

EXAMEN

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA

Este examen tiene una página y contiene tres problemas.

1. (30 puntos) Sean $f, h: S^1 \rightarrow S^1 \times S^2$ dadas por $f(x, y) = (1, 0, x, y, 0)$ y $h(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy, x, y, 0)$. Calcula los grupos de homología de $(S^1 \times S^2) \cup_f D^2$ y $(S^1 \times S^2) \cup_h D^2$.
2. (30 puntos) Sea $X = S^2/\sim$, donde \sim identifica el polo norte con el polo sur. Calcula los grupos de homología de X y describe una función explícita $S^1 \rightarrow X$ que no sea nulhomótota.
3. Decide si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, con justificación completa.
 - (a) (10 puntos) La inclusión $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ no es nulhomótota.
 - (b) (10 puntos) Si X tiene un subespacio contráctil A tal que X/A es contráctil, entonces X es contráctil.
 - (c) (10 puntos) Si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo local en el punto x entre variedades topológicas, entonces $H_n(X, X - \{x\}) \cong H_n(Y, Y - \{f(x)\})$ para todo n .
 - (d) (10 puntos) Existe un Δ -complejo X de dimensión cuatro con $H_4^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}/6$.