

# La equivalencia entre homología singular y simplicial

Homología y cohomología

18 de Mayo del 2026

Recordemos la definición de  $\Delta$ -complejo.

**Definición 1.** *Un  $\Delta$ -complejo es un espacio de la forma*

$$X = \coprod_{n \geq 0} \coprod_{\alpha \in J_n} \Delta_\alpha^n / \sim,$$

*con la topología cociente, donde cada cara de  $\Delta_\alpha^n$  está identificada con un único  $\Delta_\beta^{n-1}$  a través de un homeomorfismo lineal ordenado y todas las identificaciones son consecuencias de estas.*

Las dos siguientes definiciones son análogas a las que se tienen para CW-complejos.

**Definición 2.** *Sea  $X$  un  $\Delta$ -complejo y  $A$  un subespacio de  $X$ . Se dice que  $A$  es un subcomplejo de  $X$  si es la unión de un subconjunto de los símlices que forman la  $\Delta$ -estructura de  $X$ . En este caso, también se dice que  $(X, A)$  es un  $\Delta$ -par.*

Notemos que en particular,  $A$  también es un  $\Delta$ -complejo. Además, todo  $\Delta$ -complejo tiene una estructura de CW-complejo pues  $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong (D^n, \partial D^n)$  y los  $n$ -símlices se pegan a  $(n-1)$ -símlices por medio de funciones lineales a trozos en sus bordes, que son continuas. Con estas estructuras,  $A$  sería un subcomplejo de  $X$  como CW-complejo.

**Definición 3.** *Dado un  $\Delta$ -complejo  $X$  y  $k \geq 0$ , su  $k$ -esqueleto  $X^{(k)}$  es el subcomplejo de  $X$  formado por todos los símlices de  $X$  de dimensión menor o igual a  $k$ .*

Sea  $(X, A)$  un  $\Delta$ -par. Como los símplices de  $A$  son símplices de  $X$ , podemos ver a  $C_n^\Delta(A)$  como un subgrupo de  $C_n^\Delta(X)$ . Y la inclusión  $C_n^\Delta(A) \rightarrow C_n^\Delta(X)$  conmuta con las diferenciales, es decir, la inclusión es un homomorfismo de complejos, al igual que se tiene en homología singular para subespacios. Definimos entonces

$$C_n^\Delta(X, A) = C_n^\Delta(X)/C_n^\Delta(A),$$

con el convenio de que  $C_n^\Delta(\emptyset) = 0$  para todo  $n$ . Y la diferencial  $\partial_n: C_n^\Delta(X) \rightarrow C_{n-1}^\Delta(X)$  induce una diferencial

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_n: C_n^\Delta(X, A) &\rightarrow C_{n-1}^\Delta(X, A), \\ z + C_n^\Delta(A) &\mapsto \partial_n(z) + C_{n-1}^\Delta(A), \end{aligned}$$

la cual está bien definida pues  $\partial_n(C_n^\Delta(A)) \subseteq C_{n-1}^\Delta(A)$  y cumple  $\bar{\partial}_n \circ \bar{\partial}_{n+1} = 0$  pues ya se cumplía que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ . Es decir, hemos definido un complejo cuyos grupos de homología denotaremos por  $H_n^\Delta(X, A)$ .

Ahora queremos relacionar estos grupos con los de homología singular. Sea  $\Delta_\alpha^n$  uno de los  $n$ -símplices de la  $\Delta$ -estructura de  $X$ . Consideremos la función característica  $i_\alpha: \Delta^n \rightarrow X$  cuya imagen es  $\Delta_\alpha^n$ . Esto nos proporciona una manera de obtener un  $n$ -símplex singular a partir de uno simplicial, y por lo tanto podemos definir

$$\begin{aligned} \Phi: C_n^\Delta(X, A) &\rightarrow C_n(X, A), \\ \Delta_\alpha^n + C_n^\Delta(A) &\mapsto i_\alpha + C_n(A), \end{aligned}$$

el cual es un homomorfismo de complejos.

Notemos que las funciones  $\Phi$  hacen los siguientes cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n^\Delta(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_n^\Delta(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_n^\Delta(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \\ 0 & \longrightarrow & C_n(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_n(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_n(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

y las filas de este diagrama son exactas. Por esto último, cada fila induce una sucesión exacta larga de grupos de homología. Y por la naturalidad, las funciones inducidas  $\Phi_*$  en homología hacen conmutar todos los cuadrados en

el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_n^\Delta(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n^\Delta(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n^\Delta(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}^\Delta(A) & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow \Phi_* & & \downarrow \Phi_* & & \downarrow \Phi_* & & \downarrow \Phi_* & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Para que tenga más sentido el próximo lema, notemos que

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong \tilde{H}_n(\Delta^n/\partial\Delta^n) \cong \tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}.$$

En el siguiente lema encontraremos un generador de este grupo que está en la imagen de  $\Phi$ .

**Lema 4.** *La clase de  $1_{\Delta^n}$  es un generador de  $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ .*

*Demostración:* Es claro que la clase de  $1_{\Delta^n}$  es un ciclo en  $C_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$  pues las imágenes de cada una de sus caras están en  $\partial\Delta^n$ .

Para  $n = 0$ , la clase de  $1_{\Delta^0}$  es la clase del único punto que hay en  $\Delta^0$  en  $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0) = H_0(\Delta^0)$ , que ya vimos que es un generador.

Sea  $n \geq 1$  y supongamos por inducción que se cumple para  $n - 1$ . Sea  $\Lambda \subseteq \Delta^n$  la unión de todas las caras de dimensión  $n - 1$  de  $\Delta^n$  excepto por la cara 0. Es decir

$$\Lambda = \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n \mid x_j = 0 \text{ para algún } j \geq 1 \text{ y } x_0 \neq 0\}.$$

Se tiene que  $(\Delta^n, \Lambda) \simeq (\Lambda, \Lambda)$  a través de la inclusión  $j: (\Lambda, \Lambda) \rightarrow (\Delta^n, \Lambda)$  y la función  $g: (\Delta^n, \Lambda) \rightarrow (\Lambda, \Lambda)$  dada por

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_0 + n\alpha, x_1 - \alpha, \dots, x_n - \alpha),$$

donde  $\alpha$  es el mínimo de los  $x_j$  con  $j \geq 1$ . Es fácil comprobar que  $g$  está bien definida y es continua, que  $gj$  es la identidad y que  $fg$  es homótopa a la identidad como función de pares. Por lo tanto  $H_m(\Delta^n, \Lambda) \cong H_m(\Lambda, \Lambda) = 0$  para todo  $m$ . Por la sucesión exacta larga de la terna  $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$ , se tiene

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda),$$

donde el isomorfismo viene dado por el morfismo de conexión  $\partial$ . Este isomorfismo manda  $1_{\Delta^n}$  a  $\partial 1_{\Delta^n}$ . Ahora sea  $k: \Delta^{n-1} \rightarrow \partial\Delta^n$  la inclusión de la cara 0. Esta inclusión envía  $\partial\Delta^{n-1}$  a  $\Lambda$  e induce un homeomorfismo

$$\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \rightarrow \partial\Delta^n/\Lambda,$$

luego induce un isomorfismo  $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$ , al ser ambos CW-pares. Este isomorfismo manda la clase de  $1_{\Delta^{n-1}}$ , que es un generador por la hipótesis inductiva, a la clase de  $k$ . Pero la clase de  $k$  es igual a la clase de  $\partial 1_{\Delta^n}$  pues su diferencia está en  $\Lambda$ . Por lo tanto  $\partial 1_{\Delta^n}$  es un generador y en consecuencia  $1_{\Delta^n}$  es un generador.  $\square$

**Lema 5.** *Sea  $X$  un  $\Delta$ -complejo. Entonces  $\Phi_*: H_m^\Delta(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \rightarrow H_m(X^{(k)}, X^{(k-1)})$  es un isomorfismo para todo  $m$  y para todo  $k$ .*

*Demostración:* Como  $X^{(k)}$  sólo contiene símplices de dimensión menor o igual a  $k$ , se tiene  $C_m^\Delta(X^{(k)}) = 0$  si  $m > k$ . Y todo símplice de dimensión estrictamente menor que  $k$  está en  $X^{(k-1)}$ , por lo tanto

$$C_m^\Delta(X^{(k)}, X^{(k-1)}) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq k, \\ \mathbb{Z}J_k, & \text{si } m = k. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$H_m^\Delta(X^{(k)}, X^{(k-1)}) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq k, \\ \mathbb{Z}J_k, & \text{si } m = k. \end{cases}$$

Ahora notemos que

$$H_m^\Delta \left( \coprod_{\alpha \in J_k} \Delta_\alpha^k, \coprod_{\alpha \in J_k} \partial\Delta_\alpha^k \right) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq k, \\ \mathbb{Z}J_k, & \text{si } m = k, \end{cases}$$

con las estructuras obvias de  $\Delta$ -complejos. Y la función de pares

$$f: \left( \coprod_{\alpha \in J_k} \Delta_\alpha^k, \coprod_{\alpha \in J_k} \partial\Delta_\alpha^k \right) \rightarrow (X^{(k)}, X^{(k-1)})$$

inducida por las inclusiones de los  $k$ -símplices  $i_\alpha: \Delta_\alpha^k \rightarrow X$  induce un isomorfismo en homología simplicial, pues envía generadores a generadores. Por otra parte,

$$\begin{aligned} H_m(X^{(k)}, X^{(k-1)}) &\cong \tilde{H}_m \left( \frac{X^{(k)}}{X^{(k-1)}} \right) \\ &\cong \tilde{H}_m \left( \frac{\coprod_{\alpha \in J_k} \Delta_\alpha^k}{\coprod_{\alpha \in J_k} \partial\Delta_\alpha^k} \right) \\ &\cong H_m \left( \coprod_{\alpha \in J_k} \Delta_\alpha^k, \coprod_{\alpha \in J_k} \partial\Delta_\alpha^k \right). \end{aligned}$$

El primer isomorfismo se tiene porque  $X^{(k)}$  es un CW-complejo y  $X^{(k-1)}$  un subcomplejo, por lo que  $(X^{(k)}, X^{(k-1)})$  satisface la propiedad de extensión de homotopías. El tercer isomorfismo es por la misma razón para el par  $(\coprod_{\alpha \in J_k} \Delta_\alpha^k, \coprod_{\alpha \in J_k} \partial \Delta_\alpha^k)$ . El segundo isomorfismo viene del homeomorfismo

$$\frac{X^{(k)}}{X^{(k-1)}} \cong \frac{\coprod_{\alpha \in J_k} \Delta_\alpha^k}{\coprod_{\alpha \in J_k} \partial \Delta_\alpha^k}.$$

Notemos que el isomorfismo resultante visto de derecha a izquierda envía la clase de un  $m$ -simplex singular  $\sigma: \Delta^m \rightarrow \Delta_\alpha^k$  a  $i_\alpha \circ \sigma$ .

También sabemos que

$$H_m \left( \coprod_{\alpha \in J_k} \Delta_\alpha^k, \coprod_{\alpha \in J_k} \partial \Delta_\alpha^k \right) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq k, \\ \mathbb{Z}J_k, & \text{si } m = k, \end{cases}$$

pues  $\Delta_\alpha^k / \partial \Delta_\alpha^k \cong S^k$ . Y por el lema anterior, los generadores de  $H_k$  vienen dados por las identidades  $1_{\Delta_\alpha^k}$ . Por lo tanto,

$$H_m(X^{(k)}, X^{(k-1)}) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq k, \\ \mathbb{Z}J_k, & \text{si } m = k, \end{cases}$$

y los generadores de  $H_k$  vienen dados por las inclusiones  $i_\alpha$ .

Por lo tanto, la función  $\Phi_*: H_k^\Delta(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \rightarrow H_k(X^{(k)}, X^{(k-1)})$  es un isomorfismo pues envía los generadores  $\Delta_\alpha^k$  a los generadores  $i_\alpha$ . Y  $\Phi_*$  es un isomorfismo si  $m \neq k$ , pues en ese caso ambos son cero.  $\square$

**Teorema 6.** *El homomorfismo  $\Phi_*$  es un isomorfismo para todo  $n$  y para todo  $\Delta$ -par  $(X, A)$ .*

*Demostración:* Lo probamos primero en el caso en que  $X$  tiene dimensión finita y  $A = \emptyset$  por inducción sobre la dimensión de  $X$ . Si  $X$  tiene dimensión 0, el resultado es obvio.

Supongamos que el resultado es cierto para  $\Delta$ -complejos de dimensión menor que  $k$ . Y sea  $X$  un  $\Delta$ -complejo de dimensión  $k$ , es decir,  $X = X^{(k)}$ .

Entonces consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
H_{n+1}^\Delta(X^{(k)}, X^{(k-1)}) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_{n+1}^\Delta(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
H_n^\Delta(X^{(k-1)}) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_n(X^{(k-1)}) \\
\downarrow i_* & & \downarrow i_* \\
H_n^\Delta(X^{(k)}) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_n(X^{(k)}) \\
\downarrow j_* & & \downarrow j_* \\
H_n^\Delta(X^{(k)}, X^{(k-1)}) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_n(X^{(k)}, X^{(k-1)}) \\
\downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
H_{n-1}^\Delta(X^{(k-1)}) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_{n-1}(X^{(k-1)})
\end{array}$$

Por la hipótesis inductiva, la segunda y la quinta función horizontal son isomorfismos. Por el lema anterior, la primera y la cuarta función horizontal son isomorfismos. Por el lema de los cinco, la tercera función horizontal es un isomorfismo como queríamos probar.

Veamos ahora el caso en que  $X$  tiene dimensión finita y  $A = \emptyset$ . Consideremos  $\Phi_*: H_n^\Delta(X) \rightarrow H_n(X)$  y sea  $z + \text{Im } \partial_{n+1} \in H_n(X)$ . Por el mismo argumento que para CW-complejos, este elemento  $z + \text{Im } \partial_{n+1}$  proviene de  $z' + \text{Im } \partial_{n+1} \in H_n(X^{(k)})$  para algún  $k$ . El siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
H_n^\Delta(X^{(k)}) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_n(X^{(k)}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_n^\Delta(X) & \xrightarrow{\Phi_*} & H_n(X)
\end{array}$$

en el que las flechas verticales son las inducidas por la inclusión  $X^{(k)} \rightarrow X$ , es conmutativo por la manera en que se definió  $\Phi_*$ . El  $\Phi_*$  de arriba es un isomorfismo por la parte anterior, lo que nos da una cadena simplicial  $w' + \text{Im } \delta_{n+1} \in H_n^\Delta(X^{(k)})$  con  $\Phi_*(w' + \text{Im } \delta_{n+1}) = z' + \text{Im } \partial_{n+1}$ . La imagen  $w + \text{Im } \delta_{n+1} \in H_n^\Delta(X)$  tiene que cumplir  $\Phi_*(w + \text{Im } \delta_{n+1}) = z + \text{Im } \partial_{n+1}$  por la conmutatividad del diagrama. Esto prueba que  $\Phi_*$  es sobreyectiva.

Sea  $w + \text{Im } \delta_{n+1} \in H_n^\Delta(X)$  tal que  $\Phi_*(w + \text{Im } \delta_{n+1}) = \text{Im } \partial_{n+1}$ . Esto quiere decir que  $\Phi(w) = \partial_{n+1}b$  para alguna cadena singular  $b$  en  $C_{n+1}(X)$ .

De nuevo, este  $b$  y  $w$  tienen que provenir de algún  $b'$  y  $w'$  en  $X^{(k)}$  para cierto  $k$ , por lo que  $\Phi(w') = \partial_{n+1}b'$ . Esta es una igualdad en  $X^{(k)}$  de cadenas singulares. Es decir,  $\Phi_*(w' + \text{Im } \partial_{n+1}) = \text{Im } \partial_{n+1}$  en  $X^{(k)}$ . Por la parte anterior, esta  $\Phi_*$  es un isomorfismo, luego  $w' + \text{Im } \partial_{n+1} = \text{Im } \partial_{n+1}$  y por lo tanto  $w + \text{Im } \partial_{n+1} = \text{Im } \partial_{n+1}$ .

Por último, el caso general se deduce del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_n^\Delta(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n^\Delta(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n^\Delta(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}^\Delta(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}^\Delta(X) \\
\downarrow \Phi_* & & \downarrow \Phi_* & & \downarrow \Phi_* & & \downarrow \Phi_* & & \downarrow \Phi_* \\
H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(X)
\end{array}$$

los casos anteriores y el lema de los cinco. □

Como corolario, obtenemos los siguientes resultados análogos a los que se tenían para CW-complejos y que se probarían exactamente de la misma manera.

**Corolario 7.** *Sea  $X$  un  $\Delta$ -complejo.*

1. *Los grupos de homología simplicial de  $X$  no dependen de la estructura de  $\Delta$ -complejo de  $X$ .*
2. *Si  $X$  no tiene símplices de dimensión  $k$ , entonces  $H_k(X) = 0$ .*
3. *Si  $X$  tiene  $m$  símplices de dimensión  $k$ , entonces  $H_k(X)$  se puede generar con un número de elementos menor o igual a  $m$ .*
4. *Si  $X$  tiene un número finito total de símplices, entonces se tiene*

$$\sum_k (-1)^k |J_k| = \sum_k (-1)^k \text{rk } H_k(X),$$

*y en particular este número  $\chi(X)$  es un invariante homotópico y no depende de la estructura de  $\Delta$ -complejo de  $X$ .*