)} + \int_0^\infty f_1^-(\tau)\underline{u}_1^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_1^+(\tau)\bar{u}_1^{(2)}(t-\tau,x)d\tau - d_1\bar{u}_2^{(2)}(t-r_2,x)\Big], \ \ t>t_3, \ \ x\in\Omega, \\
\frac{\partial \underline{u}_2^{(2)}}{\partial t} &= \Delta \underline{u}_2^{(2)} + \underline{u}_2^{(2)}\Big[a_2 - b_2\underline{u}_2^{(2)} + \int_0^\infty f_2^-(\tau)\underline{u}_2^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_2^+(\tau)\bar{u}_2^{(2)}(t-\tau,x)d\tau - d_2\bar{u}_1^{(2)}(t-r_1,x)\Big], \ \ t>t_3, \ \ x\in\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_1^{(2)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{u}_2^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \quad t>t_3, \quad x\in\partial\Omega, \tag{2.29}$$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) = \frac{1}{2}u_i(t,x), \quad (t,x)\in(-\infty,t_3]\times\bar{\Omega}.$$

Veamos que $(\underline{u}_1^{(2)},\underline{u}_2^{(2)})$ *y* $(\bar{u}_1^{(2)},\bar{u}_2^{(2)})$ *son un par de soluciones inferior y superior de (2.1).*

Tenemos que demostrar que $\bar{u}_i^{(2)} \geq \underline{u}_i^{(2)}$ en $\mathbb{R}\times\bar{\Omega}$ $(i=1,2)$ y que para todo $\underline{u}_i^{(2)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(2)}$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - \Delta\bar{u}_i^{(2)} &\geq \bar{u}_i^{(2)}\Big[a_i - b_i\bar{u}_i^{(2)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i\underline{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big], \\
&\qquad\qquad j\neq i, \ \ t>t_3, \ \ x\in\Omega, \\
\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial t} - \Delta\underline{u}_i^{(2)} &\leq \underline{u}_i^{(2)}\Big[a_i - b_i\underline{u}_i^{(2)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big], \\
&\qquad\qquad j\neq i, \ \ t>t_3, \ \ x\in\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial \eta} \quad t>t_3, \quad x\in\partial\Omega,$$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x) \quad t\leq t_3, \quad x\in\bar{\Omega}. \quad (i=1,2).$$

Para $t\leq t_3$ tenemos que

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) = \frac{1}{2}u_i(t,x) \leq u_i(t,x)\ .$$

Pero hemos demostrado que $(\underline{u}_1^{(1)}, \underline{u}_1^{(1)})$ y $(\bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)})$ son soluciones inferior y superior del sistema (2.1) así que $u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x)$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Entonces para $t \leq t_3$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x),$$

que resulta ser la última desigualdad que queremos demostrar.

También tenemos que $\underline{u}_i^{(1)} \leq \bar{u}_i^{(2)}$ entonces $-\bar{u}_i^{(2)} \leq -\underline{u}_i^{(1)}$. Así si observamos las ecuaciones (2.29) y (2.20) vemos que para $t > t_3$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial t} &= \Delta \underline{u}_i^{(2)} + \underline{u}_i^{(2)} \Big[a_i - b_i \underline{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \underline{u}_i^{(2)}(t-\tau,x) d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau) \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x) d\tau - d_i \bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x) \Big] \\
&\leq \Delta \underline{u}_i^{(2)} + \underline{u}_i^{(2)} \Big[a_i - b_i \underline{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \underline{u}_i^{(2)}(t-\tau,x) d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau) \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x) d\tau - d_i \underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \Big]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} &= \Delta \bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_1^{(2)} \Big[a_i - b_i \bar{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau) \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x) d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau) \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x) d\tau - d_i \underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \Big]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \quad t > t_3, \quad x \in \partial\Omega.$$

Así por un criterio de comparación de las soluciones entre estos dos problemas se tiene para $t > t_3$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x).$$

Por lo tanto de los dos casos tenemos que para $(t,x) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x).$$

Ahora supongamos que $\underline{u}_i^{(2)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(2)}$ y demostremos las tres desigualdades restantes.

Nuevamente como $(\underline{u}_1^{(1)}, \underline{u}_1^{(1)})$ y $(\bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)})$ son un par de soluciones inferior y superior del sistema (2.1) tenemos que

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_i^{(2)} \geq \bar{u}_i^{(2)}\left[a_i - b_i \bar{u}_i^{(2)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i \underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\right],$$

pero $-\bar{u}_i^{(2)} \leq -\underline{u}_i^{(1)}$, por lo tanto para $i \neq j$, $t > t_3,\ x \in \Omega$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - \Delta \bar{u}_i^{(2)} \geq \bar{u}_i^{(2)}\left[a_i - b_i \bar{u}_i^{(2)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i \underline{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\right].$$

Para la segunda desigualdad tenemos que por (2.29)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_i^{(2)} &= \underline{u}_i^{(2)}\Bigg[a_i - b_i \underline{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau)\underline{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau - d_i \bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Bigg].\end{aligned}$$

Pero como $\underline{u}_i^{(2)} \leq \psi_i$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial t} - \Delta \underline{u}_i^{(2)} &\leq \underline{u}_i^{(2)}\Bigg[a_i - b_i \underline{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty f_i^-(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau - d_i \bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Bigg] \\ &= \underline{u}_i^{(2)}\Bigg[a_i - b_i \underline{u}_i^{(2)} + \int_0^\infty (f_i^+ - f_i)(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau \\ &\quad - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau - d_i \bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Bigg]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{u}_i^{(2)}\Big[a_i - b_i\underline{u}_1^{(2)} + \int_0^\infty f_i^+(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - \int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big] \\
&= \underline{u}_i^{(2)}\Big[a_i - b_i\underline{u}_i^{(2)} - \int_0^\infty f_i^+(\tau)(\bar{u}_i^{(2)}-\psi_i)(t-\tau,x)d\tau \\
&\quad - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big].
\end{aligned}
$$

Pero como $\bar{u}_i^{(2)} \geq \psi_i$ entonces $(\bar{u}_i^{(2)} - \psi_i) \geq 0$, así para $i \neq j,\ t > t_3,\ x \in \Omega$

$$
\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial t} - \Delta\underline{u}_i^{(2)} \leq \underline{u}_i^{(2)}\Big[a_i - b_i\underline{u}_i^{(2)} - \int_0^\infty f_i(\tau)\psi_i(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big].
$$

La tercera desigualdad resulta obvia dado que para $t > t_3,\ x \in \partial\Omega$

$$
\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \leq 0 \leq 0 = \frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial \eta}.
$$

Por lo tanto $(\underline{u}_1^{(2)}\underline{u}_2^{(2)})$ *y* $(\bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)})$ *son un par de soluciones inferior y superior de (2.1).*

Entonces aplicando el Lema 2.2 tenemos que

$$
\underline{u}_1^{(2)} \leq u_1 \leq \bar{u}_1^{(2)} \qquad \text{y} \qquad \underline{u}_2^{(2)} \leq u_2 \leq \bar{u}_2^{(2)}. \tag{2.30}
$$

Hemos demostrado que $\bar{u}_i^{(2)} \leq \bar{u}_i^{(1)}$ para $t > t_2$ y $\bar{u}_i^{(1)} \leq K_i$ para todo $\mathbb{R}$, además tenemos que $\bar{u}_i^{(2)} = K_i$ para $t \leq t_2$, así tenemos que para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $\bar{u}_i^{(2)} \leq K_i$.

Considerando el hecho anterior y por (2.28) tenemos que para $t \geq t_3$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau + d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x) \\
= &\int_0^{t-t_3'} f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau + \int_{t-t_3'}^\infty f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\tau + d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_0^{t-t_3'} f_i^+(\tau)(\beta_i^{(1)}+\varepsilon)d\tau + \int_{t-t_3'}^{\infty} K_i f_i^+(\tau)d\tau + d_i(\beta_j^{(1)}+\varepsilon)\\
&\leq (\beta_i^{(1)}+\varepsilon)\int_0^{t-t_3'} f_i^+(\tau)d\tau + K_i\int_{t-t_3'}^{\infty} f_i^+(\tau)d\tau + d_i(\beta_j^{(1)}+\varepsilon)\\
&\leq (\beta_i^{(1)}+\varepsilon)\int_0^{\infty} f_i^+(\tau)d\tau + K_i\bigg(\int_0^{\infty} f_i^+(\tau) - \int_0^{t-t_3'} f_i^+(\tau)d\tau\bigg) + d_i(\beta_j^{(1)}+\varepsilon)\\
&\leq (\beta_i^{(1)}+\varepsilon)\int_0^{\infty} f_i^+(\tau)d\tau + K_i\bigg(c_i^+ - \int_0^{t-t_3'} f_i^+(\tau)d\tau\bigg) + d_i(\beta_j^{(1)}+\varepsilon)\\
&\leq c_i^+(\beta_i^{(1)}+\varepsilon) + d_i(\beta_j^{(1)}+\varepsilon) + K_i\varepsilon,
\end{aligned}
$$

entonces para $t \geq t_3$

$$
-\int_0^{\infty} f_i^+(\tau)\bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\tau - d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x) \geq -c_i^+(\beta_i^{(1)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(1)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon \ .
$$

Por lo tanto sustituyendo en (2.29) se obtiene, para $t > t_3$, $x \in \Omega$ las siguientes desigualdades

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_1^{(2)}}{\partial t} &\geq \Delta\underline{u}_1^{(2)} + \underline{u}_1^{(2)}\bigg[a_1 - b_1\underline{u}_1^{(2)} + \int_0^{\infty} f_1^-(\tau)\underline{u}_1^{(2)}(t-\tau,x)d\tau\\
&\quad -c_1^+(\beta_1^{(1)}+\varepsilon) - d_1(\beta_2^{(1)}+\varepsilon) - K_1\varepsilon\bigg],\\
\frac{\partial \underline{u}_2^{(2)}}{\partial t} &\geq \Delta\underline{u}_2^{(2)} + \underline{u}_2^{(2)}\bigg[a_2 - b_2\underline{u}_2^{(2)} + \int_0^{\infty} f_2^-(\tau)\underline{u}_2^{(1)}(t-\tau,x)d\tau\\
&\quad -c_2^+(\beta_2^{(1)}+\varepsilon) - d_2(\beta_1^{(1)}+\varepsilon) - K_2\varepsilon\bigg].
\end{aligned}
$$

Por un principio de comparación, conseguimos para $t > t_3, \ \ x \in \Omega$

$$
\underline{u}_1^{(2)} \geq v_1^{(2)} \quad \text{y} \quad \underline{u}_2^{(2)} \geq v_2^{(2)}, \tag{2.31}
$$

donde $v_1^{(2)}$ y $v_2^{(2)}$ son la soluciones de los siguientes problemas, respectivamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial t} &= \Delta v_1^{(2)} + v_1^{(2)}\Bigg[a_1 - b_1 v_1^{(2)} + \int_0^\infty f_1^-(\tau) v_1^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\ &\quad -c_1^+(\beta_1^{(1)}+\varepsilon) - d_1(\beta_2^{(1)}+\varepsilon) - K_1\varepsilon\Bigg] \quad t>t_3, \quad x\in\Omega,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \quad t>t_3, \quad x\in\partial\Omega,$$

$$v_1^{(2)}(t,x) = \frac{1}{2}u_1(t,x), \quad (t,x)\in(-\infty,t_3]\times\bar{\Omega},$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial t} &= \Delta v_2^{(2)} + v_2^{(2)}\Bigg[a_2 - b_2 v_2^{(2)} + \int_0^\infty f_2^-(\tau) v_2^{(2)}(t-\tau,x)d\tau \\ &\quad -c_2^+(\beta_2^{(1)}+\varepsilon) - d_2(\beta_1^{(1)}+\varepsilon) - K_2\varepsilon\Bigg] \quad t>t_3, \quad x\in\Omega,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \quad t>t_3, \quad x\in\partial\Omega,$$

$$v_2^{(2)}(t,x) = \frac{1}{2}u_2(t,x), \quad (t,x)\in(-\infty,t_3]\times\bar{\Omega}.$$

Queremos aplicar el Lema 2.1 a los dos problemas anteriores, así que veamos si se cumplen las hipótesis necesarias.

Tenemos que

$$b_i > \int_0^\infty |f_i(\tau)|d\tau \geq \int_0^\infty |-f_i^-(\tau)|d\tau,$$

además se tiene que $v_i^{(2)}(t_1,x) = \frac{1}{2}u_2(t_1,x)$, el cual no es la función cero. Por último necesitamos que $0<b_i$, el cual tenemos por hipótesis inicial, y

$$0 < a_i - c_i^+(\beta_i^{(1)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(1)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon.$$

Pero de (2.27) tenemos que

$$\beta_i^{(1)} \leq \beta_i^{(0)} \quad \Longrightarrow \quad -\beta_i^{(1)} \geq -\beta_i^{(0)},$$

además por (2.15)

$$a_i - c_i^+(\beta_i^{(0)} + \varepsilon) - d_i(\beta_2^{(0)} + \varepsilon) - K_i\varepsilon > 0.$$

Por lo tanto para ε suficientemente pequeño tenemos

$$\begin{aligned} a_1 - c_1^+(\beta_1^{(1)} + \varepsilon) - d_1(\beta_2^{(1)} + \varepsilon) - K_1\varepsilon &> 0 \\ a_2 - c_2^+(\beta_2^{(1)} + \varepsilon) - d_2(\beta_1^{(1)} + \varepsilon) - K_2\varepsilon &> 0 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Por el Lema 2.1, obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} v_1^{(2)}(t,x) = \frac{a_i - c_i^+(\beta_i^{(1)} + \varepsilon) - d_i(\beta_j^{(1)} + \varepsilon) - K_i\varepsilon}{b_i - c_i^-},$$

o equivalentemente

$$\lim_{t\to\infty} v_1^{(2)}(t,x) = \frac{a_1 - c_1^+\beta_1^{(1)} - d_1\beta_2^{(1)}}{b_1 - c_1^-} - \varepsilon\frac{c_1^+\beta_1^{(1)} + d_1\beta_2^{(1)} + K_1}{b_1 - c_1^-}$$

y

$$\lim_{t\to\infty} v_2^{(2)}(t,x) = \frac{a_2 - c_2^+\beta_2^{(1)} - d_2\beta_1^{(1)}}{b_2 - c_2^-} - \varepsilon\frac{c_2^+\beta_2^{(1)} + d_2\beta_1^{(1)} + K_2}{b_2 - c_2^-}.$$

Entonces por (2.31)

$$\lim_{t\to\infty} \underline{u}_i^{(2)}(t,x) \geq \frac{a_i - c_i^+\beta_i^{(1)} - d_i\beta_j^{(1)}}{b_i - c_i^-} - \varepsilon\frac{c_i^+\beta_i^{(1)} + d_i\beta_2^{(1)} + K_i}{b_i - c_i^-}.$$

Para ε suficientemente pequeño tenemos que

$$0 < \frac{a_i - c_i^+ \beta_i^{(1)} - d_i \beta_j^{(1)}}{b_i - c_i^-} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar\Omega} \underline{u}_i^{(2)}(t,x). \tag{2.33}$$

Por lo tanto por (2.30) y ε suficientemente pequeño

$$0 < \alpha_1^{(1)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar\Omega} u_1(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar\Omega} u_1(t,x) \leq \beta_1^{(1)}\ , \tag{2.34}$$

y

$$0 < \alpha_2^{(1)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar\Omega} u_2(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar\Omega} u_2(t,x) \leq \beta_2^{(1)}\ , \tag{2.35}$$

donde

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{a_1 - c_1^+ \beta_1^{(1)} - d_1 \beta_2^{(1)}}{b_1 - c_1^-} \quad \text{y} \quad \alpha_2^{(1)} = \frac{a_2 - c_2^+ \beta_2^{(1)} - d_2 \beta_1^{(1)}}{b_2 - c_2^-}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 \ &< \ \alpha_1^{(0)} \leq \alpha_1^{(1)} \leq \beta_1^{(1)} \leq \beta_1^{(0)}, \\ 0 \ &< \ \alpha_2^{(0)} \leq \alpha_2^{(1)} \leq \beta_2^{(1)} \leq \beta_2^{(0)}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Definamos las sucesiones $\alpha_1^{(k)}, \beta_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \beta_2^{(k)}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(k)} &= \frac{a_1 - c_1^+ \beta_1^{(k)} - d_1 \beta_2^{(k)}}{b_1 - c_1^-} \ \ , \ \alpha_2^{(k)} = \frac{a_2 - c_2^+ \beta_2^{(k)} - d_2 \beta_1^{(k)}}{b_2 - c_2^-}, \\ \beta_1^{(k+1)} &= \frac{a_1 - c_1^+ \alpha_1^{(k)} - d_1 \alpha_2^{(k)}}{b_1 - c_1^-} \ \ , \ \beta_2^{(k+1)} = \frac{a_2 - c_2^+ \alpha_2^{(k)} - d_2 \alpha_1^{(k)}}{b_2 - c_2^-}, \\ \beta_1^{(0)} &= \frac{a_1}{b_1 - c_1^-} \ \ , \ \beta_2^{(0)} = \frac{a_2}{b_2 - c_2^-}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Lema 2.3

Para las sucesiones definidas anteriormente, tenemos

$$[\alpha_1^{(k+1)}, \beta_1^{(k+1)}] \subseteq [\alpha_1^{(k)}, \beta_1^{(k)}], \quad [\alpha_2^{(k+1)}, \beta_2^{(k+1)}] \subseteq [\alpha_2^{(k)}, \beta_2^{(k)}], \quad k \geq 0. \tag{2.38}$$

Demostración:

Usaremos inducción para la prueba de este Lema.

Para $k = 0$ ha sido mostrado que

$$[\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(1)}] \subseteq [\alpha_1^{(0)}, \beta_1^{(0)}] \qquad \text{y} \qquad [\alpha_2^{(1)}, \beta_2^{(1)}] \subseteq [\alpha_2^{(0)}, \beta_2^{(0)}].$$

Supongamos que $[\alpha_1^{(k)}, \beta_1^{(k)}] \subseteq [\alpha_1^{(k-1)}, \beta_1^{(k-1)}]$.

Entonces $\alpha_1^{(k-1)} \leq \alpha_1^{(k)}$, lo que implica que $-\alpha_1^{(k)} \leq -\alpha_1^{(k-1)}$. Así

$$\beta_i^{(k+1)} = \frac{a_i - c_i^+ \alpha_i^{(k)} - d_i \alpha_j^{(k)}}{b_i - c_i^-} \leq \frac{a_i - c_i^+ \alpha_i^{(k-1)} - d_i \alpha_j^{(k-1)}}{b_i - c_i^-} = \beta_i^{(k)},$$

entonces $\beta_i^{(k+1)} \leq \beta_i^{(k)}$, lo que implica que $-\beta_i^{(k)} \leq -\beta_i^{(k+1)}$. Así

$$\alpha_i^{(k+1)} = \frac{a_i - c_i^+ \beta_i^{(k+1)} - d_i \beta_j^{(k+1)}}{b_1 - c_i^-} \geq \frac{a_i - c_i^+ \beta_i^{(k)} - d_i \beta_j^{(k)}}{b_1 - c_i^-} = \alpha_i^{(k)}.$$

Por lo tanto para $k \geq 0$

$$[\alpha_1^{(k+1)}, \beta_1^{(k+1)}] \subseteq [\alpha_1^{(k)}, \beta_1^{(k)}] \qquad \text{y} \qquad [\alpha_2^{(k+1)}, \beta_2^{(k+1)}] \subseteq [\alpha_2^{(k)}, \beta_2^{(k)}].$$

▲

Por el Lema 2.3 las sucesiones $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$ son crecientes y las sucesiones $\beta_1^{(k)}$, $\beta_1^{(k)}$ son decrecientes y todas son acotadas, implicando que

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_1^{(k)}, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_2^{(k)}, \quad \lim_{k\to\infty} \beta_1^{(k)}, \quad \lim_{k\to\infty} \beta_2^{(k)}$$

existan, denotemos estos limites como α_1, β_1, α_2 y β_2 respectivamente. Tomando límites en las sucesiones anteriores obtenemos el sistema de cuatro incógnitas y cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned}
\alpha_1(b_1 - c_1^-) &= a_1 - c_1^+\beta_1 - d_1\beta_2,\\
\alpha_2(b_2 - c_2^-) &= a_2 - c_2^+\beta_2 - d_2\beta_1,\\
\beta_1(b_1 - c_1^-) &= a_1 - c_1^+\alpha_1 - d_1\alpha_2,\\
\beta_2(b_2 - c_2^-) &= a_2 - c_2^+\alpha_2 - d_2\alpha_1,
\end{aligned}$$

resolviéndolo este sistema obtenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = \beta_1 &= \frac{a_1(b_2 + c_2^+ - c_2^-) - a_2 d_1}{(b_1 + c_1^+ - c_1^-)(b_2 + c_2^+ - c_2^-) - d_1 d_2},\\
\alpha_2 = \beta_2 &= \frac{a_2(b_1 + c_1^+ - c_1^-) - a_1 d_2}{(b_1 + c_1^+ - c_1^-)(b_2 + c_2^+ - c_2^-) - d_1 d_2}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Lema 2.4

Para las soluciones del sistema (2.1) tenemos

$$\alpha_1^{(k)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar\Omega} u_1(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar\Omega} u_1(t,x) \leq \beta_1^{(k)}, \quad k \geq 0. \tag{2.40}$$

y

$$\alpha_2^{(k)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar\Omega} u_2(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar\Omega} u_2(t,x) \leq \beta_2^{(k)}, \quad k \geq 0. \tag{2.41}$$

Demostración:

Hemos demostrado que (2.40) y (2.41) son válidos para $k = 0, 1$. Usando inducción y repitiendo el proceso anterior, acompletamos la prueba.

▲

Demostración del Teorema 2.1:

Combinando los resultados del Lema 2.3 y 2.4 acompletamos la prueba del Teorema 2.1.

■

Capítulo 3

Sistema con Coeficientes Variables.

3.1. El Sistema

Ahora estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones del siguiente sistema de reacción-difusión con tiempos de retardo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= A\Delta u_1(t,x) + u_1(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)u_1(t,x) \\
&\quad -c_1(t,x)\int_0^\infty u_1(t-\tau,x)d\mu_1(\tau) - d_1 u_2(t-r_2,x)\Big], \qquad t>0,\ \ x\in\Omega, \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= A\Delta u_2(t,x) + u_2(t,x)\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)u_2(t,x) \\
&\quad -c_2(t,x)\int_0^\infty u_2(t-\tau,x)d\mu_2(\tau) - d_2 u_1(t-r_1,x)\Big], \qquad t>0,\ \ x\in\Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0 \qquad t>0, \quad x\in\partial\Omega, \tag{3.1}
$$

$$
u_i(t,x) = \phi_i(t,x), \qquad (i=1,2) \quad t\le 0, \quad x\in\bar{\Omega},
$$

donde

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) es un dominio acotado con frontera suave $\partial\Omega$.
- $\dfrac{\partial}{\partial\eta}$ denota la derivada normal exterior sobre $\partial\Omega$.

- $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el operador Laplaciano.
- $A \geq 0$, $d_i > 0$, $r_i > 0$ y además a_i, b_i, c_i, A_i, B_i, C_i, $(i = 1, 2)$ son constantes positivas tales que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & < & a_i & \leq & a_i(t,x) & \leq & A_i \\ 0 & < & b_i & \leq & b_i(t,x) & \leq & B_i \\ 0 & \leq & c_i & \leq & c_i(t,x) & \leq & C_i \end{array}$$

- $u_1(t, x)$ y $u_2(t, x)$ son las funciones de densidad de dos especies en competencia con recursos limitados compartidos.
- $\phi_i \in C^1((-\infty, 0]) \times \bar{\Omega}$ es acotada no negativa y $\phi_i(0, \cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$ es distinta de la función cero.
- μ_1 y μ_2 son funciones de variación acotada con $\mu_i(0) = 0$ para $i = 1, 2$.

3.2. Conocimientos Previos

A continuación citaremos algunas propiedades de las funciones de variación acotada que serán de mucha utilidad más adelante.

Dado que $\mu_i(t)$ son funciones de variación acotada, denotemos $M_i(t)$ la variación total de $\mu_i(t)$ en $[0, t]$ para $i = 1, 2$ y

$$M_i^{\pm}(t) = \frac{M_i(t) \pm \mu_i(t)}{2} \quad \text{para todo } t > 0,$$

entonces $M_i(t)$ y $M_i^{\pm}(t)$ son funciones no negativas y no decrecientes sobre $\mathbb{R}^+$.

Además es fácil ver que

$$M_i^+(t) + M_i^-(t) = M_i(t) \qquad \text{y} \qquad M_i^+(t) - M_i^-(t) = \mu_i(t).$$

Denotemos para $i = 1, 2$

$$M_{0i} = \lim_{t\to\infty} M_i(t), \qquad M_{0i}^{\pm} = \lim_{t\to\infty} M_i^{\pm}(t) \qquad \text{y} \qquad \mu_{0i} = \lim_{t\to\infty} \mu_i(t),$$

entonces

$$M_{0i}^+ + M_{0i}^- = M_{0i} \qquad \text{y} \qquad M_{0i}^+ - M_{0i}^- = \mu_{0i}.$$

Proposición 1

Si f es continua en $[a, b]$ y α es de variación acotada en $[a, b]$, entonces $f \in R(\alpha)$ (Riemann-Stieltjes Integrable) en $[a, b]$.

Proposición 2 *(Propiedades de linearidad para las integrales de Riemann-Stieltjes).*

Sean f y g funciones Riemann-Stieltjes integrables, γ, δ de variación acotada en $[a, b]$ y c_1, c_2 son constantes, entonces

$$\int_a^b [c_1 f(t) + c_2 g(t)] d\gamma(t) = c_1 \int_a^b f(t) d\gamma(t) + c_2 \int_a^b g(t) d\gamma(t),$$

y

$$\int_a^b f(t) d[c_1\gamma(t) + c_2\delta(t)] = c_1 \int_a^b f(t) d\gamma(t) + c_2 \int_a^b f(t) d\delta(t).$$

Proposición 3

Supongamos que α es no decreciente en $[a, b]$. Si $f \in R(\alpha)$, $g \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y si $f(x) \leq g(x)$ para todo x de $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) \leq \int_a^b g(x) d\alpha(x).$$

Proposición 4

Si $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$ y existe α' y es continua en $[a,b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

Proposición 5

Sea α de variación acotada en $[a,b]$ y supongamos que $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$. Definamos la función F como

$$F(x) = \int_a^x f(t)d\alpha(t),$$

entonces

- F es una función de variación acotada en $[a,b]$.
- Si α es no decreciente, la derivada $F'(x)$ existe en cada punto $x \in (a,b)$ en que $\alpha'(x)$ existe y f es continua, entonces para tales x se tiene

$$F'(x) = f(x)\alpha'(x).$$

En nuestro caso las funciones de variación acotada a las que aplicaremos las propiedades anteriores son $M_i(t)$ y $M_i^{\pm}(t)$.

3.3. Resultados Importantes

El siguiente resultado fue desarrollado en [1] e el año 2001.

Consideremos el siguiente problema de reacción-difusión de Volterra con retardo continuo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\Delta u(t,x)+u(t,x)\left[a(t,x)-b(t,x)u(t,x)-c(t,x)\int_0^\infty u(t-\tau,x)d\mu(\tau)\right], \ \ t>0, \ x\in\Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \qquad t>0, \quad x\in\partial\Omega,$$

$$u(t,x) = \phi(t,x), \qquad t\leq 0, \quad x\in\bar{\Omega},$$

donde

- $\Omega,\ \ \partial\Omega,\ \ \dfrac{\partial}{\partial\eta},\ \ \Delta$, son definidos de la misma forma que en el sistema (3.1).
- $A \geq 0$, y $a_1, b_1, c_1, A_1, B_1, C_1$ son constantes positivas tales que

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & < & a_1 & \leq & a(t,x) & \leq & A_1 \\ 0 & < & b_1 & \leq & b(t,x) & \leq & B_1 \\ 0 & \leq & c_1 & \leq & c(t,x) & \leq & C_1 \end{array}$$

- $\phi \in C^1((-\infty,0]) \times \bar{\Omega}$ es acotada no negativa y $\phi(0,\cdot) \in C^1(\bar{\Omega})$ es distinta de la función cero.
- μ es una función de variación acotada.

Definamos $M^{\pm}$ y $M_0^{\pm}$ de manera análoga como definimos $M_i^{\pm}$ y $M_{0i}^{\pm}$ respectivamente.

Lema 3.1

Si asumimos que

$$b_1 > c_1 M_0^- \quad \text{y} \quad a_1 - \frac{C_1 M_0^+ A_1}{b_1 - c_1 M_0^-} > 0,$$

entonces

$$\alpha \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u(t,x) \leq \beta,$$

donde

$$\alpha = \frac{(b_1 - c_1 M_0^-)a_1 - C_1 M_0^+ A_1}{(b_1 - c_1 M_0^-)(B_1 - c_1 M_0^-) - C_1^2 (M_0^+)^2},$$

y

$$\beta = \frac{(B_1 - c_1 M_0^-)A_1 - C_1 M_0^+ a_1}{(b_1 - c_1 M_0^-)(B_1 - c_1 M_0^-) - C_1^2 (M_0^+)^2}.$$

Observemos que si $M^+(t) = 0$ entonces $\mu(t) = -M^-(t)$. Por lo tanto nuestra ecuación se transforma en

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\Delta u(t,x)+u(t,x)\left[a(t,x)-b(t,x)u_1(t,x)+c(t,x)\int_0^\infty u_1(t-\tau,x)dM^-(\tau)\right],\ \ t>0,\ x\in\Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \qquad t>0, \quad x\in\partial\Omega$$

$$u(t,x) = \phi(t,x), \qquad t\le 0, \quad x\in\bar\Omega$$

y del Lema 3.1 obtenemos:

Lema 3.2

Si asumimos que $b_1 > c_1 M_0^-$ *y* $a_1 > 0$, *entonces para el problema anterior*

$$0<\alpha\le \liminf_{t\to\infty}\min_{x\in\bar\Omega} u(t,x) \le \limsup_{t\to\infty}\max_{x\in\bar\Omega} u(t,x)\le\beta,$$

donde

$$\alpha = \frac{a_1}{B_1 - c_1 M_0^-} \quad y \quad \beta = \frac{A_1}{b_1 - c_1 M_0^-}.$$

De [1] tenemos el siguiente Lema para la ecuación anterior.

Lema 3.3

Si $u(t,x)$ *es la solución de la ecuación anterior entonces*

$$0 < u(t,x)\,.$$

Por otro lado, definamos lo que es un par de soluciones superior e inferior de nuestro sistema (3.1) y así obtener otro resultado crucial del cual se basará este capítulo.

Definición.

Un par de funciones suaves $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ y $\widehat{u} = (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ son llamadas soluciones superior e inferior de (3.1), si $\widetilde{u}_i \geq \widehat{u}_i$ $(i = 1, 2)$ en $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ y si para todo $\widehat{u}_i \leq \psi_i \leq \widetilde{u}_i$ se cumple las siguientes desigualdades

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} - A\Delta \widetilde{u}_i \quad &\geq \quad \widetilde{u}_i(t,x)\bigg[a_i(t,x) - b_i(t,x)\widetilde{u}_i(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\qquad -d_i\widehat{u}_j(t-r_j,x)\bigg], \;\; j \neq i, \;\; t > 0, \;\; x \in \Omega, \\
\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} - A\Delta \widehat{u}_i \quad &\leq \quad \widehat{u}_i(t,x)\bigg[a_i(t,x) - b_i(t,x)\widehat{u}_i(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\qquad -d_i\widetilde{u}_j(t-r_j,x)\bigg], \;\; j \neq i, \;\; t > 0, \;\; x \in \Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial \eta} \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.2}
$$

$$
\widehat{u}_i(t,x) \leq \phi_i(t,x) \leq \widetilde{u}_i(t,x) \quad t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (i = 1, 2).
$$

Lema 3.4

Si existe un par de soluciones superior e inferior $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ y $\widehat{u} = (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ de (3.1) entonces el problema (3.1) tiene una única solución $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ y además $\widehat{u}_i \leq u_i^* \leq \widetilde{u}_i$ para $i = 1, 2$.

Demostración:

Para poder demostrar este lema necesitaremos un caso particular del Teorema 2.2 desarrollado en [3], para esto citemos dicho resultado con su sistema y respectivas definiciones.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} - A\Delta u_1(t,x) &= u_1\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)u_1 - c_1(t,x)J * u_1 - g_1(t,x)\Big] \quad t>0,\ x\in\Omega,\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} - A\Delta u_2(t,x) &= u_2\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)u_2 - c_2(t,x)J * u_2 - g_2(t,x)\Big] \quad t>0,\ x\in\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0 \qquad t>0,\quad x\in\partial\Omega,$$

$$u_i(t,x) = \phi_i(t,x), \qquad (i=1,2) \quad t\le 0,\quad x\in\bar{\Omega},$$

donde $g_1, g_2 \in C^1((-\infty,0]) \times \bar{\Omega}$,

$$J * u_1 = \int_0^\infty u_1(t-\tau,x)d\mu_1(\tau) \qquad \text{y} \qquad J * u_2 = \int_0^\infty u_2(t-\tau,x)d\mu_2(\tau).$$

Las funciones $f_i(t,x,u,J*u) = u_i\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)u_i - c_i(t,x)J*u_i - g_i(t,x)\Big]$ que trabajaremos son *cuasimonótonas* dado que si fijamos u_i, la función f_i es constante con respecto a u_j para $j\neq i$. Entonces tenemos la siguiente definición de límite superior e inferior.

Definición.

Un par de funciones suaves $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ y $\widehat{u} = (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ son llamadas soluciones superior e inferior de (3.1), si $\widetilde{u}_i \ge \widehat{u}_i$ $(i=1,2)$ en $\mathbb{R}\times\bar{\Omega}$ y si

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} - A\Delta\widetilde{u}_i &\ge \widetilde{u}_i\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\widetilde{u}_i - c_i(t,x)J*\widetilde{u}_i - g_i(t,x)\Big], \quad t>0,\ x\in\Omega,\\
\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} - A\Delta\widehat{u}_i &\le \widehat{u}_i\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\widehat{u}_i - c_i(t,x)J*\widehat{u}_i - g_i(t,x)\Big], \quad t>0,\ x\in\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial \eta} \le 0 \le \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial \eta} \quad t>0,\quad x\in\partial\Omega,$$

$$\widehat{u}_i(t,x) \le \phi_i(t,x) \le \widetilde{u}_i(t,x) \quad t\le 0,\quad x\in\bar{\Omega},\quad (i=1,2).$$

Teorema de Comparación-Existencia.

Sean $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ y $\widehat{u} = (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ una pareja de soluciones superiores e inferiores del sistema anterior y $f_i(t, x, v, w)$ satisface la condición de Lipschiz para $i = 1, 2$, entonces el sistema tiene una única solución u^* y $\widehat{u}_i \leq u_i^* \leq \widetilde{u}_i$.

Decimos que la función $f_i(t, x, v, w)$ satisface la condición de Lipschitz si para $i = 1, 2$

$$|f_i(t, x, v, w) - f_i(t, x, v', w')| \leq K_i(|v - v'| + |w - w'|) \qquad (v, v', w, w' \in \langle \widehat{u}, \widetilde{u} \rangle)$$

para una constante $K_i > 0$, $\langle \widehat{u}, \widetilde{u} \rangle = \{$funciones suaves $(u_1, u_2)\ :\ \widehat{u}_i \leq u_i \leq \widetilde{u}_i$ para $i = 1, 2\}$ y $|v| = |v_1| + |v_2|$.

Ahora estamos listos para demostrar el Lema 3.4. Llamemos $\tau = \text{mín}\{\tau_1, \tau_2\}$. Así en $(0, \tau] \times \Omega$, el sistema (3.1) es eqivalente al sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= A\Delta u_1(t, x) + u_1(t, x)\Big[a_1(t, x) - b_1(t, x)u_1(t, x) \\
&\quad -c_1(t, x)\int_0^\infty u_1(t - \tau, x)d\mu_1(\tau) - d_1\phi_2(t - r_2, x)\Big], \qquad (0, \tau] \times \Omega, \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= A\Delta u_2(t, x) + u_2(t, x)\Big[a_2(t, x) - b_2(t, x)u_2(t, x) \\
&\quad -c_2(t, x)\int_0^\infty u_2(t - \tau, x)d\mu_2(\tau) - d_2\phi_1(t - r_1, x)\Big], \qquad (0, \tau] \times \Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0 \qquad (0, \tau] \times \partial\Omega,$$

$$u_i(t, x) = \phi_i(t, x), \qquad (i = 1, 2) \quad t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega},$$

o equivalentemente para $(0, \tau] \times \Omega$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} - A\Delta u_1 &= u_1\Big[a_1(t, x) - b_1(t, x)u_1 - c_1(t, x)J * u_1 - d_1\phi_2(t - r_2, x)\Big], \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} - A\Delta u_2 &= u_2\Big[a_2(t, x) - b_2(t, x)u_2 - c_2(t, x)J * u_2 - d_2\phi_1(t - r_1, x)\Big].
\end{aligned}$$

Pero tenemos que $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ y $(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ son soluciones superior e inferior de (3.1) segun la definición (3.2), es decir $\widetilde{u}_i \geq \widehat{u}_i$ $(i = 1, 2)$ en $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ y para para todo $\widehat{u}_i \leq \psi_i \leq \widetilde{u}_i$ se cumple las siguientes desigualdades

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} - A\Delta \widetilde{u}_i &\geq \widetilde{u}_i(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\widetilde{u}_i(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\qquad -d_i\widehat{u}_j(t-r_j,x)\Big], \;\; j \neq i, \;\; t > 0, \;\; x \in \Omega, \\
\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} - A\Delta \widehat{u}_i &\leq \widehat{u}_i(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\widehat{u}_i(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\qquad -d_i\widetilde{u}_j(t-r_j,x)\Big], \;\; j \neq i, \;\; t > 0, \;\; x \in \Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial \eta} \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega,
$$

$$
\widehat{u}_i(t,x) \leq \phi_i(t,x) \leq \widetilde{u}_i(t,x) \quad t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (i = 1, 2).
$$

Como $\widehat{u}_i \leq \psi_i \leq \widetilde{u}_i$, entonces $-\widetilde{u}_i \leq -\psi_i \leq -\widehat{u}_i$ lo que implica que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} - A\Delta \widetilde{u}_i &\geq \widetilde{u}_i\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\widetilde{u}_i - c_i(t,x)\int_0^\infty \widetilde{u}_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) - d_i\widehat{u}_j(t-r_j,x)\Big], \\
\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} - A\Delta \widehat{u}_i &\leq \widehat{u}_i\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\widehat{u}_i - c_i(t,x)\int_0^\infty \widehat{u}_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) - d_i\widetilde{u}_j(t-r_j,x)\Big],
\end{aligned}
$$

además como $\widehat{u}_i(t,x) \leq \phi_i(t,x) \leq \widetilde{u}_i(t,x)$ para $[-\infty, 0] \times \bar{\Omega}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} - A\Delta \widetilde{u}_i &\geq \widetilde{u}_i(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\widetilde{u}_i(t,x) - c_i(t,x)J * \widetilde{u}_i - d_i\phi_j(t-r_j,x)\Big], \\
&\qquad (0,\tau] \times \Omega, \\
\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} - A\Delta \widehat{u}_i &\leq \widehat{u}_i(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\widehat{u}_i(t,x) - c_i(t,x)J * \widehat{u} - d_i\phi_j(t-r_j,x)\Big], \\
&\qquad (0,\tau] \times \Omega,
\end{aligned}
$$

por lo tanto $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ y $(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)$ son un par de soluciones superior e inferior segun la definición anterior.

Verifiquemos que f_i satisface la condición de Lipschitz.

$$\begin{aligned}|f_i(t,x,v,w)-f_i(t,x,v',w')| &= \Big|v_i\Big[a_i(t,x)-b_i(t,x)v_i-c_i(t,x)w_i-d_i\phi_j(t-\tau,x)\Big]\\ &\quad -v_i'\Big[a_i(t,x)-b_i(t,x)v_i'-c_i(t,x)w_i'-d_i\phi_j(t-\tau,x)\Big]\Big|\end{aligned}$$
$$\leq A_i|v_i-v_i'|+B_i|v_i^2-(v_i')^2|\;+\;C_i|v_iw_i-v_i'w_i'|+d_i||\phi_j||\,|v_i-v_i'|$$
$$\leq (\;A_i+d_i||\phi_j||\;)|v_i-v_i'|+B_i\,|\,v_i-v_i'||v_i+v_i'|+\frac{C_i}{2}|(v_i-v_i')(v_i+v_i')+(w_i-w_i')(w_i+w_i')|,$$

como $v,v',w,w'\in\langle\widehat{u},\widetilde{u}\rangle$, y dado que mis soluciones supeior e inferior son acotadas, entonces

$$|v_i+v_i'|\leq k_1,\qquad |w_i+w_i'|\leq k_2,$$

entonces

$$|f_i(t,x,v,w)-f_i(t,x,v',w')|\leq\Big(A_i+d_i||\phi_j||+B_ik_1+\frac{C_ik_1}{2}\Big)|v_i-v_i'|+k_2|w_i-w_i'|,$$

así existe una $K>0$ tal que

$$\begin{aligned}|f_i(t,x,v,w)-f_i(t,x,v',w')| &\leq K(|v_i-v_i'|+|w_i-w_i'|)\\ &\leq K(|v_i-v_i'|+|v_j-v_j'|+|w_i-w_i'|+|w_j-w_j'|),\end{aligned}$$

por lo tanto f_i satisface a condición de lipschitz.

Entonces por el Teorema de Comparación-Existencia existe una solución (u_1^*,u_2^*) para el sistema (3.1) tal que $\widehat{u}_1\leq u_1^*\leq\widetilde{u}_1$ y $\widehat{u}_2\leq u_2^*\leq\widetilde{u}_2$ para $(0,\tau]\times\Omega$.

Repitiendo el proceso anterior para los dominios $(\tau,2\tau]\times\Omega,\ldots,((m-1)\tau,m\tau)\times\Omega,\ldots$ y de una clara inducción se concluye que existe una única solución (u_1^*,u_2^*) para (3.1) tal que $\widehat{u}_1\leq u_1^*\leq\widetilde{u}_1$ y $\widehat{u}_2\leq u_2^*\leq\widetilde{u}_2$.

▲

3.4. Nuestro Resultado

El principal resultado que desarrollaremos en esta tesis esta dado por el siguiente teorema.

Teorema 3.1

Asumamos que $b_i > c_i M_{0i}^-$, $a_i - \dfrac{C_i M_{0i}^+ A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-} > 0$ *y*

$$\frac{d_2 A_2 (b_2 - c_2 M_{02}^-)}{(b_1 - c_1 M_{01}^-)[a_2(b_2 - c_2 M_{02}^-) - C_2 M_{02}^+ A_2]} < \frac{A_2}{A_1} < \frac{(b_2 - c_2 M_{02}^-)[a_1(b_1 - c_1 M_{01}^-) - C_1 M_{01}^+ A_1]}{d_1 A_1 (b_1 - c_1 M_{01}^-)}$$

entonces para cualquier $\phi_i \in C^1((-\infty, 0]) \times \bar{\Omega}$ *con* $\phi(0, \cdot)$ *distinto a la función cero, la solución del sistema (3.1) satisface*

$$0 < \alpha_1 \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \beta_1,$$

$$0 < \alpha_2 \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \beta_2,$$

donde α_1, α_2, β_1 *y* β_2 *son constantes que se determinan por el siguiente sistema lineal*

$$\alpha_1 = \frac{a_1 - C_1 M_{01}^+ \beta_1 - d_1 \beta_2}{B_1 - c_1 M_{01}^-}, \qquad \alpha_2 = \frac{a_2 - C_2 M_{02}^+ \beta_2 - d_2 \beta_1}{B_2 - c_2 M_{02}^-},$$

$$\beta_1 = \frac{A_1 - c_1 M_{01}^+ \alpha_1 - d_1 \alpha_2}{b_1 - c_1 M_{01}^-}, \qquad \beta_2 = \frac{A_2 - c_2 M_{02}^+ \alpha_2 - d_2 \alpha_1}{b_2 - c_2 M_{02}^-}.$$

3.5. Demostración de los Principales Resultados

El método de prueba es via sucesivas soluciones superiores e inferiores de sistemas adecuados. Como el procedimiento que emplearemos es similar al del capítulo 2, en la tabla 1 se puede encontrar un diagrama que explica el procedimiento que emplearemos.

Sea $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ las condiciones iniciales para el sistema (3.1) y sean K_1, K_2 constantes tales que

$$\begin{aligned} K_1 &\geq \text{máx}\left\{||\phi_1||, \frac{A_1}{b_1 - c_1 M_{01}^-}\right\}, \\ K_2 &\geq \text{máx}\left\{||\phi_2||, \frac{A_2}{b_2 - c_2 M_{02}^-}\right\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde

$$||\phi_i|| = \text{sup}\,\{|\phi_i(t,x)| : (t,x) \in (-\infty, 0] \times \bar{\Omega}\}, \quad i = 1, 2.$$

Veamos que $(0,0)$ *y* (K_1, K_2) *son un par de soluciones inferior y superior del sistema (3.1).*

Tenemos que demostrar que $K_i \geq 0$ ($i = 1,2$) en $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ y que para todo $0 \leq \psi_i \leq K_i$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_i}{\partial t} - A\Delta K_i &\geq K_i\left[a_i(t,x) - b_i(t,x)K_i(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) - d_i \cdot 0\right], \\ &\qquad t > 0, \ \ x \in \Omega, \\ \frac{\partial 0}{\partial t} - A\Delta 0 &\leq 0\left[a_i(t,x) - b_i(t,x)\cdot 0 - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) - d_i K_j\right], \\ &\qquad j \neq i, \ \ t > 0, \ \ x \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial 0}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial K_i}{\partial \eta} \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$0 \leq \phi_i(t,x) \leq K_i \quad t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (i = 1, 2).$$

Así por hipótesis inicial $b_i > c_i M_{0i}^-$ y $A_i > 0$ entonces

$$\frac{A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-} > 0,$$

además tenemos que

$$K_i \geq \frac{A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-},$$

por lo tanto $K > 0$ para todo $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ e $i = 1, 2$.

Ahora supongamos que $0 \leq \psi_i \leq K_i$ y veamos que se cumplen las últimas cuatro desigualdades.

Dado que $K_i \geq \psi_i$, entonces $-K_i \leq -\psi_i$ así tenemos que

$$\begin{aligned} -K_i c_i M_{0i}^- = -K_i c_i \left(\int_0^\infty dM_i^- \right) &= c_i \int_0^\infty -K_i dM_i^- \\ &\leq c_i \int_0^\infty -\psi_i(t-\tau, x) dM_i^- \\ &= c_i \int_0^\infty \psi_i(t-\tau, x) d(-M_i^-) \\ &= c_i \int_0^\infty \psi_i(t-\tau, x) d(\mu_i - M_i^+) \\ &= c_i \int_0^\infty \psi_i(t-\tau, x) d\mu_i - c_i \int_0^\infty \psi_i(t-\tau, x) dM_i^+ \\ &\leq c_i \int_0^\infty \psi_i(t-\tau, x) d\mu_i \end{aligned}$$

Entonces

$$-K_i c_i M_{0i}^- \leq c_i \int_0^\infty \psi_i(t-\tau, x) d\mu_i \leq c_i(t,x) \int_0^\infty \psi_i(t-\tau, x) d\mu_i.$$

Pero hemos visto que

$$\frac{A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-} \leq K_i,$$

lo que implica que

$$A_i \leq K_i b_i - K_i c_i M_{0i}^- \ ,$$

y dado que $a_i(t,x) \leq A_i$ y $b_i \leq b_i(t,x)$, entonces

$$a_i(t,x) \leq K_i b_i(t,x) - K_i c_i M_{0i}^- \ .$$

Añadiendo el resultado anterior obtenemos

$$a_i(t,x) \leq K_i b_i(t,x) + c_i(t,x) \int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x) d\mu_i \ ,$$

entonces

$$0 \geq a_i(t,x) - K_i b_i(t,x) - c_i(t,x) \int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x) d\mu_i \ ,$$

además como $K_i \geq 0$, lo anterior implica

$$0 \geq K_i \left[a_i(t,x) - K_i b_i(t,x) - c_i(t,x) \int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x) d\mu_i \right],$$

el cual es equivalente a mi primera desigualdad.

La segunda y tercera desigualdad se reducen a $0 \leq 0$ y $0 \leq 0 \leq 0$ respectivamente, lo cual claramente es cierto.

Por hipótesis inicial tenemos que $0 \leq \phi_i(t,x)$ para $t \leq 0$, $x \in \bar{\Omega}$ y además por la definición de K_i, para $i = 1,2,\ t \leq 0$ y $x \in \bar{\Omega}$ se tiene que

$$\phi_i(t,x) \leq ||\phi_i|| \leq K_i,$$

entonces se cumple la última desigualdad.

Por lo tanto $(0,0)$ *y* (K_1, K_2) *son un par de soluciones inferior y superior del sistema (3.1).*

Entonces por el Lema 3.4, tenemos una única solución no negativa global (u_1, u_2) tal que

$$0 \leq u_1(t,x) \leq K_1 \quad \text{y} \quad 0 \leq u_2(t,x) \leq K_2\ . \tag{3.4}$$

Definamos $\bar{u}_1^{(1)}(x,t)$, $\bar{u}_2^{(1)}(x,t)$ mediante el siguiente sistema no acoplado:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_1^{(1)}}{\partial t} &= A\Delta \bar{u}_1^{(1)} + \bar{u}_1^{(1)}(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)\bar{u}_1^{(1)}(t,x) + c_1(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)dM_1^-(\tau)\Big] \\
&\qquad t>0,\ \ x\in\Omega, \\
\frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial t} &= A\Delta \bar{u}_2^{(1)} + \bar{u}_2^{(1)}(t,x)\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)\bar{u}_2^{(1)}(t,x) + c_2(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_2^{(1)}(t-\tau,x)dM_2^-(\tau)\Big] \\
&\qquad t>0,\ \ x\in\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_1^{(1)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{u}_2^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t>0, \quad x\in\partial\Omega \tag{3.5}$$

$$\bar{u}_i^{(1)}(t,x) = K_i, \qquad t\leq 0, \quad x\in\bar{\Omega} \quad (i=1,2).$$

Veamos que $(0,0)$ y $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$ son un par de soluciones inferior y superior del sistema (3.1).

Tenemos que demostrar que $\bar{u}_i^{(1)} \geq 0$ en $\mathbb{R}\times\bar{\Omega}$ $(i=1,2)$ y que para todo $0\leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(1)}$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta \bar{u}_i^{(1)} &\geq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\quad -d_i\cdot 0\Big], \quad t>0,\ \ x\in\Omega, \\
\frac{\partial 0}{\partial t} - A\Delta 0 &\leq 0\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\cdot 0 - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\quad -d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big], \ \ j\neq i,\ \ t>0,\ \ x\in\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial 0}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} \quad t>0, \quad x\in\partial\Omega,$$

$$0\leq \phi_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x) \quad t\leq 0, \quad x\in\bar{\Omega} \quad (i=1,2).$$

Tenemos que para $t \leq 0,\ x \in \bar{\Omega}$

$$0 \leq K_i = \bar{u}_i^{(1)}(t,x),$$

además aplicando el Lema 3.3 a cada ecuación de (3.5) tenemos que para $t > 0$

$$0 < \bar{u}_i^{(1)}(t,x).$$

Por lo tanto para $i = 1, 2$ y $(t,x) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$

$$0 \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x).$$

Ahora supongamos que $0 \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(1)}$ y veamos que se cumplen las últimas cuatro desigualdades.

Como $\bar{u}_i^{(1)} \geq \psi_i$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta \bar{u}_i^{(1)} &= \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau)\Big] \\
&\geq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) \\
&\quad + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^-(\tau)\Big] \\
&= \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) \\
&\quad + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d(M_i^+ - \mu_i)(\tau)\Big] \\
&= \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) \\
&\quad + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau)\Big] \\
&\geq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau)\Big],
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta \bar{u}_i^{(1)} \geq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\left[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau)\right].$$

La segunda y tercera desigualdad se reducen a $0 \leq 0$ y $0 \leq 0 \leq 0$ respectivamente, lo cual claramente es cierto.

La última desigualdad es cierta para $t \leq 0$, $x \in \bar{\Omega}$ porque

$$0 \leq \phi_i(t,x) \leq ||\phi_i|| \leq K_i = \bar{u}_i^{(1)}(t,x)$$

Por lo tanto $(0,0)$ *y* $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$ *son un par de soluciones inferior y superior del sistema (3.1).*

Entonces aplicando el Lema 3.4 tenemos que para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \bar{\Omega}$

$$0 \leq u_1(t,x) \leq \bar{u}_1^{(1)}(t,x) \quad \text{y} \quad 0 \leq u_2(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\ . \tag{3.6}$$

Pero inicialmente supusimos que $b_i > c_i M_{0i}^-$ y $a_i > 0$ que son justamente las hipótesis necesarias para aplicar el Lema 3.2 en (3.5), entonces

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} \bar{u}_i^{(1)}(t,x) \leq \beta_i^{(0)} \tag{3.7}$$

donde

$$\beta_i^{(0)} = \frac{A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-} \qquad i = 1,2.$$

Así de (3.6) y (3.7) obtenemos que

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_i(t,x) \leq \beta_i^{(0)}. \tag{3.8}$$

Veamos que $(0,0)$ *y* (K_1, K_2) *no sólo son un par de soluciones inferior y superior del sistema (3.1), si no también del sistema (3.5).*

Tenemos que demostrar que $K_i \geq 0$ $(i = 1,2)$ en $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ y que para todo $0 \leq \psi_i \leq K_i$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_i}{\partial t} - A\Delta K_i &\geq K_i\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)K_i(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) - d_i \cdot 0\Big], \\
&\qquad\qquad t>0, \;\; x \in \Omega, \\
\frac{\partial 0}{\partial t} - A\Delta 0 &\leq 0\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\cdot 0 - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) - d_i K_j\Big], \\
&\qquad\qquad j \neq i, \;\; t>0, \;\; x \in \Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial 0}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial K_i}{\partial \eta} \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$0 \leq \phi_i(t,x) \leq K_i \quad t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (i = 1,2).$$

Notemos que la primera desigualdad la hemos demostrado, así supongamos que $0 \leq \psi_i \leq K_i$ y veamos que se cumple la cuatro últimas desigualdades.

Dado que $\psi_i \leq K_i$ entonces $-K_i \leq -\psi_i$, así tenemos que

$$\begin{aligned}
-K_i c_i M_{0i}^- = -K_i c_i \bigg(\int_0^\infty dM_i^-(\tau)\bigg) &= c_i \int_0^\infty -K_i dM_i^-(\tau) \\
&\leq -c_i \int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\
&\leq c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^-(\tau),
\end{aligned}$$

entonces

$$-K_i c_i M_{0i}^- \leq c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^-(\tau).$$

Pero tenemos que

$$\frac{A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-} \leq K_i \ ,$$

lo que implica

$$a_i(t,x) \leq A_i \leq K_i b_i - K_i c_i M_{0i}^-,$$

entonces, añadiendo lo anterior

$$\begin{aligned} a_i(t,x) &\leq K_i b_i + K_i c_i(t,x) \int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x) dM_i^-(\tau) \\ &\leq K_i b_i(t,x) + K_i c_i(t,x) \int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x) dM_i^-(\tau) \end{aligned}$$

entonces

$$0 \geq a_i(t,x) - K_i b_i(t,x) - K_i c_i(t,x) \int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x) dM_i^-(\tau)$$

además como $0 \leq K_i$, tenemos que

$$0 \geq K_i \left[a_i(t,x) - K_i b_i(t,x) - \int_0^\infty f_i^-(\tau) \psi_i(t-\tau,x) d\tau \right],$$

el cual es equivalente a mi primera desigualdad.

La segunda y tercera desigualdad se reducen a $0 \leq 0$ y $0 \leq 0 \leq 0$ respectivamente, lo cual claramente es cierto.

La última desigualdad se cumple trivialmente dado que $\phi_i(t,x) = K_i$ para $t \leq 0$ y $x \in \bar{\Omega}$.

Por lo tanto $(0,0)$ *y* (K_1, K_2) *son un par de soluciones inferior y superior de (2.8).*

Entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \bar{\Omega}$ se cumple que

$$0 \leq \bar{u}_1^{(1)}(t,x) \leq K_1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leq \bar{u}_2^{(1)}(t,x) \leq K_2.$$

De la definición de límite superior en (3.7) tenemos que para $i = 1, 2$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, t_1' > 0 \text{ tal que } \quad \max_{x\in\bar\Omega} \bar u_i^{(1)}(t,x) < \beta_i^{(0)} + \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_1'$$

Por otro lado para $i = 1, 2$ tenemos que $M_{0i}^+ = \lim_{t\to\infty} M_i^+(t)$ entonces

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, t_1'' > 0 \quad \text{tal que} \quad M_{0i}^+ - M_i^+(t) = |M_{0i}^+ - M_i^+(t)| < \frac{\varepsilon}{C_i} \quad \text{para } \ t \geq t_1''$$

Tomemos $t_1 = t_1' + t_1'' + \max\{r_1, r_2\}$. Así para $i = 1, 2$ y $t \geq t_1$ tenemos que

$$t - r_i \geq t_1 - r_i = (t_1' + t_1'' + \max\{r_1, r_2\}) - r_i \geq t_1' \ ,$$

entonces para $i = 1, 2$ y $t \geq t_1$

$$\bar u_i^{(1)}(t - r_i, x) < \beta_i^{(0)} + \varepsilon \ .$$

También para $t \geq t_1$ tenemos que

$$t - t_1' \geq t_1 - t_1' = (t_1' + t_1'' + \max\{r_1, r_2\}) - t_1' \geq t_1'' \ ,$$

entonces para $t \geq t_1$

$$C_i(M_{0i}^+ - M_i^+(t - t_i')) < \varepsilon \ .$$

Por lo tanto para $i = 1, 2$ y $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, t_1' > 0$ y $t_1 > t_1'$ tal que

$$\begin{aligned}
&\max_{x\in\bar\Omega} \bar u_i^{(1)}(t,x) < \beta_i^{(0)} + \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_1' \ , \\
&\bar u_i^{(1)}(t - r_i, x) < \beta_i^{(0)} + \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_1 \ , \qquad (3.9) \\
&C_i(M_{0i}^+ - M_i^+(t - t_1')) < \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_1 \ .
\end{aligned}$$

Definamos $\underline{u}_1^{(1)}(t,x)$, $\underline{u}_2^{(1)}(t,x)$ por el sistema no acoplado

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{u}_1^{(1)}}{\partial t} &= A\Delta \underline{u}_1^{(1)} + \underline{u}_1^{(1)}(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)\underline{u}_1^{(1)}(t,x) + c_1(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)dM_1^-(\tau)\\ &\quad -c_1(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)dM_1^+(\tau) - d_1\bar{u}_2^{(1)}(t-r_2,x)\Big],\ \ t>t_1,\ \ x\in\Omega,\\ \frac{\partial \underline{u}_2^{(1)}}{\partial t} &= A\Delta \underline{u}_2^{(1)} + \underline{u}_2^{(1)}(t,x)\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)\underline{u}_2^{(1)}(t,x) + c_2(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_2^{(1)}(t-\tau,x)dM_2^-(\tau)\\ &\quad -c_2(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_2^{(1)}(t-\tau,x)dM_2^+(\tau) - d_2\bar{u}_1^{(1)}(t-r_1,x)\Big],\ \ t>t_1,\ \ x\in\Omega,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_1^{(1)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{u}_2^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t>t_1, \quad x\in\partial\Omega, \tag{3.10}$$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) = \frac{1}{2}u_i(t,x), \quad (t,x)\in(-\infty,t_1]\times\bar{\Omega}.$$

Veamos que $(\underline{u}_1^{(1)}, \underline{u}_2^{(1)})$ *y* $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$ *son un par de soluciones inferior y superior del sistema (3.1).*

Tenemos que demostrar que $\bar{u}_i^{(1)} \geq \underline{u}_i^{(1)}$ en $\mathbb{R}\times\bar{\Omega}$ $(i=1,2)$ y que para todo $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(1)}$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta\bar{u}_i^{(1)} &\geq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau)\\ &\quad -d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big], \quad j\neq i,\ \ t>t_1,\ \ x\in\Omega,\\ \frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta\underline{u}_i^{(1)} &\leq \underline{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(1)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau)\\ &\quad -d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big], \quad j\neq i,\ \ t>t_1,\ \ x\in\Omega,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} \quad t>t_1, \quad x\in\partial\Omega,$$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x) \quad t\leq t_1, \quad x\in\bar{\Omega} \quad (i=1,2).$$

Tenemos que para $t \leq t_1$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) = \frac{1}{2}u_i(t,x) \leq u_i(t,x).$$

Pero hemos demostrado en (3.6) que $u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)$, entonces para $t \leq t_1$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x),$$

que resulta ser la última desigualdad que queremos demostrar.

Por otro lado si observamos las ecuaciones (3.5) y (3.10) tenemos que para $t > t_1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_1^{(1)}}{\partial t} &= A\Delta \underline{u}_1^{(1)} + \underline{u}_1^{(1)}(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)\underline{u}_1^{(1)}(t,x) + c_1(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)dM_1^-(\tau) \\
&\quad -c_1(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)dM_1^+(\tau) - d_1\bar{u}_2^{(1)}(t-r_2,x)\Big] \\
&\leq A\Delta \underline{u}_i^{(1)} + \underline{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(1)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau)\Big]
\end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} = A\Delta \bar{u}_i^{(1)} + \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau)\Big].$$

Así por un criterio de comparación de las soluciones entre estos dos problemas, tenemos que para $t > t_1$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x).$$

Por lo tanto en cualquiera de los casos tenemos que para $(t,x) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x).$$

Ahora supongamos que $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(1)}$ y demostremos las tres desigualdades restantes.

Como $(0,0)$ y $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$ son soluciones superior e inferior de (3.1) entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta \bar{u}_i^{(1)} &\geq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau)\Big] \\
&\geq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\quad -d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto para $i \neq j$, $t > t_1$, $x \in \Omega$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta \bar{u}_i^{(1)} &\geq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\quad -d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big].
\end{aligned}
$$

Para la segunda desigualdad tenemos que de (3.10)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta \underline{u}_i^{(1)} &= \underline{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(1)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big]
\end{aligned}
$$

Pero como $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta \underline{u}_i^{(1)} &\leq \underline{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(1)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big] \\
&= \underline{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(1)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d(M_i^+ - \mu_i)(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big] \\
&= \underline{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_1^{(1)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) - c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) \\
&\quad -d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &= \underline{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(1)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty (\bar{u}_i^{(1)} - \psi_i)(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) \\ &\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big]. \end{aligned}$$

Como $\psi_i \leq \bar{u}_i^{(1)}$, entonces $(\bar{u}_i^{(1)} - \psi_i) \geq 0$, así para $i \neq j$, $t > t_1$, $x \in \Omega$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta \underline{u}_i^{(1)} &\leq \underline{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(1)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\ &\quad -d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big]. \end{aligned}$$

La tercera desigualdad resulta obvia dado que para $t > t_1$, $x \in \partial\Omega$

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \leq 0 \leq 0 = \frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial \eta}.$$

Por lo tanto $(\underline{u}_1^{(1)}, \underline{u}_2^{(1)})$ *y* $(\bar{u}_1^{(1)}, \bar{u}_2^{(1)})$ *son un par de soluciones inferior y superior de (3.1).*

Entonces aplicando el Lema 3.4 tenemos que

$$\underline{u}_1^{(1)}(t,x) \leq u_1(t,x) \leq \bar{u}_1^{(1)}(t,x) \qquad \text{y} \qquad \underline{u}_2^{(1)}(t,x) \leq u_2(t,x) \leq \bar{u}_2^{(1)}(t,x) \tag{3.11}$$

Tomando en cuenta el hecho de que $\bar{u}_i^{(1)}(t,x) \leq K_i$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y por (3.9) tenemos que para $t \geq t_1$

$$\begin{aligned} &c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) + d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \\ = \;& c_i(t,x)\int_0^{t-t_1'} \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) + c_i(t,x)\int_{t-t_1'}^\infty \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) + d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \\ \leq \;& c_i(t,x)\int_0^{t-t_1'} (\beta_i^{(0)} + \varepsilon)dM_i^+(\tau) + c_i(t,x)\int_{t-t_1'}^\infty K_i dM_i^+(\tau) + d_i(\beta_j^{(0)} + \varepsilon) \\ \leq \;& C_i(M_i^+(t-t_1) - M(0))(\beta_i^{(0)} + \varepsilon) + K_iC_i(M_0 i^+ - M_i^+(t-t_1)) + d_i(\beta_j^{(0)} + \varepsilon) \\ \leq \;& C_iM_{0i}^+(\beta_i^{(0)} + \varepsilon) + d_i(\beta_j^{(0)} + \varepsilon) + K_i\varepsilon, \end{aligned}$$

entonces para $t \geq t_1$

$$-c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau)-d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \geq -C_iM_{0i}^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon)-d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon)-K_i\varepsilon.$$

Por lo tanto sustituyendo en (3.10) se obtiene, para $t > t_1$, $x \in \Omega$ las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_1^{(1)}}{\partial t} &\geq A\Delta\underline{u}_1^{(1)} + \underline{u}_1^{(1)}(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)\underline{u}_1^{(1)}(t,x) + c_1(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)dM_1^-(\tau) \\
&\quad -C_1M_{01}^+(\beta_1^{(0)}+\varepsilon) - d_1(\beta_2^{(0)}+\varepsilon) - K_1\varepsilon\Big], \\
\frac{\partial \underline{u}_2^{(1)}}{\partial t} &\geq A\Delta\underline{u}_2^{(1)} + \underline{u}_2^{(1)}(t,x)\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)\underline{u}_2^{(1)}(t,x) + c_2(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_2^{(1)}(t-\tau,x)dM_2^-(\tau) \\
&\quad -C_2M_{02}^+(\beta_2^{(0)}+\varepsilon) - d_2(\beta_1^{(0)}+\varepsilon) - K_2\varepsilon\Big].
\end{aligned}$$

Por un principio de comparación, conseguimos que para $t > t_1,\ x \in \Omega$

$$\underline{u}_1^{(1)}(t,x) \geq v_1^{(1)}(t,x) \qquad \text{y} \qquad \underline{u}_2^{(1)}(t,x) \geq v_2^{(1)}(t,x), \tag{3.12}$$

donde $v_1^{(1)}(t,x)$ y $v_2^{(1)}(t,x)$ son las soluciones de los siguientes problemas, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial t} &= A\Delta v_1^{(1)} + v_1^{(1)}(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)v_1^{(1)}(t,x) + c_1(t,x)\int_0^\infty v_1^{(1)}(t-\tau,x)dM_1^-(\tau) \\
&\quad -C_1M_{01}^+(\beta_1^{(0)}+\varepsilon) - d_1(\beta_2^{(0)}+\varepsilon) - K_1\varepsilon\Big],
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t > t_1, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$v_1^{(1)}(t,x) = \frac{1}{2}u_1(t,x), \quad (t,x) \in (-\infty, t_1] \times \bar{\Omega},$$

y

$$\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial t} = A\Delta v_2^{(1)} + v_2^{(1)}(t,x)\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)v_2^{(1)}(t,x) + c_2(t,x)\int_0^\infty v_2^{(1)}(t-\tau,x)dM_2^-(\tau)$$
$$-C_2M_{02}^+(\beta_2^{(0)}+\varepsilon) - d_2(\beta_1^{(0)}+\varepsilon) - K_2\varepsilon\Big],$$

$$\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t > t_1, \quad x \in \partial\Omega,$$
$$v_2^{(1)}(t,x) = \frac{1}{2}u_2(t,x), \quad (t,x) \in (-\infty, t_1] \times \bar{\Omega}.$$

Queremos aplicar el Lema 3.3 a los dos problemas anteriores, así que debemos cumplir las siguientes hipótesis:

- $b_i > c_iM_{0i}^+$, el cual es una hipótesis inicial de nuestro teorema.
- $(*) > 0$ donde

$$\underbrace{a_i - C_iM_{0i}^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon}_{(*)} \leq a_i(t,x) - C_iM_{0i}^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon.$$

Así veamos que $a_i - C_iM_{0i}^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon > 0$.

Tomemos ε de manera que

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{a_1 - C_1M_{01}^+\beta_1^{(0)} - d_1\beta_2^{(0)}}{C_1M_{01}^+ + d_1 + K_1}, \frac{a_2 - C_2M_{02}^+\beta_2^{(0)} - d_2\beta_1^{(0)}}{C_2M_{02}^+ + d_2 + K_2}\right\},$$

entonces

$$\begin{aligned}
\varepsilon < \frac{a_i - C_iM_{0i}^+\beta_i^{(0)} - d_i\beta_j^{(0)}}{C_iM_{0i}^+ + d_i + K_i} &\iff \varepsilon(C_iM_{0i}^+ + d_i + K_i) < a_i - C_iM_{0i}^+\beta_i^{(0)} - d_i\beta_j^{(0)} \\
&\iff 0 < a_i - C_iM_{0i}^+\beta_i^{(0)} - d_i\beta_j^{(0)} - \varepsilon C_iM_{0i}^+ - \varepsilon d_i - K_i\varepsilon \\
&\iff 0 < a_i - C_iM_{0i}^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon
\end{aligned}$$

Como $C_iM_{0i}^+ + d_i + K_i\varepsilon > 0$, únicamente nos falta garantizar que para $i = 1, 2$, $i \neq j$ se cumple

$$a_i - C_iM_{0i}^+\beta_i^{(0)} - d_i\beta_j^{(0)} > 0,$$

para poder tomar la ε de la forma anterior.

Pero tenemos que para $i = 1, 2$

$$a_i - \frac{C_iM_{0i}^+A_i}{b_i - c_iM_{0i}^-} > 0,$$

entonces

$$a_i(b_i - c_iM_{0i}^-) - C_iM_{0i}^+A_i > 0,$$

además para $i = 1, 2$ tenemos que $b_i > c_iM_{0i}^-$, entonces

$$b_i - c_iM_{0i}^- > 0.$$

Por lo tanto la hipótesis inicial

$$\frac{d_2A_2(b_2 - c_2M_{02}^-)}{(b_1 - c_1M_{01}^-)[a_2(b_2 - c_2M_{02}^-) - C_2M_{02}^+A_2]} < \frac{A_2}{A_1} < \frac{(b_2 - c_2M_{02}^-)[a_1(b_1 - c_1M_{01}^-) - C_1M_{01}^+A_1]}{d_1A_1(b_1 - c_1M_{01}^-)},$$

es equivalente a

$$\frac{A_j}{A_i} < \frac{(b_j - c_jM_{0j}^-)[a_i(b_i - c_iM_{0i}^-) - C_iM_{0i}^+A_i]}{d_iA_i(b_i - c_iM_{0i}^-)} \qquad i = 1, 2, \;\; i \neq j.$$

Además

$$\begin{aligned}
& \frac{A_j}{A_i} < \frac{(b_j - c_jM_{0j}^-)[a_i(b_i - c_iM_{0i}^-) - C_iM_{0i}^+A_i]}{d_iA_i(b_i - c_iM_{0i}^-)} \\
\iff \quad & 0 < \frac{a_i(b_j - c_jM_{0j}^-)(b_i - c_iM_{0i}^-) - C_iM_{0i}^+A_i(b_j - c_jM_{0j}^-)]}{d_iA_i(b_i - c_iM_{0i}^-)} - \frac{A_j}{A_i} \\
\iff \quad & 0 < \frac{a_i(b_j - c_jM_{0j}^-)}{d_iA_i} - \frac{C_iM_{0i}^+(b_j - c_jM_{0j}^-)}{d_i(b_i - c_iM_{0i}^-)} - \frac{A_j}{A_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\iff \quad 0 < \frac{b_j - c_j M_{0j}^-}{d_i A_i}\left[a_i - \frac{C_i M_{0i}^+ A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-} - \frac{d_i A_j}{b_j - c_j M_{0j}^-}\right]\\&\iff \quad 0 < a_i - \frac{C_i M_{0i}^+ A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-} - \frac{d_i A_j}{b_j - c_j M_{0j}^-},\end{aligned}$$

pero tenemos que

$$\beta_i^{(0)} = \frac{A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-},$$

entonces

$$0 < a_i - C_i M_{0i}^+ \beta_i^{(0)} - d_i \beta_j^{(0)} \ .$$

Por lo tanto para ε suficientemente pequeño (menor que mi condición), tenemos

$$\begin{aligned}a_1 - C_1 M_{01}^+(\beta_1^{(0)} + \varepsilon) - d_1(\beta_2^{(0)} + \varepsilon) - K_1\varepsilon &> 0,\\ a_2 - C_2 M_{02}^+(\beta_2^{(0)} + \varepsilon) - d_2(\beta_1^{(0)} + \varepsilon) - K_2\varepsilon &> 0.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Por el Lema 3.2, obtenemos

$$0 < \frac{a_i - C_i M_{0i}^+(\beta_i^{(0)} + \varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)} + \varepsilon) - K_i\varepsilon}{B_i - c_i M_{0i}^-} \leq \lim_{t\to\infty} \inf \min_{x\in\bar{\Omega}} v_i^{(1)}(t,x),$$

o equivalentemente

$$0 < \frac{a_1 - C_1 M_{01}^+ \beta_1^{(0)} - d_1 \beta_2^{(0)}}{B_1 - c_1 M_{01}^-} - \varepsilon \frac{C_1 M_{01}^+ + d_1 + K_1}{B_1 - c_1 M_{01}^-} \leq \lim_{t\to\infty} \inf \min_{x\in\bar{\Omega}} v_1^{(1)}(t,x),$$

y

$$0 < \frac{a_2 - C_2 M_{02}^+ \beta_2^{(0)} - d_2 \beta_1^{(0)}}{B_2 - c_2 M_{02}^-} - \varepsilon \frac{C_2 M_{02}^+ + d_2 + K_2}{B_2 - c_2 M_{02}^-} \leq \lim_{t\to\infty} \inf \min_{x\in\bar{\Omega}} v_2^{(1)}(t,x).$$

Entonces por (3.12)

$$0 < \frac{a_i - C_i M_{0i}^+ \beta_i^{(0)} - d_i \beta_j^{(0)}}{B_i - c_i M_{0i}^-} - \varepsilon \frac{C_i M_{0i}^+ + d_i + K_i}{B_i - c_i M_{0i}^-} \leq \lim_{t\to\infty} \inf \min_{x\in\bar{\Omega}} \underline{u}_i(1)(t,x).$$

Para ε suficientemente pequeño tenemos que

$$0 < \frac{a_i - C_i M_{0i}^{+}\beta_i^{(0)} - d_i\beta_j^{(0)}}{B_i - c_i M_{01}^{-}} \leq \lim_{t\to\infty}\inf \min_{x\in\bar{\Omega}} \underline{u}_i(1)(t,x), \tag{3.14}$$

entonces por (3.11)

$$0 < \frac{a_i - C_i M_{0i}^{+}\beta_i^{(0)} - d_i\beta_j^{(0)}}{B_i - c_i M_{01}^{-}} \leq \lim_{t\to\infty}\inf \min_{x\in\bar{\Omega}} u_i(1)(t,x).$$

Por lo tanto para ε suficientemente pequeño

$$0 < \alpha_1^{(0)} \leq \lim_{t\to\infty}\inf \min_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \lim_{t\to\infty}\sup \max_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \beta_1^{(0)}, \tag{3.15}$$

y

$$0 < \alpha_2^{(0)} \leq \lim_{t\to\infty}\inf \min_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \lim_{t\to\infty}\sup \max_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \beta_2^{(0)}, \tag{3.16}$$

donde

$$\alpha_1^{(0)} = \frac{a_1 - C_1 M_{01}^{+}\beta_1^{(0)} - d_1\beta_2^{(0)}}{B_1 - c_1 M_{01}^{-}},$$

y

$$\alpha_2^{(0)} = \frac{a_2 - C_2 M_{02}^{+}\beta_2^{(0)} - d_2\beta_1^{(0)}}{B_2 - c_2 M_{02}^{-}}.$$

Entonces aplicando la definición de limite inferior en (3.14) y bajo un procedimiento análogo a (3.9) tenemos que para $i = 1,2$ y $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\, t_2' > t_1$ y $t_2 > t_2'$ tal que

$$\begin{aligned}
&\min_{x\in\bar{\Omega}} \underline{u}_i^{(1)}(t,x) > \alpha_i^{(0)} - \varepsilon \quad \text{para } t \geq t_2' \\
&\underline{u}_i^{(1)}(t - r_i, x) > \alpha_i^{(0)} + \varepsilon \quad \text{para } t \geq t_2 \\
&M_{0i}^{+} - \varepsilon < M_i^{+}(t - t_2') \quad \text{para } t \geq t_2
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Definamos $\bar{u}_1^{(2)}$ y $\bar{u}_2^{(2)}$ por

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_1^{(2)}}{\partial t} &= A\Delta\bar{u}_1^{(2)} + \bar{u}_1^{(2)}(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)\bar{u}_1^{(2)}(t,x) + c_1(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_1^{(2)}(t-\tau,x)dM_1^-(\tau) \\
&\quad -c_1(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_1^{(1)}(t-\tau,x)dM_1^+(\tau) - d_1\underline{u}_2^{(1)}(t-r_2,x)\Big], \qquad t>t_2,\ \ x\in\Omega, \\
\frac{\partial \bar{u}_2^{(2)}}{\partial t} &= A\Delta\bar{u}_2^{(2)} + \bar{u}_2^{(2)}(t,x)\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)\bar{u}_2^{(2)}(t,x) + c_2(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_2^{(2)}(t-\tau,x)dM_2^-(\tau) \\
&\quad -c_2(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_2^{(1)}(t-\tau,x)dM_2^+(\tau) - d_2\underline{u}_1^{(1)}(t-r_1,x)\Big], \qquad t>t_2,\ \ x\in\Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \bar{u}_1^{(2)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{u}_2^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \quad t>t_2, \quad x\in\partial\Omega, \tag{3.18}
$$

$$
\bar{u}_i^{(2)}(t,x) = K_i, \quad (t,x)\in(-\infty,t_2]\times\bar{\Omega} \quad (i=1,2).
$$

Veamos que $(\bar{u}_1^{(2)},\bar{u}_2^{(2)})$ *y* $(\underline{u}_1^{(1)},\underline{u}_2^{(1)})$ *son un par de soluciones superior e inferior de (3.1).*

Tenemos que demostrar que $\bar{u}_i^{(2)} \geq \underline{u}_i^{(1)}$ en $\mathbb{R}\times\bar{\Omega}$ $(i=1,2)$ y que para todo $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(2)}$ se cumple las siguientes desigualdades

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - A\Delta\bar{u}_i^{(2)} &\geq \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\quad -d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big], \qquad j\neq i,\ \ t>0,\ \ x\in\Omega \\
\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta\underline{u}_i^{(1)} &\leq \underline{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(1)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\quad -d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big], \qquad j\neq i,\ \ t>0,\ \ x\in\Omega
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial \eta} \quad t>0, \quad x\in\partial\Omega
$$

$$
\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x) \quad t\leq t_2, \quad x\in\bar{\Omega} \quad (i=1,2)
$$

Por (3.4) tenemos que para $t \leq t_2$

$$u_i(t,x) \leq K_i = \bar{u}_i^{(2)}(t,x),$$

además por (3.11) tenemos que

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq u_i(t,x),$$

por lo tanto para $t \leq t_2$ tenemos que

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x),$$

que resulta ser la última desigualdad que queremos demostrar.

Por otro lado de los problemas (3.18) y (3.10) tenemos que para $t > t_2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} &= A\Delta \bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\
&\quad - c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM^+(\tau) - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big] \\
&\geq A\Delta \bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\
&\quad - c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} &= A\Delta \underline{u}_i^{(1)} + \underline{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(1)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\
&\quad - c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big],
\end{aligned}$$

entonces por un criterio de comparación de las soluciones para $t > t_2$ tenemos que

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x).$$

Por lo tanto para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ tenemos que

$$\underline{u}_i^{(1)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x).$$

Ahora supongamos que $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(2)}$ y demostremos las tres desigualdades restantes.

Para la primera desigualdad tenemos que para $i = 1,2$, $j \neq i$, $t > t_2$, $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - A\Delta \bar{u}_i^{(2)} &= \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM^+(\tau) - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big],
\end{aligned}$$

dado que $\psi_i \leq \bar{u}_i^{(2)}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - A\Delta \bar{u}_i^{(2)} &\geq \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big] \\
&= \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d(M_i^+ - \mu_i)(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big] \\
&= \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \psi(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) - c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) \\
&\quad -d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big] \\
&= \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\quad +c_i(t,x)\int_0^\infty (\psi_i - \underline{u}_i^{(1)})(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big],
\end{aligned}$$

pero como $\underline{u}_i^{(1)} \leq \psi_i$, entonces $\psi_i - \underline{u}_i^{(1)} \geq 0$, así para $j \neq i$, $t > t_2$, $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - A\Delta \bar{u}_i^{(2)} &\geq \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^{\infty} \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau)\\ &\quad -d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big].\end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad hemos visto que $\bar{u}_i^{(1)}$ y $\underline{u}_i^{(1)}$ son soluciones superior e inferior del sistema (3.1) entonces para $i = 1, 2$, $j \neq i$, $t > t_2$, $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta \underline{u}_i^{(1)} &\leq \underline{u}_1^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(1)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^{\infty} \psi(t-\tau,x)d\mu_i(\tau)\\ &\quad -d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big].\end{aligned}$$

Si observamos las ecuaciones (3.18) y (3.5) vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} &= A\Delta \bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^{\infty} \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau)\\ &\quad -c_i(t,x)\int_0^{\infty} \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big]\\ &\leq A\Delta \bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^{\infty} \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau)\end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial t} = A\Delta \bar{u}_i^{(1)} + \bar{u}_i^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(1)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^{\infty} \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau)\Big],$$

entonces por un criterio de comparación de las soluciones entre estos dos problemas tenemos que para $t > t_2$

$$\bar{u}_i^{(2)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x).$$

Lo anterior implica que $-\bar{u}_i^{(1)}(t,x) \leq -\bar{u}_i^{(2)}(t,x)$, así para $i=1,2$, $j \neq i$, $t > t_2$, $x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial t} - A\Delta \underline{u}_i^{(1)} &\leq \underline{u}_1^{(1)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(1)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\ & \quad -d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big]. \end{aligned}$$

La tercera desigualdad resulta obvia dado que para $t > t_2$, $x \in \partial\Omega$

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \leq 0 \leq 0 = \frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial \eta}.$$

Por lo tanto $(\underline{u}_1^{(1)}, \underline{u}_2^{(1)})$ *y* $(\bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)})$ *son un par de soluciones inferior y superior del sistema (3.1).*

Entonces por el Lema 3.4

$$\underline{u}_1^{(1)}(t,x) \leq u_1(t,x) \leq \bar{u}_1^{(2)}(t,x) \qquad \text{y} \qquad \underline{u}_2^{(1)}(t,x) \leq u_2(t,x) \leq \bar{u}_2^{(2)}(t,x). \tag{3.19}$$

Por (3.17) tenemos que para $t > t_2$

$$\begin{aligned} & c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) + d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \\ = \; & c_i(t,x)\int_0^{t-t_2'} \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) + c_i(t,x)\int_{t-t_2'}^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) \\ & +d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \\ \geq \; & c_i(t,x)\int_0^{t-t_2'} (\alpha_i^{(0)} - \varepsilon)dM_i^+(\tau) + d_i(\alpha_j^{(0)} - \varepsilon) \\ \geq \; & c_i(M_i^+(t-t_2) - M(0))(\alpha_i^{(0)} + \varepsilon) + d_i(\alpha_j^{(0)} - \varepsilon) \\ \geq \; & c_iM_i^+(t-t_2)(\alpha_i^{(0)} - \varepsilon) + d_i(\alpha_j^{(0)} - \varepsilon) \\ \geq \; & c_i(M_{0i}^+ - \varepsilon)(\alpha_i^{(0)} - \varepsilon) + d_i(\alpha_j^{(0)} - \varepsilon) \\ \geq \; & c_i(M_{0i}^+)(\alpha_i^{(0)} - \varepsilon) + d_i(\alpha_j^{(0)} - \varepsilon) - \varepsilon c_i\alpha_i^{(0)}, \end{aligned}$$

entonces

$$-c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau)-d_1\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\leq -c_iM_{0i}^+(\alpha_i^{(0)}-\varepsilon)-d_i(\alpha_j^{(0)}-\varepsilon)+\varepsilon c_i\alpha_i^{(0)}.$$

Así sustituyendo en (3.18) se tienen las siguientes desigualdades para $t>t_2$, $x\in\Omega$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} &= A\Delta\bar{u}_i^{(2)}+\bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x)-b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x)+c_i(t,x)\int_0^\infty\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau)\\ &\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty\underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau)-d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big]\\ &\leq A\Delta\bar{u}_i^{(2)}+\bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x)-b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x)+c_i(t,x)\int_0^\infty\bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau)\\ &\quad -c_iM_{0i}^+(\alpha_i^{(0)}-\varepsilon)-d_i(\alpha_j^{(0)}-\varepsilon)+\varepsilon c_i\alpha_i^{(0)}\Big].\end{aligned}$$

Por lo tanto para $t>t_2$, $x\in\Omega$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{u}_1^{(2)}}{\partial t} &\leq A\Delta\bar{u}_1^{(2)}+\bar{u}_1^{(2)}(t,x)\Big[a_1(t,x)-b_1(t,x)\bar{u}_1^{(2)}(t,x)+c_1(t,x)\int_0^\infty\bar{u}_1^{(2)}(t-\tau,x)dM_1^-(\tau)\\ &\quad -c_1M_{01}^+(\alpha_1^{(0)}-\varepsilon)-d_1(\alpha_2^{(0)}-\varepsilon)+\varepsilon c_1\alpha_1^{(0)}\Big],\\ \frac{\partial\bar{u}_2^{(2)}}{\partial t} &\leq A\Delta\bar{u}_2^{(2)}+\bar{u}_2^{(2)}(t,x)\Big[a_2(t,x)-b_2(t,x)\bar{u}_2^{(2)}(t,x)+c_2(t,x)\int_0^\infty\bar{u}_2^{(2)}(t-\tau,x)dM_2^-(\tau)\\ &\quad -c_2M_{02}^+(\alpha_2^{(0)}-\varepsilon)-d_2(\alpha_1^{(0)}-\varepsilon)+\varepsilon c_2\alpha_2^{(0)}\Big].\end{aligned}$$

Por un principio de comparación conseguimos que para $t>t_2,\ x\in\Omega$

$$\bar{u}_1^{(2)}(t,x)\leq w_1^{(1)}(t,x)\qquad \text{y}\qquad \bar{u}_2^{(2)}(t,x)\leq w_2^{(1)}(t,x)\tag{3.20}$$

donde $w_1^{(1)}(t,x)$ y $w_2^{(1)}(t,x)$ son la soluciones de los siguientes problemas, respectivamente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial t} &= A\Delta w_1^{(1)} + w_1^{(1)}(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)w_1^{(1)}(t,x) + c_1(t,x)\int_0^{\infty} w_1^{(1)}(t-\tau,x)dM_1^-(\tau) \\
&\quad -c_1 M_{01}^+(\alpha_1^{(0)} - \varepsilon) - d_1(\alpha_2^{(0)} - \varepsilon) + \varepsilon c_1 \alpha_1^{(0)}\Big], \;\; t > t_2, \;\; x \in \Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial w_1^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t > t_2, \quad x \in \partial\Omega,
$$

$$
w_1^{(1)}(t,x) = K_1, \quad (t,x) \in (-\infty, t_2] \times \bar{\Omega},
$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial t} &= A\Delta w_2^{(1)} + w_2^{(1)}(t,x)\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)w_2^{(1)}(t,x) + c_2(t,x)\int_0^{\infty} w_2^{(1)}(t-\tau,x)dM_2^-(\tau) \\
&\quad -c_2 M_{02}^+(\alpha_2^{(0)} - \varepsilon) - d_2(\alpha_1^{(0)} - \varepsilon) + \varepsilon c_2 \alpha_2^{(0)}\Big], \;\; t > t_2, \;\; x \in \Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial w_2^{(1)}}{\partial \eta} = 0 \quad t > t_2, \quad x \in \partial\Omega,
$$

$$
w_2^{(1)}(t,x) = K_2, \quad (t,x) \in (-\infty, t_2] \times \bar{\Omega}.
$$

Queremos aplicar el Lema 3.2 a los dos problemas anteriores, así que debemos cumplir las siguientes hipótesis

- $b_i > c_i M_{0i}^+$, el cual es una hipótesis inicial de nuestro teorema.
- $(**) > 0$, donde

$$
\begin{aligned}
\underbrace{a_i - c_i M_{0i}^+(\alpha_i^{(0)} - \varepsilon) - d_i(\alpha_j^{(0)} - \varepsilon)}_{(**)} &\leq a_i(t,x) - c_i M_{0i}^+(\alpha_i^{(0)} - \varepsilon) - d_i(\alpha_j^{(0)} + \varepsilon) + \varepsilon c_i \alpha_i^{(0)} \\
&\leq A_i - c_i M_{0i}^+(\alpha_i^{(0)} - \varepsilon) - d_i(\alpha_j^{(0)} - \varepsilon) + \varepsilon c_i \alpha_i^{(0)} \;,
\end{aligned}
$$

entonces debemos demostrar que

$$a_i - c_i M_{0i}^{+}(\alpha_i^{(0)} - \varepsilon) - d_i(\alpha_j^{(0)} - \varepsilon) > 0.$$

Por (3.13) tenemos que

$$a_i - C_i M_{0i}^{+}(\beta_i^{(0)} + \varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)} + \varepsilon) - K_i\varepsilon > 0,$$

entonces

$$a_i - C_i M_{0i}^{+}(\beta_i^{(0)} + \varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)} + \varepsilon) > 0.$$

Pero tenemos que $c_i M_{0i}^{+} \leq C_i M_{0i}^{+}$ entonces $-c_i M_{0i}^{+} \geq -C_i M_{0i}^{+}$, lo que implica que

$$a_i - c_i M_{0i}^{+}(\beta_i^{(0)} + \varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)} + \varepsilon) > 0.$$

Pero por (3.15) y (3.16) tenemos que $\alpha_i^{(0)} \leq \beta_i^{(0)}$ entonces $-\alpha_i^{(0)} \geq -\beta_i^{(0)}$, así

$$a_i - c_i M_{0i}^{+}\alpha_i^{(0)} - c_i M_{0i}^{+}\varepsilon - d_i\alpha_j^{(0)} - d_i\varepsilon > 0,$$

además tenemos que

$$c_i \geq -c_i \qquad \text{y} \qquad d_i \geq -d_i,$$

entonces

$$a_i - c_i M_{0i}^{+}\alpha_i^{(0)} + c_i M_{0i}^{+}\varepsilon - d_i\alpha_j^{(0)} + d_i\varepsilon > 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} a_1 - c_1 M_{01}^{+}(\alpha_1^{(0)} - \varepsilon) - d_1(\alpha_2^{(0)} - \varepsilon) &> 0, \\ a_2 - c_2 M_{02}^{+}(\alpha_2^{(0)} - \varepsilon) - d_2(\alpha_1^{(0)} - \varepsilon) &> 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Por el Lema 3.2, obtenemos

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} w_i^{(1)}(t,x) \leq \frac{A_i - c_i M_{0i}^{+}(\alpha_i^{(0)} - \varepsilon) - d_i(\alpha_j^{(0)} - \varepsilon) + \varepsilon c_i \alpha_i^{(0)}}{b_i - c_i M_{0i}^{-}},$$

o equivalentemente

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} w_1^{(1)}(t,x) \leq \frac{A_1 - c_1 M_{01}^{+}\alpha_1^{(0)} - d_1\alpha_2^{(0)}}{b_1 - c_1 M_{01}^{-}} - \varepsilon \frac{c_1 M_{01}^{+} + d_1 - c_1\alpha_1^{(0)}}{b_1 - c_1 M_{01}^{-}},$$

y

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} w_2^{(1)}(t,x) \leq \frac{A_2 - c_2 M_{02}^{+}\alpha_2^{(0)} - d_2\alpha_1^{(0)}}{b_2 - c_2 M_{02}^{-}} - \varepsilon \frac{c_2 M_{02}^{+} + d_2 - c_2\alpha_2^{(0)}}{b_2 - c_2 M_{02}^{-}}.$$

Entonces de (3.20)

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} \bar{u}_i^{(2)}(t,x) \leq \frac{A_i - c_i M_{0i}^{+}\alpha_i^{(0)} - d_i\alpha_j^{(0)}}{b_i - c_i M_{0i}^{-}} - \varepsilon \frac{c_i M_{0i}^{+} + d_i - c_i\alpha_i^{(0)}}{b_i - c_i M_{0i}^{-}}.$$

Para ε suficientemente pequeño tenemos que

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} \bar{u}_i^{(2)}(t,x) \leq \frac{A_i - c_i M_{0i}^{+}\alpha_i^{(0)} - d_i\alpha_j^{(0)}}{b_i - c_i M_{0i}^{-}}, \tag{3.22}$$

entonces por (3.19)

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_i^{(2)}(t,x) \leq \frac{A_i - c_i M_{0i}^{+}\alpha_i^{(0)} - d_i\alpha_j^{(0)}}{b_i - c_i M_{0i}^{-}}.$$

Por lo tanto para ε suficientemente pequeño

$$0 < \alpha_1^{(0)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \beta_1^{(1)} \tag{3.23}$$

y

$$0 < \alpha_2^{(0)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \beta_2^{(1)}, \tag{3.24}$$

donde
$$\beta_1^{(1)} = \frac{A_1 - c_1 M_{01}^+ \alpha_1^{(0)} - d_1 \alpha_2^{(0)}}{b_1 - c_1 M_{01}^-}$$
y
$$\beta_2^{(1)} = \frac{A_2 - c_2 M_{02}^+ \alpha_2^{(0)} - d_2 \alpha_1^{(0)}}{b_2 - c_2 M_{02}^-}.$$
Así para $i = 1, 2$
$$0 < \alpha_i^{(0)} \leq \beta_i^{(1)},$$

pero tenemos que

$$\beta_i^{(1)} = \frac{A_i - c_i M_{0i}^+ \alpha_i^{(0)} - d_i \alpha_j^{(0)}}{b_i - c_i M_{0i}^-} \leq \frac{A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-} = \beta_i^{(0)},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} &0 \ < \ \alpha_1^{(0)} \leq \beta_1^{(1)} \leq \beta_1^{(0)}, \\ &0 \ < \ \alpha_2^{(0)} \leq \beta_2^{(1)} \leq \beta_2^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Aplicando la definición de limite superior en (3.22) y bajo un procedimiento análogo a (3.9) tenemos que $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \, t_3' > t_2$ y $t_3 > t_3'$ tal que

$$\begin{aligned} &\max_{x \in \bar{\Omega}} \bar{u}_i^{(2)}(t, x) < \beta_i^{(1)} + \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_3', \\ &\bar{u}_i^{(1)}(t - r_i, x) < \beta_i^{(1)} + \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_3, \\ &C_i(M_{0i}^+ - M_i^+(t - t_3')) < \varepsilon \quad \text{para } \ t \geq t_3. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Definamos $\underline{u}_1^{(2)}(t,x)$, $\underline{u}_2^{(2)}(t,x)$ por el sistema no acoplado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_1^{(2)}}{\partial t} &= A\Delta \underline{u}_1^{(2)} + \underline{u}_1^{(2)}(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)\underline{u}_1^{(2)}(t,x) + c_1(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_1^{(2)}(t-\tau,x)dM_1^-(\tau) \\
&\quad -c_1(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_1^{(2)}(t-\tau,x)dM_1^+(\tau) - d_1\bar{u}_2^{(2)}(t-r_2,x)\Big], \ \ t > t_3, \ \ x \in \Omega, \\
\frac{\partial \underline{u}_2^{(2)}}{\partial t} &= A\Delta \underline{u}_2^{(2)} + \underline{u}_2^{(2)}(t,x)\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)\underline{u}_2^{(2)}(t,x) + c_2(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_2^{(2)}(t-\tau,x)dM_2^-(\tau) \\
&\quad -c_2(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_2^{(2)}(t-\tau,x)dM_2^+(\tau) - d_2\bar{u}_1^{(2)}(t-r_1,x)\Big], \ \ t > t_3, \ \ x \in \Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_1^{(2)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \underline{u}_2^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \quad t > t_3, \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.27}$$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) = \frac{1}{2}u_i(t,x), \quad (t,x) \in (-\infty, t_3] \times \bar{\Omega}.$$

Veamos que $(\underline{u}_1^{(2)}, \underline{u}_2^{(2)})$ y $(\bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)})$ son un par de soluciones inferior y superior del sistema (3.1).

Tenemos que demostrar que $\bar{u}_i^{(2)} \geq \underline{u}_i^{(2)}$ en $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ $(i = 1, 2)$ y que para todo $\underline{u}_i^{(2)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(2)}$ se cumple las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - A\Delta \bar{u}_i^{(2)} &\geq \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\quad -d_i\underline{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big], \ \ j \neq i, \ \ t > t_3, \ \ x \in \Omega, \\
\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial t} - A\Delta \underline{u}_i^{(2)} &\leq \underline{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(2)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\quad -d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big], \ \ j \neq i, \ \ t > t_3, \ \ x \in \Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial \eta} \leq 0 \leq \frac{\partial \bar{u}_i^{(1)}}{\partial \eta} \quad t > t_3, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x) \quad t \leq t_3, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (i = 1, 2).$$

Tenemos que para $t \leq t_3$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) = \frac{1}{2}u_i(t,x) \leq u_i(t,x).$$

Pero por (3.19) tenemos que

$$u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x).$$

Por lo tanto para $t \leq t_3$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) \leq u_i(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x),$$

que resulta ser la última desigualdad que queremos demostrar.

También tenemos que $\underline{u}_i^{(1)} \leq \bar{u}_i^{(2)}$ entonces $-\bar{u}_i^{(2)} \leq -\underline{u}_i^{(1)}$. Así si observamos las ecuaciones (3.27) y (3.18) vemos que para $t > t_3$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial t} &= A\Delta \underline{u}_i^{(2)} + \underline{u}_i^{(2)}\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(2)} + c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big] \\
&\leq A\Delta \underline{u}_i^{(2)} + \underline{u}_i^{(2)}\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(2)} + c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} &= A\Delta \bar{u}_i^{(2)} + \bar{u}_1^{(2)}\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)} + c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big].
\end{aligned}$$

Así por un criterio de comparación de las soluciones entre estos dos problemas se tiene para $t > t_3$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x).$$

Por lo tanto de los dos casos tenemos que para $(t,x) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega}$

$$\underline{u}_i^{(2)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(2)}(t,x).$$

Ahora supongamos que $\underline{u}_i^{(2)} \leq \psi_i \leq \bar{u}_i^{(2)}$ y demostremos las tres desigualdades restantes.

Para la primera desigualdad se tiene que $(\underline{u}_1^{(1)}, \underline{u}_1^{(1)})$ y $(\bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)})$ son un par de soluciones inferior y superior del sistema (3.1), entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - A\Delta \bar{u}_i^{(2)} \;\geq\; & \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\ & -d_i\underline{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big],\end{aligned}$$

pero $-\bar{u}_i^{(2)} \leq -\underline{u}_i^{(1)}$, por lo tanto para $i \neq j, t > t_3,\ x \in \Omega$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial t} - A\Delta \bar{u}_i^{(2)} \;\geq\; & \bar{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\bar{u}_i^{(2)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\ & -d_i\underline{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big].\end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad tenemos que por (3.27)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial t} - A\Delta \underline{u}_i^{(2)} \;=\; & \underline{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\ & -c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big].\end{aligned}$$

Pero $\underline{u}_i^{(2)} \leq \psi_i$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial t} - A\Delta \underline{u}_i^{(2)} \;\leq\; & \underline{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^-(\tau) \\ & -c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d(M_i^+ - \mu_i)(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big] \\
&= \underline{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_1^{(2)}(t,x) + c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu(\tau) - c_i(t,x)\int_0^\infty \bar{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) \\
&\quad -d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big] \\
&= \underline{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(2)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty (\bar{u}_i^{(2)} - \psi_i)(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) \\
&\quad -c_i(t,x)\int_0^\infty \underline{u}_i^{(2)}(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(2)}(t-r_j,x)\Big].
\end{aligned}
$$

Pero como $\psi_i \leq \bar{u}_i^{(2)}$, entonces $(\bar{u}_i^{(2)} - \psi_i) \geq 0$, así para $i \neq j,\ t > t_3,\ x \in \Omega$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial t} - A\Delta\underline{u}_i^{(2)} \quad &\leq \quad \underline{u}_i^{(2)}(t,x)\Big[a_i(t,x) - b_i(t,x)\underline{u}_i^{(2)}(t,x) - c_i(t,x)\int_0^\infty \psi_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) \\
&\quad -d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x)\Big].
\end{aligned}
$$

La tercera desigualdad resulta obvia dado que para $t > t_3,\ x \in \partial\Omega$

$$
\frac{\partial \underline{u}_i^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \leq 0 \leq 0 = \frac{\partial \bar{u}_i^{(2)}}{\partial \eta}.
$$

Por lo tanto $(\underline{u}_1^{(2)}, \underline{u}_2^{(2)})$ y $(\bar{u}_1^{(2)}, \bar{u}_2^{(2)})$ son un par de soluciones inferior y superior de (3.1).

Entonces aplicando el Lema 3.4 tenemos que

$$
\underline{u}_1^{(2)}(t,x) \leq u_1(t,x) \leq \bar{u}_1^{(2)}(t,x) \qquad \text{y} \qquad \underline{u}_2^{(2)}(t,x) \leq u_2(t,x) \leq \bar{u}_2^{(2)}(t,x) \tag{3.28}
$$

Hemos demostrado que $\bar{u}_i^{(2)}(t,x) \leq \bar{u}_i^{(1)}(t,x)$ para $t > t_2$ y $\bar{u}_i^{(1)}(t,x) \leq K_i$ para todo $\mathbb{R}$, además tenemos que $\bar{u}_i^{(2)}(t,x) = K_i$ para $t \leq t_2$, así tenemos que para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $\bar{u}_i^{(2)}(t,x) \leq K_i$.

Considerando el hecho anterior y por (3.26) tenemos que para $t > t_3$

$$\begin{aligned}
& c_i(t,x)\int_0^{\infty} \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) + d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \\
= \;& c_i(t,x)\int_0^{t-t_3'} \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) + c_i(t,x)\int_{t-t_3'}^{\infty} \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) \\
& +d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \\
\leq \;& c_i(t,x)\int_0^{t-t_3'} (\beta_i^{(0)}+\varepsilon)dM_i^+(\tau) + c_i(t,x)\int_{t-t_3'}^{\infty} K_i dM_i^+(\tau) + d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) \\
\leq \;& C_i(M_i^+(t-t_1) - M(0))(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) + K_iC_i(M_0i^+ - M_i^+(t-t_1)) + d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) \\
\leq \;& C_iM_{0i}^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) + d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) + K_i\varepsilon,
\end{aligned}$$

entonces para $t \geq t_3$

$$-c_i(t,x)\int_0^{\infty} \bar{u}_i^{(1)}(t-\tau,x)dM_i^+(\tau) - d_i\bar{u}_j^{(1)}(t-r_j,x) \geq -C_iM_{0i}^+(\beta_i^{(0)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(0)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon.$$

Por lo tanto sustituyendo en (3.26) se obtiene para $t > t_3$, $x \in \Omega$ las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \underline{u}_1^{(2)}}{\partial t} \;\geq\;& A\Delta\underline{u}_1^{(2)} + \underline{u}_1^{(2)}(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)\underline{u}_1^{(2)}(t,x) + c_1(t,x)\int_0^{\infty} \underline{u}_1^{(2)}(t-\tau,x)dM_1^-(\tau) \\
& -C_1M_{01}^+(\beta_1^{(1)}+\varepsilon) - d_1(\beta_2^{(1)}+\varepsilon) - K_1\varepsilon\Big], \\
\frac{\partial \underline{u}_2^{(2)}}{\partial t} \;\geq\;& A\Delta\underline{u}_2^{(2)} + \underline{u}_2^{(2)}(t,x)\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)\underline{u}_2^{(2)}(t,x) + c_2(t,x)\int_0^{\infty} \underline{u}_2^{(2)}(t-\tau,x)dM_2^-(\tau) \\
& -C_2M_{02}^+(\beta_2^{(1)}+\varepsilon) - d_2(\beta_1^{(1)}+\varepsilon) - K_2\varepsilon\Big].
\end{aligned}$$

Por un principio de comparación, conseguimos que para $t > t_3,\ x \in \Omega$

$$\underline{u}_1^{(2)}(t,x) \geq v_1^{(2)}(t,x) \qquad \text{y} \qquad \underline{u}_2^{(2)}(t,x) \geq v_2^{(2)}(t,x), \tag{3.29}$$

donde $v_1^{(2)}(t,x)$ y $v_2^{(2)}(t,x)$ son las soluciones de los siguientes problemas, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial t} &= A\Delta v_1^{(2)} + v_1^{(2)}(t,x)\bigg[a_1(t,x) - b_1(t,x)v_1^{(2)}(t,x) + c_1(t,x)\int_0^\infty v_1^{(2)}(t-\tau,x)dM_1^-(\tau) \\
&\quad -C_1M_{01}^+(\beta_1^{(1)}+\varepsilon) - d_1(\beta_2^{(1)}+\varepsilon) - K_1\varepsilon\bigg] \quad t > t_3, \quad x \in \Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \quad t > t_3, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$v_1^{(2)}(t,x) = \frac{1}{2}u_1(t,x), \quad (t,x) \in (-\infty, t_3] \times \bar{\Omega},$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial t} &= A\Delta v_2^{(2)} + v_2^{(2)}(t,x)\bigg[a_2(t,x) - b_2(t,x)v_2^{(2)}(t,x) + c_2(t,x)\int_0^\infty v_2^{(2)}(t-\tau,x)dM_2^-(\tau) \\
&\quad -C_2M_{02}^+(\beta_2^{(1)}+\varepsilon) - d_2(\beta_1^{(1)}+\varepsilon) - K_2\varepsilon\bigg] \quad t > t_3, \quad x \in \Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial \eta} = 0 \quad t > t_3, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$v_2^{(2)}(t,x) = \frac{1}{2}u_2(t,x), \quad (t,x) \in (-\infty, t_3] \times \bar{\Omega}.$$

Queremos aplicar el Lema 3.2 a los dos problemas anteriores, así que debemos cumplir las siguientes hipótesis

- $b_i > c_iM_{0i}^+$, el cual es una hipótesis inicial de nuestro teorema.
- $(***) > 0$, donde

$$\underbrace{a_i - C_iM_{0i}^+(\beta_i^{(1)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(1)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon}_{(***)} \leq a_i(t,x) - C_iM_{0i}^+(\beta_i^{(1)}+\varepsilon) - d_i(\beta_j^{(1)}+\varepsilon) - K_i\varepsilon.$$

Pero de (3.25) tenemos que

$$\beta_i^{(1)} \leq \beta_i^{(0)} \quad \Longrightarrow \quad -\beta_i^{(1)} \geq -\beta_i^{(0)}$$

y además por (3.13) tenemos que

$$a_i - C_i M_{0i}^{+}(\beta_i^{(0)} + \varepsilon) - d_i(\beta_2^{(0)} + \varepsilon) - K_i\varepsilon > 0$$

Por lo tanto para ε suficientemente pequeño tenemos

$$\begin{aligned} a_1 - C_1 M_{01}^{+}(\beta_1^{(1)} + \varepsilon) - d_1(\beta_2^{(1)} + \varepsilon) - K_1\varepsilon &> 0 \\ a_2 - C_2 M_{02}^{+}(\beta_2^{(1)} + \varepsilon) - d_2(\beta_1^{(1)} + \varepsilon) - K_2\varepsilon &> 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Por el Lema 3.2, obtenemos

$$0 < \frac{a_i - C_i M_{0i}^{+}(\beta_i^{(1)} + \varepsilon) - d_i(\beta_j^{(1)} + \varepsilon) - K_i\varepsilon}{B_i - c_i M_{0i}^{-}} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} v_i^{(1)}(t,x)$$

o equivalentemente

$$0 < \frac{a_1 - C_1 M_{01}^{+}\beta_1^{(1)} - d_1\beta_2^{(1)}}{B_1 - c_1 M_{01}^{-}} - \varepsilon\frac{C_1 M_{01}^{+} + d_1 + K_1}{B_1 - c_1 M_{01}^{-}} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} v_1^{(1)}(t,x)$$

y

$$0 < \frac{a_2 - C_2 M_{02}^{+}\beta_2^{(1)} - d_2\beta_1^{(1)}}{B_2 - c_2 M_{02}^{-}} - \varepsilon\frac{C_2 M_{02}^{+} + d_2 + K_2}{B_2 - c_2 M_{02}^{-}} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} v_2^{(1)}(t,x)$$

Entonces por (3.29)

$$0 < \frac{a_i - C_i M_{0i}^{+}\beta_i^{(1)} - d_i\beta_j^{(1)}}{B_i - c_i M_{0i}^{-}} - \varepsilon\frac{C_i M_{0i}^{+} + d_i + K_i}{B_i - c_i M_{0i}^{-}} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} \underline{u}_i(1)(t,x).$$

Para ε suficientemente pequeño tenemos que

$$0 < \frac{a_i - C_i M_{0i}^{+} \beta_i^{(1)} - d_i \beta_j^{(1)}}{B_i - c_i M_{0i}^{-}} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} \underline{u}_i(1)(t,x) \tag{3.31}$$

Por lo tanto por (3.28) y ε suficientemente pequeño

$$0 < \alpha_1^{(1)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \beta_1^{(1)} \tag{3.32}$$

y

$$0 < \alpha_2^{(1)} \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \beta_2^{(1)} \tag{3.33}$$

donde

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{a_1 - C_1 M_{01}^{+} \beta_1^{(1)} - d_1 \beta_2^{(1)}}{B_1 - c_1 M_{01}^{-}} \qquad \text{y} \qquad \alpha_2^{(1)} = \frac{a_2 - C_2 M_{02}^{+} \beta_2^{(1)} - d_2 \beta_1^{(1)}}{B_2 - c_2 M_{02}^{-}}$$

Así para $i = 1,2$

$$0 < \alpha_i^{(1)} \leq \beta_i^{(1)},$$

además $\beta_i^{(0)} \geq \beta_i^{(1)}$ entonces $-\beta_i^{(0)} \leq -\beta_i^{(1)}$. Así para $i = 1,2$

$$\alpha_i^{(0)} = \frac{a_i - C_i M_{0i}^{+} \beta_i^{(0)} - d_i \beta_j^{(0)}}{B_i - c_i M_{0i}^{-}} \leq \frac{a_i - C_i M_{0i}^{+} \beta_i^{(1)} - d_i \beta_j^{(1)}}{B_i - c_i M_{0i}^{-}} = \alpha_i^{(1)}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 \,<\, \alpha_1^{(0)} \leq \alpha_1^{(1)} \leq \beta_1^{(1)} \leq \beta_1^{(0)}, \\ 0 \,<\, \alpha_2^{(0)} \leq \alpha_2^{(1)} \leq \beta_2^{(1)} \leq \beta_2^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Definamos las sucesiones $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, $\beta_1^{(k)}$ y $\beta_2^{(k)}$ como sigue:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{(k)} &= \frac{a_1 - C_1 M_{01}^{+}\beta_1^{(k)} - d_1\beta_2^{(k)}}{B_1 - c_1 M_{01}^{-}} \quad , \quad \alpha_2^{(k)} = \frac{a_2 - C_2 M_{02}^{+}\beta_2^{(k)} - d_2\beta_1^{(k)}}{B_2 - c_2 M_{02}^{-}}, \\
\beta_1^{(k+1)} &= \frac{A_1 - c_1 M_{01}^{+}\alpha_1^{(k)} - d_1\alpha_2^{(k)}}{b_1 - c_1 M_{01}^{-}} \quad , \quad \beta_2^{(k+1)} = \frac{A_2 - c_2 M_{02}^{+}\alpha_2^{(k)} - d_2\alpha_1^{(k)}}{b_2 - c_2 M_{02}^{-}}, \\
\beta_1^{(0)} &= \frac{A_1}{b_1 - c_1 M_{01}^{-}} \quad , \quad \beta_2^{(0)} = \frac{A_2}{b_2 - c_2 M_{02}^{-}}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Lema 3.5

Para las sucesiones definidas anteriormente tenemos que

$$[\alpha_1^{(k+1)}, \beta_1^{(k+1)}] \subseteq [\alpha_1^{(k)}, \beta_1^{(k)}], \qquad [\alpha_2^{(k+1)}, \beta_2^{(k+1)}] \subseteq [\alpha_2^{(k)}, \beta_2^{(k)}] \qquad k \geq 0. \tag{3.36}$$

Demostración:

Usaremos inducción para la prueba de este Lema.

Para $k = 0$ ha sido mostrado que

$$[\alpha_1^{(1)}, \beta_1^{(1)}] \subseteq [\alpha_1^{(0)}, \beta_1^{(0)}] \qquad \text{y} \qquad [\alpha_2^{(1)}, \beta_2^{(1)}] \subseteq [\alpha_2^{(0)}, \beta_2^{(0)}].$$

Supongamos que $[\alpha_1^{(k)}, \beta_1^{(k)}] \subseteq [\alpha_1^{(k-1)}, \beta_1^{(k-1)}]$.

Entonces $\alpha_1^{(k-1)} \leq \alpha_1^{(k)}$ lo que implica que $-\alpha_1^{(k)} \leq -\alpha_1^{(k-1)}$. Así

$$\beta_i^{(k+1)} = \frac{A_i - c_i M_{0i}^{+}\alpha_i^{(k)} - d_i\alpha_j^{(k)}}{b_i - c_i M_{0i}^{-}} \leq \frac{A_i - c_i M_{0i}^{+}\alpha_i^{(k-1)} - d_i\alpha_j^{(k-1)}}{b_i - c_i M_{0i}^{-}} = \beta_i^{(k)},$$

Entonces $\beta_i^{(k+1)} \le \beta_i^{(k)}$, lo que implica que $-\beta_i^{(k)} \le -\beta_i^{(k+1)}$. Así

$$\alpha_i^{(k+1)} = \frac{a_i - C_i M_{0i}^{+} \beta_i^{(k+1)} - d_i \beta_j^{(k+1)}}{B_1 - c_i M_{0i}^{-}} \ge \frac{a_i - C_i M_{0i}^{+} \beta_i^{(k)} - d_i \beta_j^{(k)}}{B_1 - c_i M_{0i}^{-}} = \alpha_i^{(k)}.$$

Por lo tanto para $k \ge 0$

$$[\alpha_1^{(k+1)}, \beta_1^{(k+1)}] \subseteq [\alpha_1^{(k)}, \beta_1^{(k)}] \quad \text{y} \quad [\alpha_2^{(k+1)}, \beta_2^{(k+1)}] \subseteq [\alpha_2^{(k)}, \beta_2^{(k)}].$$

▲

Por el Lema 3.5 las sucesiones $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$ son crecientes y las sucesiones $\beta_1^{(k)}$, $\beta_1^{(k)}$ son decrecientes y todas son acotadas, implicando que

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_1^{(k)}, \quad \lim_{k\to\infty} \alpha_2^{(k)}, \quad \lim_{k\to\infty} \beta_1^{(k)}, \quad \lim_{k\to\infty} \beta_2^{(k)}$$

existan, denotemos estos límites como α_1, α_2, β_1 y β_2 respectivamente. Sustituyendo estos límites en las sucesiones (3.35) obtenemos que estos números son determinados por la solución del sistema lineal de cuatro incognitas y cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_1 - C_1 M_{01}^{+} \beta_1 - d_1 \beta_2}{B_1 - c_1 M_{01}^{-}} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{a_2 - C_2 M_{02}^{+} \beta_2 - d_2 \beta_1}{B_2 - c_2 M_{02}^{-}}, \\ \beta_1 &= \frac{A_1 - c_1 M_{01}^{+} \alpha_1 - d_1 \alpha_2}{b_1 - c_1 M_{01}^{-}} \quad , \quad \beta_2 = \frac{A_2 - c_2 M_{02}^{+} \alpha_2 - d_2 \alpha_1}{b_2 - c_2 M_{02}^{-}}. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Lema 3.6

Para la solución del sistema (3.1) tenemos que

$$0 < \alpha_1^{(k)} \le \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \le \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \le \beta_1^{(k)}, \quad k \ge 0 \tag{3.38}$$

y

$$0 < \alpha_2^{(k)} \le \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \le \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \le \beta_2^{(k)}, \quad k \ge 0. \tag{3.39}$$

Demostración:

Hemos demostrado que (3.38) y (3.39) son válidos para $k = 0, 1$. Usando inducción y repitiendo el proceso anterior, acompletamos la prueba.

▲

Demostración del Teorema 3.1:

Combinando los resultados del Lema 3.5 y 3.6 acompletamos la prueba del Teorema 3.1.

■

3.6. Un Caso Particular

Verifiquemos que el Teorema 2.1 es un caso particular del Teorema 3.1. Lo anterior no es ninguna sorpresa dado que el procedimiento utilizado para demostrar el Teorema 3.1 fue el empleado en demostrar el Teorema 2.1.

Sea $f_i \in C(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$.

Consideremos la siguiente función para $i = 1, 2$

$$\mu_i(\tau) = \int_0^\tau f_i(t)dt,$$

entonces por la Proposición 5 tenemos que μ_i es una función de variación acotada con $\mu_i(0) = 0$ y además

$$\mu_i'(\tau) = f_i(\tau)$$

Entonces por la Proposición 4 tenemos que

$$\int_0^\infty u_i(t-\tau,x)d\mu_i(\tau) = \int_0^\infty u_i(t-\tau,x)\mu_i'(\tau)d\tau = \int_0^\infty f_i(\tau)u_i(t-\tau,x)d\tau$$

Por otro lado la variación total de μ_i esta dada por

$$M_i(\tau) = \sup_P \left\{ \sum(P) \ : \ P \text{ es una partición de } [0,\tau] \right\}$$

Pero tenemos que dada $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[0,\tau]$

$$\begin{aligned} \sum(P) &= \sum_{k=1}^{n} |\mu_i(t_k) - \mu_i(t_{k-1})| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_0^{t_k} f_i(t)dt - \int_0^{t_{k-1}} f_i(t)dt \right| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{0} f_i(t)dt + \int_0^{t_k} f_i(t)dt \right| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_i(t)dt \right| \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} M_i(\tau) &= \sup_P \left\{ \sum(P) \ : \ P \text{ es una partición de } [0,\tau] \right\} \\ &= \sup_P \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_i(t)dt \right| \ : \ P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \text{ partición de } [0,\tau] \right\}. \end{aligned}$$

Pero tenemos que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f_i(t)dt \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f_i(t)|dt = \int_0^{\tau} |f_i(t)|dt,$$

es decir $\int_0^{\tau} |f_i(t)|dt$ es cota superior del conjunto al que queremos hallar el supremo.

Pero si tomamos la partición $P = \{0 = \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n = \tau\}$ donde τ_i, para $i = 1, \ldots, n-1$, son puntos tales que $f(\tau_i) = 0$, entonces

$$\left| \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} f_i(t)dt \right| = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} |f_i(t)|dt,$$

así

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} f_i(t)dt \right| = \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} |f_i(t)|dt = \int_0^{\tau} |f_i(t)|dt,$$

así tenemos que un elemento de mi conjunto es cota superior , entonces es el supremo de dicho conjunto, por lo tanto

$$M_i(\tau) = \int_0^{\tau} |f_i(t)|dt.$$

Por otro lado por definición

$$M_i^{\pm}(\tau) = \frac{M_i \pm \mu_i}{2} = \frac{\displaystyle\int_0^{\tau} |f_i(t)|dt \pm \int_0^{\tau} f_i(t)dt}{2} = \frac{\displaystyle\int_0^{\tau} (|f_i(t)| \pm f_i(t))dt}{2},$$

pero tenemos que $f_i = f_i^+ - f_i^-$ y $|f_i| = f_i^+ + f_i^-$, entonces $|f_i| \pm f_i = 2f_i^{\pm}$.

Por lo tanto

$$M_i^+(\tau) = \int_0^{\tau} f_i^+(t)dt \quad \text{y} \quad M_i^-(\tau) = \int_0^{\tau} f_i^-(t)dt,$$

entonces

$$M_{0i}^{\pm} = \lim_{\tau\to\infty} M_i^{\pm}(\tau) = \int_0^{\infty} f_i^{\pm}(\tau)d\tau \quad \text{y} \quad \mu_{0i}(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \mu_i(\tau) = \int_0^{\infty} f_i(t)dt.$$

Consideremos $A = 1$ y

$$\begin{aligned}
0 &< a_i = a_i(t,x) = A_i\ ,\\
0 &< b_i = b_i(t,x) = B_i\ ,\\
0 &\le c_i = c_i(t,x) = C_i = 1\ ,
\end{aligned}$$

entonces las condiciones del Teorema 3.1 se reducen a

$$b_i > c_i M_{0i}^- \iff b_i > \int_0^\infty f_i^-(t)dt,$$

$$\begin{aligned} a_i - \frac{C_i M_{0i}^+ A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-} > 0 &\iff a_i - \frac{M_{0i}^+ a_i}{b_i - M_{0i}^-} > 0 \\ &\iff a_i(b_i - M_{0i}^-) - (M_{0i}^+ a_i) > 0 \\ &\iff b_i > M_{0i}^- + M_{0i}^+ \\ &\iff b_i > \int_0^\infty |f_i^-(t)|dt \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d_2 A_2 (b_2 - c_2 M_{02}^-)}{(b_1 - c_1 M_{01}^-)[a_2(b_2 - c_2 M_{02}^-) - C_2 M_{02}^+ A_2]} &< \frac{A_2}{A_1} < \frac{(b_2 - c_2 M_{02}^-)[a_1(b_1 - c_1 M_{01}^-) - C_1 M_{01}^+ A_1]}{d_1 A_1 (b_1 - c_1 M_{01}^-)} \\ \iff \frac{d_2 a_2 (b_2 - M_{02}^-)}{(b_1 - M_{01}^-)[a_2(b_2 - M_{02}^-) - M_{02}^+ a_2]} &< \frac{a_2}{a_1} < \frac{(b_2 - M_{02}^-)[a_1(b_1 - M_{01}^-) - M_{01}^+ a_1]}{d_1 a_1 (b_1 - M_{01}^-)} \\ \iff \frac{d_2 (b_2 - M_{02}^-)}{(b_1 - M_{01}^-)[b_2 - M_{02}^- - M_{02}^+]} &< \frac{a_2}{a_1} < \frac{(b_2 - M_{02}^-)[b_1 - M_{01}^- - M_{01}^+]}{d_1 (b_1 - M_{01}^-)} \end{aligned}$$

Entonces para cualquier $\phi_i \in C^1((-\infty, 0]) \times \bar{\Omega}$ con $\phi(0, \cdot)$ distinto a la función cero, la solución del sistema (3.1), ahora transformado en sistema (2.1), satisface

$$0 < \alpha_1 \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_1(t,x) \leq \beta_1$$

$$0 < \alpha_2 \leq \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{\Omega}} u_2(t,x) \leq \beta_2$$

donde α_1, α_2, β_1 y β_2 son constantes que se determinan por el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a_1 - M_{01}^+ \beta_1 - d_1 \beta_2}{b_1 - M_{01}^-} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{a_2 - M_{02}^+ \beta_2 - d_2 \beta_1}{b_2 - M_{02}^-}, \\ \beta_1 &= \frac{a_1 - M_{01}^+ \alpha_1 - d_1 \alpha_2}{b_1 - M_{01}^-} \quad , \quad \beta_2 = \frac{a_2 - M_{02}^+ \alpha_2 - d_2 \alpha_1}{b_2 - M_{02}^-}. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema anterior tenemos que

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{a_1(b_2 + M_{02}^+ - M_{02}^-) - a_2 d_1}{(b_1 + M_{01}^+ - M_{01}^-)(b_2 + M_{02}^+ - M_{02}^-) - d_1 d_2},$$

$$\alpha_2 = \beta_2 = \frac{a_2(b_1 + M_{01}^+ - M_{01}^-) - a_1 d_2}{(b_1 + M_{01}^+ - M_{01}^-)(b_2 + M_{02}^+ - M_{02}^-) - d_1 d_2}.$$

Denotemos $M_{0i}^- = c_i^-$ y $M_{0i}^+ = c_i^+$ únicamente para estar de acuerdo con la notación del Teorema 2.1.

Por lo tanto de todo lo anterior tenemos el Teorema 2.1.

Teorema 2.1

Asumamos que $f_i \in C(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ $(i = 1, 2)$ y que se cumple

$$b_1 > \int_0^\infty |f_1^-(s)|ds, \qquad b_2 > \int_0^\infty |f_2^-(s)|ds$$

y

$$\frac{d_2(b_2 - c_2^-)}{(b_1 - c_1^-)(b_2 - c_2^+ - c_2^-)} < \frac{a_2}{a_1} < \frac{(b_2 - c_2^-)(b_1 - c_1^+ - c_1^-)}{d_1(b_1 - c_1^-)},$$

entonces para cualquier $\phi_i \in C^1((-\infty, 0]) \times \bar{\Omega}$ con $\phi_i(0, x)$ distinto a la función cero, la solución de (2.1) satisface

$$\lim_{t\to\infty} u_1(t,x) = \frac{a_1(b_2 + c_2^+ - c_2^-) - a_2 d_1}{(b_1 + c_1^+ - c_1^-)(b_2 + c_2^+ - c_2^-) - d_1 d_2} \quad \text{(uniformemente para } x \in \bar{\Omega}),$$

$$\lim_{t\to\infty} u_2(t,x) = \frac{a_2(b_1 + c_1^+ - c_1^-) - a_1 d_2}{(b_1 + c_1^+ - c_1^-)(b_2 + c_2^+ - c_2^-) - d_1 d_2} \quad \text{(uniformemente para } x \in \bar{\Omega}).$$

Capítulo 4

Simulación Numérica.

4.1. El Sistema a Aproximar

En este capítulo haremos unas simulaciones numéricas para ejemplicar los Teoremas 2.1 y 3.1.

Dado el sistema (3.1)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= A\Delta u_1(t,x) + u_1(t,x)\Big[a_1(t,x) - b_1(t,x)u_1(t,x) \\
&\quad -c_1(t,x)\int_0^\infty u_1(t-\tau,x)d\mu_1(\tau) - d_1u_2(t-r_2,x)\Big], \quad t>0,\ \ x\in\Omega, \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= A\Delta u_2(t,x) + u_2(t,x)\Big[a_2(t,x) - b_2(t,x)u_2(t,x) \\
&\quad -c_2(t,x)\int_0^\infty u_2(t-\tau,x)d\mu_2(\tau) - d_2u_1(t-r_1,x)\Big], \quad t>0,\ \ x\in\Omega,
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0 \qquad t>0, \quad x\in\partial\Omega,$$

$$u_i(t,x) = \phi_i(t,x), \qquad (i=1,2) \quad t\le 0, \quad x\in\bar{\Omega}.$$

Tomaremos a $\Omega = I = [0, W] \subset \mathbb{R}$, así el sistema que aproximaremos será

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= A\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f_1(t, x, u_1(t, x), u_2(t - r_2, x)), \quad t > 0, \ x \in [0, W], \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= A\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f_2(t, x, u_2(t, x), u_1(t - r_1, x)), \quad t > 0, \ x \in [0, W],
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}u_1(0, t) = \frac{\partial}{\partial x}u_1(W, t) = 0, \quad t > 0, \\
\frac{\partial}{\partial x}u_2(0, t) = \frac{\partial}{\partial x}u_2(W, t) = 0, \quad t > 0, \\
u_i(t, x) = \phi_i(t, x), \qquad (i = 1, 2) \quad t \leq 0, \quad x \in [0, W],
\end{gathered} \tag{4.1}$$

donde para $i = 1, 2$

$$\begin{aligned}
f_i(t, x, u_i(t, x), u_j(t - r_j, x)) &= u_i(t, x)\Big[a_i(t, x) - b_i(t, x)u_i(t, x) \\
&\quad -c_i(t, x)\int_0^\infty \mu_i(\tau)u_i(t - \tau, x)d\tau - d_i u_j(t - r_j, x)\Big].
\end{aligned}$$

4.2. Aproximaciones

Aproximaremos con diferencias hacia adelante la derivada:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \approx \frac{u_i(t + k, x) - u_i(t, x)}{k},$$

con k una constante positiva.

Aproximaremos con diferencias centrales a la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \approx \frac{u_i(t, x + h) - 2u_i(t, x) + u_i(t, x - h)}{h^2},$$

con h una constante positiva.

Aproximaremos con diferencias centrales a las condiciones de frontera:

$$
\begin{aligned}
0 = & \ \frac{\partial}{\partial x} u_i(t,0) \approx \frac{u_i(t,h) - u_i(t,-h)}{2h} && \Longrightarrow \ u_i(t,h) \approx u_i(t,-h)\ , \\
0 = & \ \frac{\partial}{\partial x} u_i(t,W) \approx \frac{u_i(t,W+h) - u_i(t,W-h)}{2h} && \Longrightarrow \ u_i(t,W+h) \approx u_i(t,W-h)\ .
\end{aligned}
$$

Sustituyendo las aproximaciones anteriores en mi ecuación tenemos que

$$
\frac{u_i(t+k,x) - u_i(t,x)}{k} = A\left[\frac{u_i(t,x+h) - 2u_i(t,x) + u_i(t,x-h)}{h^2}\right] + f_i(t,x,u_i(t,x),u_j(t-r_j,x)),
$$

entonces

$$
u_i(t+k,x) = \frac{Ak}{h^2}[u_i(t,x+h) - 2u_i(t,x) + u_i(t,x-h)] + kf_i(t,x,u_i(t,x),u_j(t-r_j,x)) + u_i(t,x),
$$

por lo tanto si llamamos $a = \frac{Ak}{h^2}$ obtenemos el esquema numérico

$$
\begin{aligned}
u_i(t+k,0) &= 2au_i(t,h) + (1-2a)u_i(t,0) + kf_i(t,x,u_i(t,x),u_j(t-r_j,x)), \\
u_i(t+k,W) &= 2au_i(t,W-h) + (1-2a)u_i(t,0) + kf_i(t,x,u_i(t,x),u_j(t-r_j,x))
\end{aligned}
$$

y para x entre $(0,W)$

$$
u_i(t+k,x) = au_i(t,x+h) + (1-2a)u_i(t,x) + au_i(t,x-h) + kf_i(t,x,u_i(t,x),u_j(t-r_j,x)).
$$

Por último aproximaremos la integral con la Regla del Trapecio y el dominio infinito $(0,\infty)$ mediante un dominio finito $[0,L]$.

4.3. Rejilla de Aproximación

Nuestra rejilla de aproximación estará conformada de la siguiente manera (ver figura 2):

- Dado que es imposible calcular nuestra aproximación de $(0,\infty)$, lo haremos de $(0,T]$ donde T es una constante positiva.

- Si m es el número de divisiones deseadas para $[0, W]$, entonces tomaremos

$$h = \frac{W}{m}.$$

- Para el eje t las divisiones no son tan simples dado que involucra 4 constantes: r_1, r_2, T y L. Lo que se hará es considerar una y aproximar las demás con respecto a la primera, es decir, si n es el número de divisiones deseadas para $[0, r_1]$, entonces tomaremos

$$k = \frac{r_1}{n}$$

  y aproximaremos $r_2 \approx sk$, $T \approx pk$ y $L \approx qk$, donde s, p y q son los naturales más pequeños tales que $r_2 \leq sk$, $T \leq pk$ y $L \leq qk$ respectivamente.

- Los puntos (t_i, x_j) son donde aproximaremos tanto u_1 como u_2 , con $t_i = ik$ y $x_j = jh$ para $i = 1, 2, \ldots p$ y $j = 1, 2, \ldots m$.

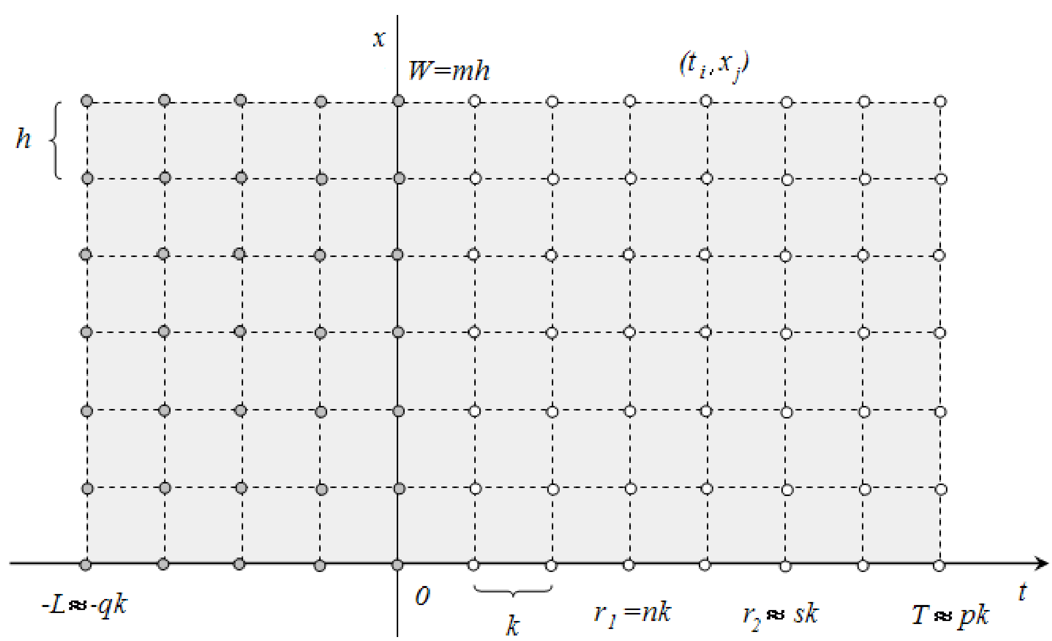


Figura §2. Rejilla numérica. En los puntos blancos se encontrará la aproximación.

4.4. El Algoritmo

El programa de cómputo desarrollado para las simulaciones numéricas (ver Apéndice) se basa principalmente en los siguientes pasos.

Paso 1. Datos.

Se piden todos los datos necesarios para trabajar : A, W, T, L, n, m, r_1, r_2, funciones de crecimiento por individuo (que denotaremos f_i), funciones iniciales (que denotaremos g_i) y funciones de peso de la integral (que denotaremos fun_i).

Paso 2. Parámetros.

Se definen los parámetros necesarios: k, h, a y las nuevas constantes T, L, r_2 que llamaremos TT, $L1$, $r22$ respectivamente.

Paso 3. Rejilla.

Se crea la rejilla en la que haremos aproximaciones, es decir las (t_i, x_j).

Paso 4. Valores Iniciales.

Se crean dos matrices llamadas $M1$ y $M2$, ambas de $q+1 \times m+1$, que tendrán como elementos los valores iniciales de la región $[-L1, 0] \times [0, W]$.

Paso 5. La Integral.

Se calcula la integral para la primera columna de aproximación, esto se hace mediante la Regla del Trapecio usando mis valores iniciales (matrices $M1$ y $M2$) y evaluaciones de las funciones de peso fun_i.

Paso 6. Cálculo de la Primera Aproximación.

Utilizamos el esquema numérico

$$
\begin{aligned}
u_i(t+k,0) &= 2au_i(t,h) + (1-2a)u_i(t,0) + kf_i, \\
u_i(t+k,W) &= 2au_i(t,W-h) + (1-2a)u_i(t,0) + kf_i, \\
u_i(t+k,x) &= au_i(t,x+h) + (1-2a)u_i(t,x) + au_i(t,x-h) + kf_i,
\end{aligned}
$$

para calcular mi aproximación, que será un nuevo vector anexo a mis matrices $M1$ y $M2$, es decir $M1(q+1+1,j)$ y $M2(q+1+1,j)$.

Paso 7. La Nueva Integral.

Se utilizan los nuevos datos para calcular la integral que se necesita para la siguiente columna.

Paso 8. Todas las Aproximaciones.

Se repite los pasos 6 y 7 para generar las demás aproximaciones. El proceso termina cuando obtenemos $M1(q+1+p,j)$ y $M2(q+1+p,j)$.

4.5. Simulaciones

Ejemplo1.

En este primer ejemplo consideraremos el siguiente sistema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1\Big[2 - 2u_1 - \int_0^\infty \frac{1}{1+\tau^2} u_1(t-\tau,x)d\tau - (1/4)u_2(t-2,x)\Big], \\
& \qquad t \in [0,T], \quad x \in [0,12], \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + u_2\Big[3 - 2u_2 - \int_0^\infty \frac{1}{1+\tau^2} u_2(t-\tau,x)d\tau - (1/2)u_1(t-(3/2),x)\Big], \\
& \qquad t \in [0,T], \quad x \in [0,12],
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(12,t) = 0, \quad (i=1,2), \qquad t > 0, \tag{4.2}
$$

$$
\begin{aligned}
u_1(t,x) &= \frac{1}{2}sen(\frac{1}{2}t) + 1.01, && t \leq 0, \quad x \in [0,12], \\
u_2(t,x) &= \frac{1}{2}\Big(sen(\frac{1}{2}t) + sen(\frac{1}{2}x)\Big) + 1.01, && t \leq 0, \quad x \in [0,12].
\end{aligned}
$$

Verifiquemos que se cumplen las hipótesis del Teorema 2.1.

Tenemos que la función de peso de la integral $f_i(\tau) = \dfrac{1}{1+\tau^2}$ es una función positiva y además

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+\tau^2}\, d\tau = \frac{\pi}{2},$$

entonces

$$\begin{aligned} c_i^+ = \int_0^\infty f_i^+(\tau)\, d\tau &= \int_0^\infty \frac{1}{1+\tau^2}\, d\tau = \frac{\pi}{2}, \\ c_i^- = \int_0^\infty f_i^-(\tau)\, d\tau &= \int_0^\infty 0\, d\tau = 0, \end{aligned}$$

además tenemos que

$$\begin{array}{lll} a_1 = 2, & b_1 = 2, & d_1 = \dfrac{1}{4}, \\ a_2 = 3, & b_2 = 2, & d_2 = \dfrac{1}{2}. \end{array}$$

Así mi primera condición es válida dado que

$$\int_0^\infty |f_i(\tau)|\, d\tau = \int_0^\infty \left|\frac{1}{1+\tau^2}\right| d\tau = \int_0^\infty \frac{1}{1+\tau^2}\, d\tau = \frac{\pi}{2} < 2 = b_i\ .$$

Mi segunda condición

$$\frac{d_2(b_2 - c_2^-)}{(b_1 - c_1^-)(b_2 - c_2^+ - c_2^-)} < \frac{a_2}{a_1} < \frac{(b_2 - c_2^-)(b_1 - c_1^+ - c_1^-)}{d_1(b_1 - c_1^-)},$$

equivale a

$$\frac{\frac{1}{2}(2)}{2(2-\frac{\pi}{2})} < \frac{3}{2} < \frac{2(2-\frac{\pi}{2})}{\frac{1}{4}(2)},$$

lo que es aproximadamente

$$1.1649 < 1.5 < 1.7168\ ,$$

es decir, mi condición es cumplida.

Entonces el Teorema 2.1 implica que

$$\lim_{t\to\infty} u_1(t,x) = \frac{a_1(b_2+c_2^+-c_2^-)-a_2d_1}{(b_1+c_1^+-c_1^-)(b_2+c_2^+-c_2^-)-d_1d_2} = \frac{2(2+\frac{\pi}{2})-3(\frac{1}{4})}{(2+\frac{\pi}{2})(2+\frac{\pi}{2})-(\frac{1}{2})(\frac{1}{4})} = 0.5062$$

$$\lim_{t\to\infty} u_2(t,x) = \frac{a_2(b_1+c_1^+-c_1^-)-a_1d_2}{(b_1+c_1^+-c_1^-)(b_2+c_2^+-c_2^-)-d_1d_2} = \frac{3(2+\frac{\pi}{2})-2(\frac{1}{2})}{(2+\frac{\pi}{2})(2+\frac{\pi}{2})-(\frac{1}{2})(\frac{1}{4})} = 0.7693$$

El programa muestra las siguientes aproximaciones con respecto a T.

T	$\lim u_1$	$\lim u_2$
10	0.5106	0.7759
20	0.5095	0.7742
40	0.5084	0.7726
80	0.5075	0.7712

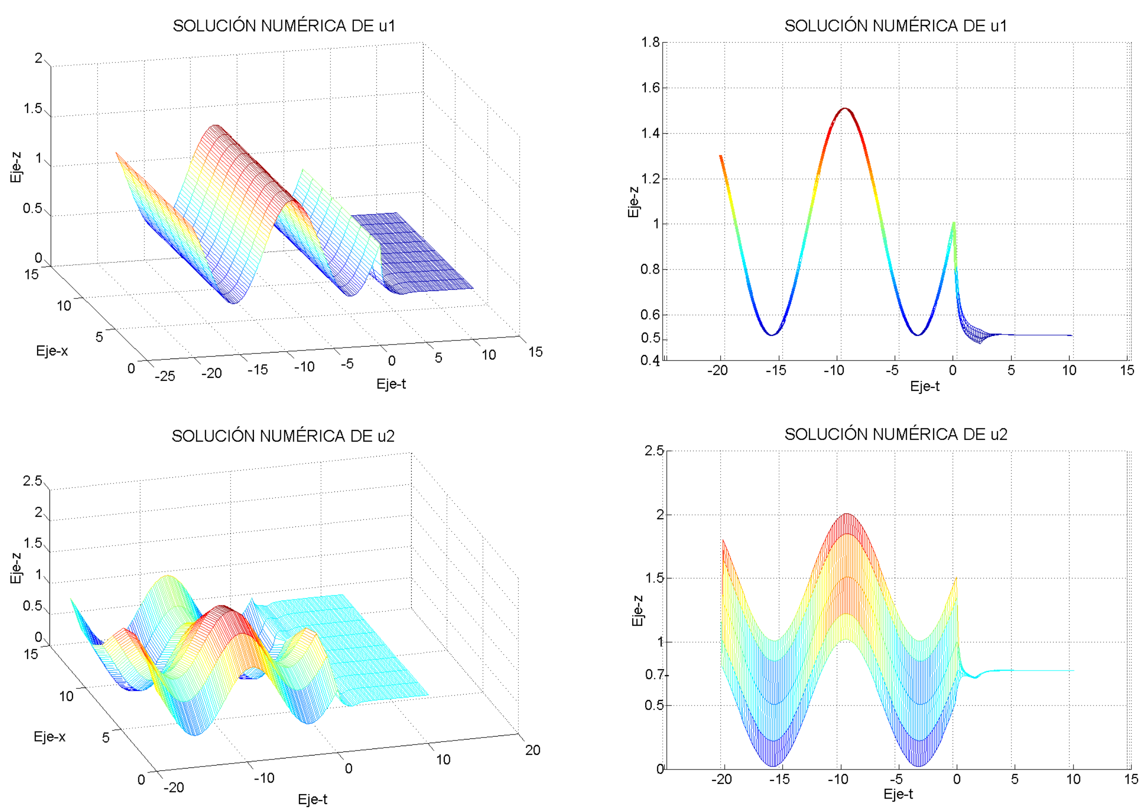


Figura §3. Simulación del ejemplo 1 para $T = 10$ (vista tridimensional y transversal).

Ejemplo 2.

Podemos observar que las funciones iniciales no afectan el valor de la convergencia de mis soluciones, lo único que puede pasar es que la convergencia sea más lenta o más rápida.

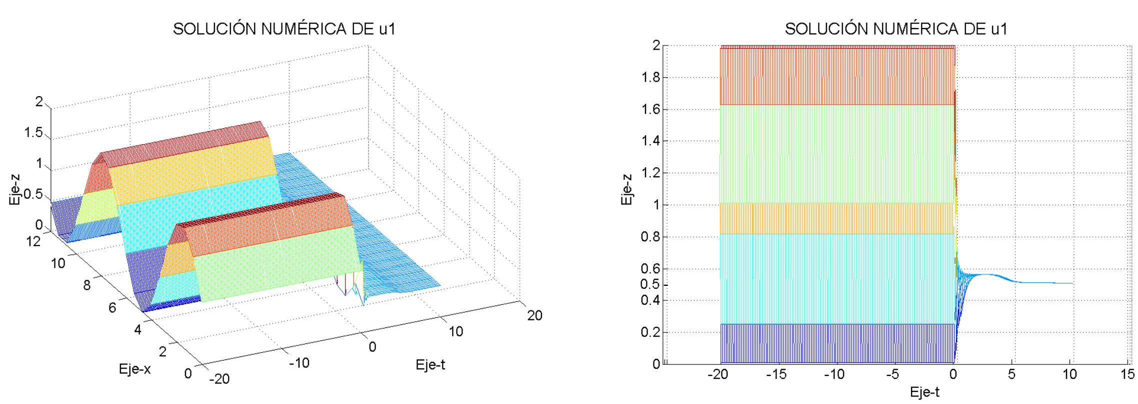
En nuestro segundo ejemplo únicamente cambiaremos las funciones iniciales del ejemplo 1 por las funciones

$$
\begin{aligned}
u_1(t,x) &= sen(x) + 1.01, && t \le 0, \quad x \in [0,12], \\
u_2(t,x) &= \frac{1}{200}(1+t^2)sen(\frac{\pi x}{12}) + 0.01, && t \le 0, \quad x \in [0,12].
\end{aligned}
$$

Las aproximaciones con respecto a T estan dadas por

T	$\lim u_1$	$\lim u_2$
10	0.5106	0.7758
20	0.5095	0.7742
40	0.5084	0.7726
80	0.5075	0.7712

Observamos que en nuestro ejemplo la velocidad de convergencia es practicamente la misma.



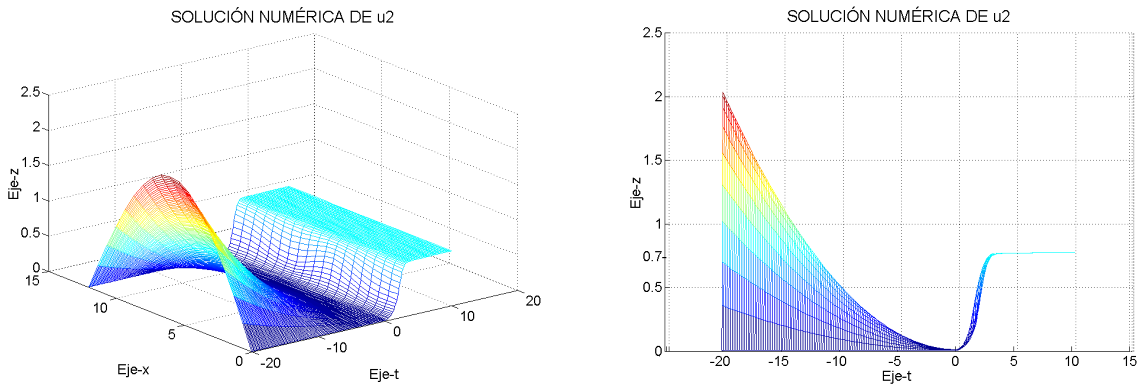


Figura §4. Simulación del ejemplo 2 para $T = 10$ (vista tridimensional y transversal).

Ejemplo 3.

Ahora consideraremos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1\Big[(sen(t)+2) - (\frac{1}{1+x^2}+10)u_1 \\
&\quad -(cos(t)+1.01)\int_0^\infty \frac{1}{1+\tau^2}u_1(t-\tau,x)d\tau - (1/10)u_2(t-2,x)\Big], \\
&\qquad\qquad t\in[0,T],\quad x\in[0,12], \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + u_2\Big[(\sqrt{sen^2(t)}+1) - (\frac{x}{1+x^2}+7.5)u_2 \\
&\quad -(sen(t^2)+1.01)\int_0^\infty \frac{1}{1+\tau^2}u_2(t-\tau,x)d\tau - (1/2)u_1(t-1.5,x)\Big], \\
&\qquad\qquad t\in[0,T],\quad x\in[0,12],
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u_i}{\partial x}(12,t) = 0, \quad (i=1,2), \qquad t>0, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
u_1(t,x) &= \frac{1}{2}sen(\frac{1}{2}t) + 1.01, && t\le 0,\quad x\in[0,12], \\
u_2(t,x) &= \frac{1}{2}\Big(sen(\frac{1}{2}t) + sen(\frac{1}{2}x)\Big) + 1.01, && t\le 0,\quad x\in[0,12].
\end{aligned}$$

Así

$$a_1(t,x) = sen(t) + 2, \qquad a_2(t,x) = \sqrt{sen^2(t)} + 1,$$

$$b_1(t,x) = \frac{1}{1+x^2} + 10, \qquad b_2(t,x) = \frac{x}{1+x^2} + 7.5,$$

$$c_1(t,x) = cos(t) + 1.01, \qquad c_2(t,x) = sen(t^2) + 1.01,$$

$$d_1 = \frac{1}{10}, \qquad d_2 = \frac{1}{35},$$

pero tenemos que

$$0 < 1 \leq sen(t) + 2 \leq 3, \qquad 0 < 1 \leq \sqrt{sen^2(t)} + 1 \leq 2,$$

$$0 < 10 \leq \frac{1}{1+x^2} + 10 \leq 11, \qquad 0 < 7 \leq \frac{x}{1+x^2} + 7.5 \leq 8,$$

$$0 < 0.01 \leq cos(t) + 1.01 \leq 2.01, \qquad 0 < 0.01 \leq sen(t^2) + 1.01 \leq 2.01,$$

entonces

$$a_1 = 1, \quad A_1 = 3, \qquad a_2 = 1, \quad A_2 = 2,$$

$$b_1 = 10, \quad B_1 = 11, \qquad b_2 = 7, \quad B_2 = 8,$$

$$c_1 = 0.01, \quad C_1 = 2.01, \qquad c_2 = 0.01, \quad C_2 = 2.01,$$

$$d_1 = \frac{1}{10}, \qquad d_2 = \frac{1}{35}.$$

Además tenemos que para $i = 1, 2$

$$M_{0i}^{+} = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau = \frac{\pi}{2} = 1.5707 \quad \text{y} \quad M_{0i}^{-} = 0.$$

Verifiquemos que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.1.

Como

$$b_i > c_i M_{0i}^{-} \Longleftrightarrow b_i > 0,$$

entonces mi primera condición es válida dado que $7 > 0$ y $6 > 0$.

Para mi segunda condición tenemos que

$$a_i - \frac{C_i M_{0i}^+ A_i}{b_i - c_i M_{0i}^-} > 0,$$

lo que en nuestro sistema equivale

$$1 - \frac{2.01(\pi/2)(3)}{10} = 0.0528 > 0 \quad \text{y} \quad 1 - \frac{2.01(\pi/2)(2)}{7} = 0.0979 > 0.$$

Mi tercera condición

$$\frac{d_2 A_2 (b_2 - c_2 M_{02}^-)}{(b_1 - c_1 M_{01}^-)[a_2(b_2 - c_2 M_{02}^-) - C_2 M_{02}^+ A_2]} < \frac{A_2}{A_1} < \frac{(b_2 - c_2 M_{02}^-)[a_1(b_1 - c_1 M_{01}^-) - C_1 M_{01}^+ A_1]}{d_1 A_1 (b_1 - c_1 M_{01}^-)},$$

equivale a

$$\frac{\frac{1}{35}(2)(7-0)}{(10-0)[1(7-0) - (2{,}01)(\frac{\pi}{2})(2)]} < \frac{2}{3} < \frac{(7-0)[1(10-0) - (2.01)(\frac{\pi}{2})(3)]}{\frac{1}{10}(3)(10-0)},$$

lo que es aproximadamente

$$0.5833 < 0.6666 < 1.2333\ ,$$

es decir mi condición es cumplida.

Entonces el Teorema 3.1 implica que el atractor global esta dado por la solución del sistema

$$\begin{aligned}
\alpha_1(11-0) &= 1 - 2.01(\pi/2)\beta_1 - (1/10)\beta_2,\\
\alpha_2(1{,}5-0) &= 1 - 2.01(\pi/2)\beta_2 - \beta_1,\\
\beta_1(10-0) &= 3 - 0.01(\pi/2)\alpha_1 - (1/10)\alpha_2,\\
\beta_2(0.5-0) &= 2 - 0.01(\pi/2)\alpha_2 - \alpha_1.
\end{aligned}$$

Las soluciones son

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0.002245,\\ \alpha_2 &= 0.011192,\\ \beta_1 &= 0.299884,\\ \beta_2 &= 0.285680.\end{aligned}$$

Por lo tanto el atractor global para u_1 y u_2 esta dado por $[0.002245, 0.299884]$ y $[0.011192, 0.285680]$ respectivamente.

La simulación numérica a este sistema da como respuesta las siguientes gráficas.

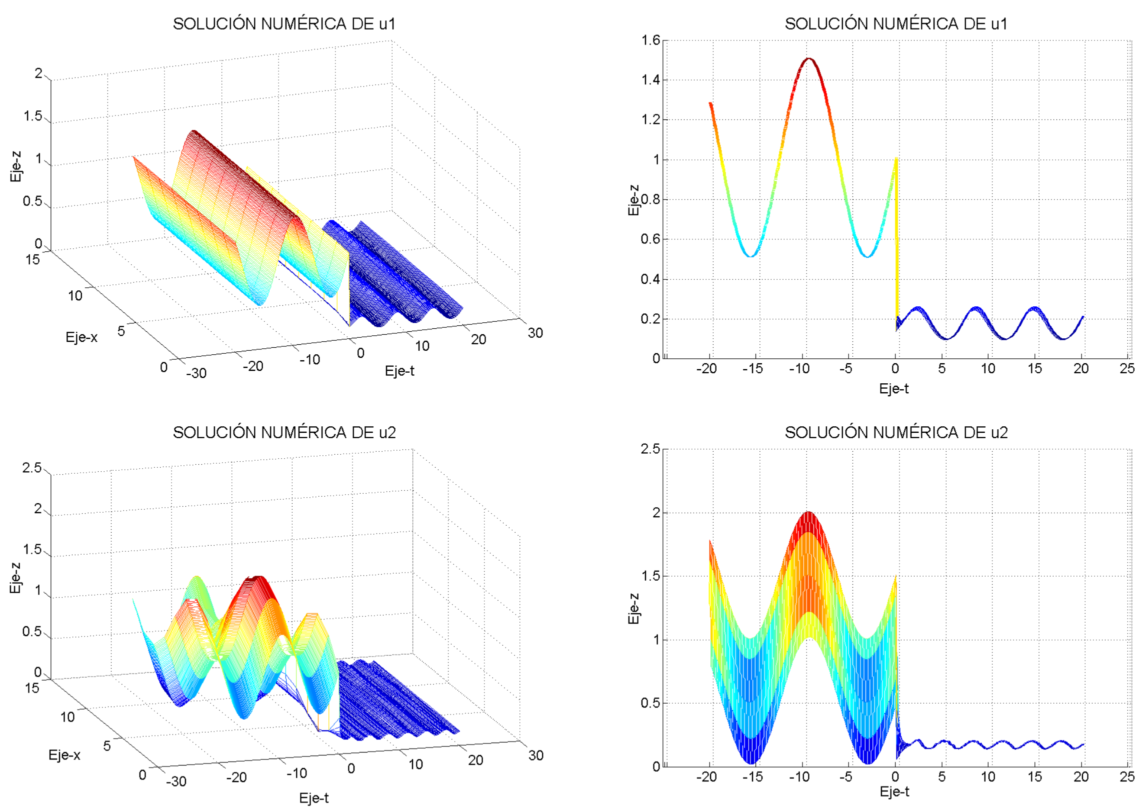


Figura §5. Simulación del ejemplo 3 para $T = 20$ (vista tridimensional y transversal).

Ejemplo 4.

En nuestro cuarto ejemplo únicamente cambiaremos las funciones iniciales del ejemplo 3 por las funciones

$$
\begin{aligned}
u_1(t,x) &= sen(x) + 1.01, & t \leq 0, \quad x \in [0,12], \\
u_2(t,x) &= \frac{1}{200}(1+t^2)sen(\frac{\pi x}{12}) + 0.01, & t \leq 0, \quad x \in [0,12].
\end{aligned}
$$

Recordemos que el atractor global para u_1 y u_2 esta dado por $[0.002245, 0.299884]$ y $[0.011192, 0.285680]$ respectivamente.

Así la simulación numérica a este sistema da como respuesta las siguientes gráficas.

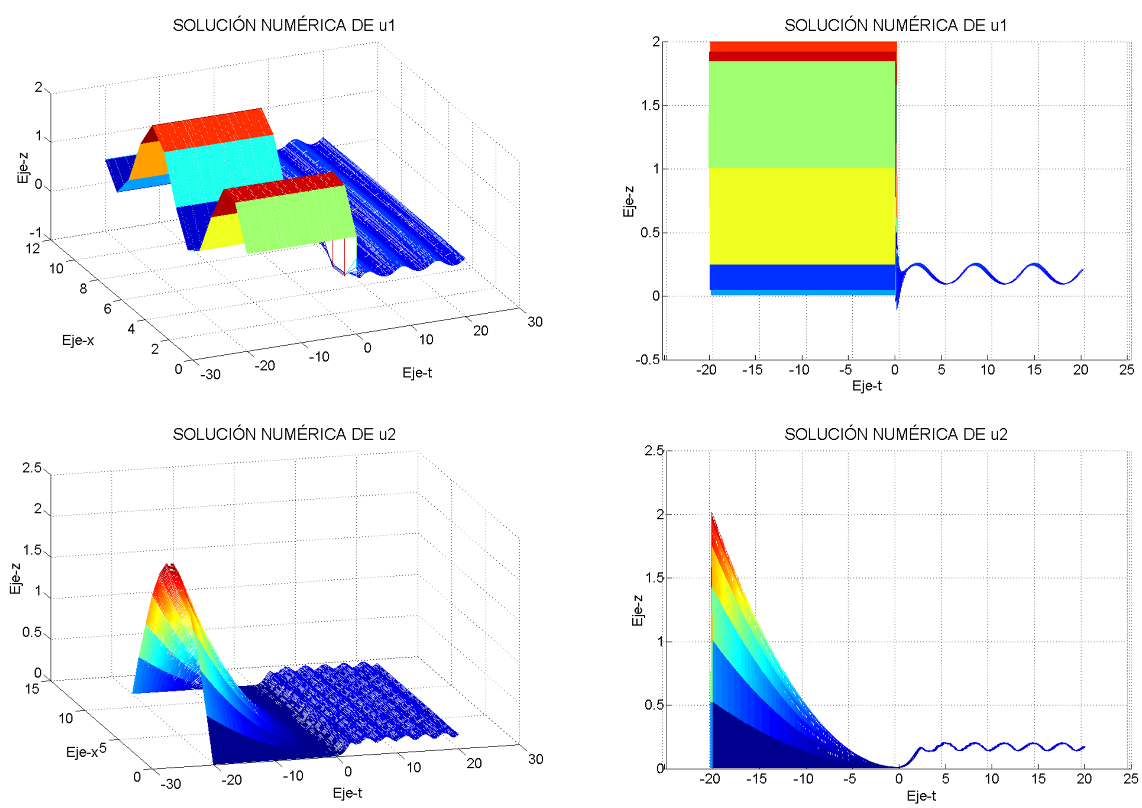


Figura §6. Simulación del ejemplo 4 para $T = 20$ (vista tridimensional y transversal).