

# La demostración de escisión

José Cantarero

La idea de escisión es subdividir los símplexes singulares hasta que quepan dentro de alguno de los abiertos de nuestra descomposición. Aunque el proceso es bastante intuitivo, la dificultad radica en definir un operador que realice esta subdivisión y que siga siendo un morfismo entre complejos de cadena. Para conseguir esto, se requiere subdividir a tres niveles diferentes, a nivel de símplexes, de cadenas lineales, y finalmente, de cadenas singulares.

**Definición 1.** *El baricentro de un  $n$ -símplex  $[v_0, \dots, v_n]$  es el punto*

$$b_{[v_0, \dots, v_n]} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} v_i.$$

**Definición 2.** *La subdivisión baricéntrica de  $[v_0, \dots, v_n]$  está dada por la siguiente descomposición inductiva*

$$[v_0] = [v_0], [v_0, \dots, v_n] = \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{[w_0, \dots, w_{n-1}]} [b_{[v_0, \dots, v_n]}, w_0, \dots, w_{n-1}],$$

donde en la segunda unión  $[w_0, \dots, w_{n-1}]$  es un  $(n-1)$ -símplex en la subdivisión baricéntrica de  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ .

**Ejemplo 3.** El baricentro de  $[v_0, v_1]$  es  $b = \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_1$ , es decir, el punto medio del segmento. La subdivisión baricéntrica de  $[v_0, v_1]$  es entonces

$$[v_0, v_1] = [b, v_1] \cup [b, v_0].$$

**Ejemplo 4.** El baricentro de  $[v_0, v_1, v_2]$  es  $b = \frac{1}{3}v_0 + \frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2$ , que corresponde a lo que clásicamente se conoce como el baricentro de un triángulo. Para la descomposición baricéntrica también tenemos que considerar los baricentros de cada una de sus caras, digamos que  $b_i$  es el baricentro de la cara  $i$ . Entonces la descomposición baricéntrica es

$$[v_0, v_1, v_2] = [b, b_2, v_0] \cup [b, b_2, v_1] \cup [b, b_1, v_0] \cup [b, b_1, v_2] \cup [b, b_0, v_1] \cup [b, b_0, v_2].$$

Notemos que esto corresponde a trazar líneas desde el baricentro hacia los vértices y hacia los puntos medios de cada arista y así nos queda dividido el triángulo original en seis triángulos.

Lo bueno de subdividir de esta manera es que las piezas son más pequeñas y se puede cuantificar qué tan más pequeñas, como vamos a ver ahora.

**Definición 5.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico, se define su diámetro como

$$\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

**Lema 6.** Si  $X$  es compacto, su diámetro es el máximo de las distancias entre los puntos de  $X$ .

*Demostración:* Como  $X \times X$  es compacto,  $d(X \times X)$  es un compacto de  $\mathbb{R}$  y por lo tanto es cerrado y acotado.  $\square$

**Lema 7.** El diámetro de  $[v_0, \dots, v_n]$  es el máximo de las distancias entre los  $v_i$ .

*Demostración:* Por el lema anterior, el diámetro es  $d(v, w)$  para ciertos  $v, w$ . Ahora  $w = \sum t_i v_i$  donde  $\sum t_i = 1$  y entonces

$$\begin{aligned} \|v - w\| &= \left\| v - \sum t_i v_i \right\| \\ &= \left\| \sum t_i v - \sum t_i v_i \right\| \\ &= \left\| \sum t_i (v - v_i) \right\| \\ &\leq \sum t_i \|v - v_i\| \\ &\leq \sum t_i \max \|v - v_i\| \\ &= \max \|v - v_i\|. \end{aligned}$$

Repitiendo el mismo argumento con  $v$ , nos da que esta cantidad es menor o igual que el máximo de las distancias entre los  $v_i$ .  $\square$

**Lema 8.** Si  $T$  es uno de los  $n$ -símplices que aparece en la descomposición baricéntrica de  $[v_0, \dots, v_n]$ , se tiene

$$\text{diam}(T) \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}([v_0, \dots, v_n]).$$

*Demostración:* Por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$  es obvio. Supongamos que es cierto para  $n - 1$  y sea  $[b_{[v_0, \dots, v_n]}, w_0, \dots, w_{n-1}]$  un  $n$ -símplex de la subdivisión baricéntrica de  $[v_0, \dots, v_n]$ . Por la hipótesis de inducción y como  $(n - 1)/n \leq n/(n + 1)$ , se tiene

$$d(w_j, w_k) \leq \frac{n-1}{n} \text{diam}([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]) \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}([v_0, \dots, v_n]).$$

Y además

$$\begin{aligned} d(b_{[v_0, \dots, v_n]}, w_k) &\leq d(b_{[v_0, \dots, v_n]}, v_i) \quad \text{para cierto } i \\ &= d\left(\frac{1}{n+1}v_i + \frac{n}{n+1}b_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}, v_i\right) \\ &= \left\| v_i - \frac{1}{n+1}v_i - \frac{n}{n+1}b_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \right\| \\ &= \left\| \frac{n}{n+1}v_i - \frac{n}{n+1}b_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \right\| \\ &= \frac{n}{n+1}d(v_i, b_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}) \\ &\leq \frac{n}{n+1} \text{diam}([v_0, \dots, v_n]). \quad \square \end{aligned}$$

Ahora vamos a subdividir cadenas lineales. Sea  $Y = \Delta^m$  y usemos la siguiente notación. Dados  $w_0, \dots, w_n \in Y$ , definimos el  $n$ -símplex lineal generado por  $w_0, \dots, w_n$  como la función

$$\begin{aligned} [w_0, \dots, w_n]: \Delta^n &\rightarrow Y, \\ \sum t_i v_i &\mapsto \sum t_i w_i. \end{aligned}$$

**Definición 9.** *El complejo de cadenas lineales en  $Y$  es el subcomplejo de  $C_n(Y)$  dado por*

$$LC_n(Y) = \left\{ \sum_{i=1}^m n_i \sigma_i \in C_n(Y) \mid \sigma_i = [w_0, \dots, w_n] \text{ para ciertos } w_k \in Y \right\}.$$

Esta definición tiene sentido, pues el borde de un  $n$ -símplex lineal vuelve a ser un  $n$ -símplex lineal, así que tenemos un complejo bien definido. Dado  $b \in Y$ , podemos definir

$$\begin{aligned} b: LC_n(Y) &\rightarrow LC_{n+1}(Y), \\ [w_0, \dots, w_n] &\mapsto [b, w_0, \dots, w_n]. \end{aligned}$$

Este homomorfismo es una homotopía entre la identidad y la función cero, como mostramos en el siguiente lema.

**Lema 10.** *Se cumple  $\partial b + b\partial = 1_{LC_n(Y)}$ .*

*Demostración:* Es simplemente el cálculo

$$\begin{aligned}\partial b[w_0, \dots, w_n] &= \partial[b, w_0, \dots, w_n] \\ &= [w_0, \dots, w_n] - \sum_{i=0}^n [b, w_0, \dots, \hat{w}_i, \dots, w_n] \\ &= [w_0, \dots, w_n] - b\partial[w_0, \dots, w_n].\end{aligned}\quad \square$$

**Ejemplo 11.** Para ilustrar la demostración anterior, veamos en detalle el caso  $n = 1$ .

$$\begin{aligned}\partial b([w_0, w_1]) &= \partial([b, w_0, w_1]) = [w_0, w_1] - [b, w_1] + [b, w_0], \\ b\partial([w_0, w_1]) &= b([w_1] - [w_0]) = [b, w_1] - [b, w_0],\end{aligned}$$

Usamos este operador  $b$  para definir el operador de subdivisión lineal inductivamente

$$\begin{aligned}S: LC_n(Y) &\rightarrow LC_n(Y), \\ [w_0] &\mapsto [w_0], \\ [w_0, \dots, w_n] &\mapsto b_{[w_0, \dots, w_n]}S(\partial[w_0, \dots, w_n]),\end{aligned}$$

y el operador auxiliar de manera similar

$$\begin{aligned}T: LC_n(Y) &\rightarrow LC_{n+1}(Y), \\ [w_0] &\mapsto [w_0, w_0], \\ [w_0, \dots, w_n] &\mapsto b_{[w_0, \dots, w_n]}([w_0, \dots, w_n] - T(\partial[w_0, \dots, w_n])).\end{aligned}$$

**Ejemplo 12.** Por ejemplo, en el caso  $n = 1$  esto corresponde a

$$S([w_0, w_1]) = b_{[w_0, w_1]}S([w_1] - [w_0]) = [b_{[w_0, w_1]}, w_1] - [b_{[w_0, w_1]}, w_0]$$

y

$$\begin{aligned}T([w_0, w_1]) &= b_{[w_0, w_1]}([w_0, w_1]) - T([w_1] - [w_0]) \\ &= [b_{[w_0, w_1]}, w_0, w_1] - [b_{[w_0, w_1]}, w_1, w_1] + [b_{[w_0, w_1]}, w_0, w_0].\end{aligned}$$

**Lema 13.** *El operador  $S$  es un homomorfismo de complejos y se tiene  $\partial T + T\partial = 1_{LC_n(Y)} - S$ .*

*Demostración:* Veamos primero que  $S$  es un homomorfismo de complejos por inducción sobre  $n$ . El resultado es obvio para  $n = 0$ . Si  $n > 0$ , entonces

$$\begin{aligned}\partial S\sigma &= \partial b_\sigma S\partial\sigma \\ &= S\partial\sigma - b_\sigma\partial S\partial\sigma \\ &= S\partial\sigma - b_\sigma S\partial\partial\sigma \\ &= S\partial\sigma,\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se tiene por el paso inductivo. Ahora comprobemos la igualdad deseada para  $T$  de nuevo por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$  se tiene

$$\partial T[w_0] + T\partial[w_0] = \partial T[w_0] = \partial[w_0, w_0] = 0 = [w_0] - S[w_0].$$

Ahora si  $n > 0$ , entonces

$$\begin{aligned}\partial T\sigma &= \partial(b_\sigma(\sigma - T\partial\sigma)) \\ &= \sigma - T\partial\sigma - b_\sigma\partial(\sigma - T\partial\sigma) \\ &= \sigma - T\partial\sigma - b_\sigma\partial(S\sigma + \partial T\sigma) \\ &= \sigma - T\partial\sigma - b_\sigma S\partial\sigma \\ &= \sigma - T\partial\sigma - S\sigma,\end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se tiene por el paso inductivo. □

Ahora estamos listos para definir subdivisión en cadenas singulares. Notemos que si  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  es un  $n$ -símplex singular de  $X$ , este induce un homomorfismo

$$\begin{aligned}\sigma_\# : C_n(\Delta^n) &\rightarrow C_n(X), \\ \alpha &\mapsto \sigma \circ \alpha,\end{aligned}$$

que cumple  $\sigma_\#(1_{\Delta^n}) = \sigma$ . Pero además  $1_{\Delta^n}$  es un elemento de  $LC_n(\Delta^n)$ . Teniendo esto en cuenta definimos el operador de subdivisión

$$\begin{aligned}\text{Sd} : C_n(X) &\rightarrow C_n(X), \\ \sigma &\mapsto \sigma_\#(S(1_{\Delta^n})).\end{aligned}$$

Es un morfismo de complejos, pues

$$\begin{aligned}
\partial \text{Sd}(\sigma) &= \partial \sigma_{\#}(S(1_{\Delta^n})) \\
&= \sigma_{\#} \partial S(1_{\Delta^n}) \\
&= \sigma_{\#} S(\partial 1_{\Delta^n}) \\
&= \sigma_{\#} S \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i \right) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{\#} S(d_i) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Sd} \sigma_{\#} d_i \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{Sd} \sigma_{|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \\
&= \text{Sd} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{|[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \right) \\
&= \text{Sd} \partial \sigma.
\end{aligned}$$

Definimos el operador auxiliar de manera similar

$$\begin{aligned}
A: C_n(X) &\rightarrow C_{n+1}(X), \\
\sigma &\mapsto \sigma_{\#} T(1_{\Delta^n}),
\end{aligned}$$

y notemos que se cumple

$$\begin{aligned}
\partial A\sigma &= \partial \sigma_{\#} T(1_{\Delta^n}) \\
&= \sigma_{\#} \partial T(1_{\Delta^n}) \\
&= \sigma_{\#} (1_{\Delta^n} - S(1_{\Delta^n}) - T\partial(1_{\Delta^n})) \\
&= \sigma - \text{Sd}(\sigma) - \sigma_{\#} T\partial(1_{\Delta^n}) \\
&= \sigma - \text{Sd}(\sigma) - A\partial\sigma.
\end{aligned}$$

Finalmente definimos el operador de homotopía

$$\begin{aligned}
D_m: C_n(X) &\rightarrow C_{n+1}(X), \\
D_m &= \sum_{i=0}^{m-1} A \text{Sd}^i.
\end{aligned}$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\partial D_m + D_m \partial &= \sum_{i=0}^{m-1} (\partial A \text{Sd}^i + A \text{Sd}^i \partial) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (\partial A \text{Sd}^i + A \partial \text{Sd}^i) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (1_{C_n(X)} - \text{Sd}) \text{Sd}^i \\
&= 1_{C_n(X)} - \text{Sd}^m.
\end{aligned}$$

Ahora consideremos un espacio topológico  $X$  y sea  $\mathcal{U}$  un conjunto de subconjuntos  $U_j$  de  $X$  tal que

$$X = \bigcup_{U_j \in \mathcal{U}} \overset{\circ}{U}_j,$$

y definimos

$$C_n^{\mathcal{U}}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m n_i \sigma_i \in C_n(X) \mid \text{Im}(\sigma_i) \subseteq U_j \text{ para algún } U_j \in \mathcal{U} \right\},$$

el cual es un subcomplejo de  $C_n(X)$ . Denotamos los grupos de homología de este complejo por  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ .

**Lema 14.** *Para cada  $\alpha \in C_n(X)$ , existe un entero no negativo  $r_\alpha$  tal que si  $m \geq r_\alpha$ , entonces  $\text{Sd}^m \alpha \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ . Además se cumple  $\text{Sd}(C_n^{\mathcal{U}}(X)) \subseteq C_n^{\mathcal{U}}(X)$ ,  $A(C_n^{\mathcal{U}}(X)) \subseteq C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$  y  $D_m(C_n^{\mathcal{U}}(X)) \subseteq C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X)$ .*

*Demostración:* Sea  $\alpha = \sum n_i \sigma_i$ , donde  $\sigma_i: \Delta^n \rightarrow X$ . Se tiene

$$\Delta^n = \bigcup_{U_j \in \mathcal{U}} \sigma_i^{-1}(\overset{\circ}{U}_j),$$

y como  $\Delta^n$  es compacto, tiene que estar contenido en una subcubierta finita. Por el lema del número de Lebesgue, existe  $\varepsilon_i > 0$  tal que si  $\text{diam}(A) < \varepsilon_i$ , entonces  $A \subseteq \sigma_i^{-1}(\overset{\circ}{U}_k)$  para algún  $U_k$ . Sea  $\varepsilon$  el mínimo de los  $\varepsilon_i$ . Existe un  $r_\alpha$  tal que

$$\left( \frac{n}{n+1} \right)^r \text{diam}(\Delta^n) < \varepsilon$$

si  $r \geq r_\alpha$ . Entonces todos los símplices de la subdivisión baricéntrica  $r$ -ésima de  $\Delta^n$  están contenidos en algún  $\sigma_i^{-1}(U_j)$  y por lo tanto la imagen de cada  $n$ -símplex de  $\text{Sd}^r \alpha$  está en algún  $U_j$ . Es decir,  $\text{Sd}^r \alpha$  está en  $C_n^u(X)$ . El resto del lema es claro.  $\square$

Notemos que podemos elegir  $r_\alpha = 0$  si  $\alpha$  ya estaba en  $C_n^u(X)$ . En la siguiente proposición, denotaremos por  $r_\alpha$  al mínimo de los enteros no negativos  $r$  tales que  $\text{Sd}^r \alpha$  está en  $C_n^u(X)$ .

**Proposición 15.** *La inclusión  $i: C_n^u(X) \rightarrow C_n(X)$  es una equivalencia homotópica y en particular induce un isomorfismo  $H_n^u(X) \rightarrow H_n(X)$ .*

*Demostración:* Consideremos el operador

$$\begin{aligned} \rho: C_n(X) &\rightarrow C_n^u(X), \\ \alpha &\mapsto \text{Sd}^{r_\alpha} \alpha + D_{r_\alpha}(\partial\alpha) - D_{r_{\partial\alpha}}(\partial\alpha). \end{aligned}$$

Entonces se tiene  $\rho \circ i = 1_{C_n^u(X)}$ . Ahora definimos

$$\begin{aligned} D: C_n(X) &\rightarrow C_{n+1}(X), \\ \alpha &\mapsto D_{r_\alpha} \alpha. \end{aligned}$$

Se cumple

$$\begin{aligned} (\partial D + D\partial)\alpha &= \partial D_{r_\alpha} \alpha + D_{r_{\partial\alpha}}(\partial\alpha) \\ &= \alpha - \text{Sd}^{r_\alpha} \alpha - D_{r_\alpha}(\partial\alpha) + D_{r_{\partial\alpha}}(\partial\alpha) \\ &= \alpha - i\rho(\alpha), \end{aligned}$$

luego  $i\rho \simeq 1_{C_n(X)}$  y esto prueba el resultado deseado.  $\square$

Esto implica el siguiente resultado que usamos en la demostración de la existencia de la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris.

**Corolario 16.** *Sean  $A, B \subseteq X$  tales que  $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ . Entonces la inclusión  $C_*(A + B) \rightarrow C_*(X)$  es una equivalencia homotópica.*

**Teorema 17** (Escisión). *Bajo la mismas condiciones del corolario anterior, la inclusión  $C_*(B, A \cup B) \rightarrow C_*(X, A)$  es una equivalencia homotópica. En particular, induce un isomorfismo  $H_n(B, A \cup B) \rightarrow H_n(X, A)$  para todo  $n$ .*

*Demostración:* La inclusión es la composición de las funciones inducidas por la inclusión:

$$\frac{C_n(B)}{C_n(A \cap B)} \rightarrow \frac{C_n(A + B)}{C_n(A)} \rightarrow \frac{C_n(X)}{C_n(A)}.$$

El primer homomorfismo es claramente un isomorfismo y el segundo es una equivalencia homotópica por el corolario anterior, así que la composición es una equivalencia homotópica.  $\square$

**Teorema 18** (Escisión). *Sean  $Z \subseteq A \subseteq X$  tales que  $\bar{Z} \subseteq A^\circ$ . Entonces el morfismo inducido por la inclusión  $C_*(X - Z, A - Z) \rightarrow C_*(X, A)$  es una equivalencia homotópica. En particular, este morfismo induce un isomorfismo  $H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A)$  para todo  $n$ .*

*Demostración:* Sea  $B = X - Z$ . Entonces  $X = \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$  y por el teorema anterior, el morfismo inducido por la inclusión

$$C_*(X - Z, A - Z) = C_*(B, A \cap B) \rightarrow C_*(X, A)$$

es una equivalencia homotópica.  $\square$