EXAMEN DE PRÁCTICA

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA

Este examen tiene una página y contiene tres problemas.

1. (15 puntos) Sea $f\colon S^n \to S^n$ una función continua tal que $\|f(p) - p\| < 1$ para todo $p \in S^n$, donde $\| \quad \|$ denota la norma canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Demuestra que f es sobreyectiva.

2. Sea $T = S^1 \times S^1$ y X el espacio obtenido al adjuntarle una banda de Möbius M a T a traves de la identidad entre el borde de M y $S^1 \times \{1\}$.

(a) (30 puntos) Calcula los grupos de homología de X.

(b) (15 puntos) Demuestra que la inclusión $j\colon T \to X$ no es una equivalencia homotópica.

3. Decide si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, con justificación completa.

(a) (10 puntos) Si A es un retracto de X, entonces existe un isomorfismo $H_n(X) \cong H_n(X, A) \oplus H_n(A)$ para todo $n \geq 0$.

(b) (10 puntos) Si $n \geq 0$, entonces $X = S^n \cup D^n$ y $Y = S^n \vee S^n$ son homotópicamente equivalentes.

(c) (10 puntos) Sea $n \geq 2$. La función cociente $S^n \to \mathbb{R}P^n$ es nulhomótopa.

(d) (10 puntos) Sea $Y = \{(x, y) \in S^1 \mid x \geq -1/2\}$. Se tiene $H_1(S^1, Y) \cong \mathbb{Z}$.