SOLUCIONES AL EXAMEN DE PRÁCTICA

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA

1. (15 puntos) Sea $f\colon S^n \to S^n$ una función continua tal que $\|f(p) - p\| < 1$ para todo $p \in S^n$, donde $\|\quad\|$ denota la norma canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Demuestra que f es sobreyectiva.

Solución:

Notemos que $\|p - (-p)\| = \|2p\| = 2$, así que podemos deducir que $f(p) \neq -p$ para todo $p \in S^n$. Por lo tanto, la línea que va de p a $f(p)$ no pasa por el origen. Consideremos

$$
\begin{aligned}
H\colon S^n \times I &\to S^n, \\
(p,t) &\mapsto \frac{tp + (1-t)f(p)}{\|tp + (1-t)f(p).\|}
\end{aligned}
$$

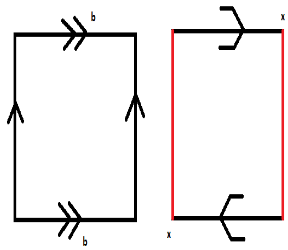
Por lo que comentamos arriba, el denominador no puede ser cero. Así que esta función está bien definida y es continua. Ahora $H_0 = f$ y $H_1 = 1_{S^n}$, luego el grado de f es 1. Entonces f tiene que ser sobreyectiva, porque una función no sobreyectiva tiene grado cero. $\square$

2. Sea $T = S^1 \times S^1$ y X el espacio obtenido al adjuntarle una banda de Möbius M a T a traves de la identidad entre el borde de M y $S^1 \times \{1\}$.

(a) (30 puntos) Calcula los grupos de homología de X.

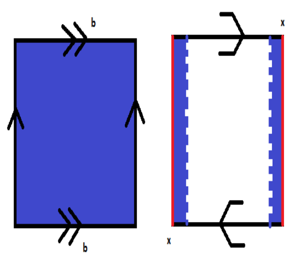
Solución:

El espacio X es la unión de los dos siguientes espacios (cuadrados rellenos ambos)

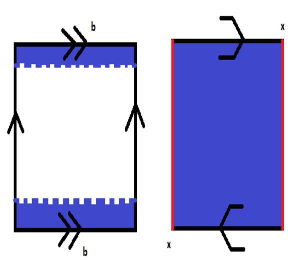


donde el círculo marcado con b corresponde a $S^1 \times \{1\}$ que se identifica con la parte marcada de rojo en la banda de Möbius partiendo de x (en la izquierda) y acabando en x (en la derecha). Para no confundir, no pegaremos estos dos espacios, pero supondremos en los dibujos que están pegados a través de esa identificación.

Sea A la unión de T con el abierto de M indicado en la figura siguiente por la parte coloreada de azul y los bordes negros y rojos que rodean la parte azul. Este subespacio A es abierto en X y la inclusión $T \subseteq A$ es una equivalencia homotópica.



Sea B la unión de M con el abierto de T indicado en la figura siguiente por la parte coloreada de azul y los bordes negros y rojos que rodean la parte azul. Este subespacio B es abierto en X y la inclusión $M \subseteq B$ es una equivalencia homotópica.



Notemos que $A \cup B = X$ y la inclusión $S^1 \times \{1\} \subseteq A \cap B$ es una equivalencia homotópica. Usemos la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris.

$$H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B).$$

Recordemos que $A \simeq M \simeq S^1$, luego $H_n(A) = 0$ si $n \geq 2$. Y sabemos que $H_n(B) \cong H_n(T) = 0$ si $n \geq 3$. Además $H_{n-1}(A \cap B) \cong H_{n-1}(S^1) = 0$ si $n \geq 3$. Por lo tanto $H_n(X) = 0$ si $n \geq 3$. El espacio X es arcoconexo, luego $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Consideremos ahora el trozo restante

$$H_2(A \cap B) \to H_2(A) \oplus H_2(B) \to H_2(X) \to H_1(A \cap B) \to H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(X) \to$$

$$\to H_0(A \cap B) \to H_0(A) \oplus H_0(B) \to H_0(X) \to 0,$$

el cual se convierte en

$$0 \to \mathbb{Z} \to H_2(X) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^2 \to H_1(X) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_0(X) \to 0.$$

Vamos a estudiar cuál es la función $H_1(A \cap B) \to H_1(A) \oplus H_1(B)$. La componente $H_1(A \cap B) \to H_1(A)$ está inducida por la inclusión de $A \cap B$ en A y la otra componente por la inclusión de $A \cap B$ en B, con signo negativo. Por el isomorfismo natural entre H_1 y la abelianización del grupo fundamental, podemos ver qué se induce en los grupos fundamentales.

Consideremos el diagrama conmutativo de inclusiones

$$\begin{tikzcd} S^1 \times \{1\} \arrow[r] \arrow[d] & S^1 \times S^1 \arrow[d] \\ A \cap B \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

en el que las inclusiones verticales son equivalencias homotópicas. Como la flecha horizontal superior induce en el grupo fundamental la función $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2$ que envía n a $(n, 0)$, la inferior hace lo mismo.

El mismo argumento con la inclusión de $A \cap B$ en B nos dice que tenemos que mirar la inclusión de S^1 en el borde de la banda de Möbius, que ya sabemos que inducía la función $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que multiplica por 2. Por lo tanto, la función $H_1(A \cap B) \to H_1(A) \oplus H_1(B)$ corresponde a la función

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}^3, \\ n &\mapsto (n, 0, -2n). \end{aligned}$$

Este homomorfismo es inyectivo, luego obtenemos que $H_2(X) \cong \mathbb{Z}$. Por otra parte la función $H_0(A \cap B) \to H_0(A) \oplus H_0(B)$ viene dada por la inclusión de componentes arcoconexas y por lo tanto, es la que manda m a $(m, -m)$. Como esta es inyectiva, se tiene que $H_1(X)$ es el cónucleo de f, es decir,

$$\frac{\mathbb{Z}(1,0,0) \oplus \mathbb{Z}(0,1,0) \oplus \mathbb{Z}(0,0,1)}{\mathbb{Z}(1,0,-2)} = \frac{\mathbb{Z}(1,0,-2) \oplus \mathbb{Z}(0,1,0) \oplus \mathbb{Z}(0,0,1)}{\mathbb{Z}(1,0,-2)} \cong \mathbb{Z}^2.$$

Por lo tanto

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^2, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n \geq 3. \end{cases} \qquad \square$$

(b) (15 puntos) Demuestra que la inclusión $j\colon T \to X$ no es una equivalencia homotópica.

Solución:

Si $j\colon T \to X$ fuera una equivalencia homotópica, entonces $j_*\colon H_n(T) \to H_n(X)$ sería un isomorfismo para todo n. Por la sucesión exacta del par (X, T), obtenemos que $H_n(X, T) = 0$ para todo n. Claramente X es un CW-complejo y T un subcomplejo, así que el par satisface la propiedad de extensión de homotopías. De donde $\tilde{H}_n(X/T) = 0$ para todo n.

Pero $X/T = M/\partial M$ y $M/\partial M \cong \mathbb{R}P^2$ y $\tilde{H}_1(\mathbb{R}P^2) = H_1(\mathbb{R}P^2) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/2$. Esto es una contradicción, luego j no es una equivalencia homotópica. $\square$

3. Decide si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, con justificación completa.

(a) Si A es un retracto de X, entonces existe un isomorfismo $H_n(X) \cong H_n(X, A) \oplus H_n(A)$ para todo $n \geq 0$.

Solución:

Verdadero. Sea $i\colon A \to X$ la inclusión y $r\colon X \to A$ una retracción. Consideremos la sucesión exacta larga asociada al par (X, A)

$$H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A).$$

Como ri es la identidad, se tiene $r_* i_* = 1_{H_n(A)}$ y por lo tanto i_* es inyectiva. También se tiene $\mathrm{im}(\partial) = \mathrm{Ker}(i_*) = 0$ y por lo tanto j_* es sobreyectiva. Así que tenemos sucesiones exactas cortas

$$0 \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X,A) \to 0$$

que escinden puesto que tenemos $r_*\colon H_n(X) \to H_n(A)$ que es una inversa por la izquierda de i_*. Luego $H_n(X) \cong H_n(A) \oplus H_n(X,A)$. $\square$

(b) (10 puntos) Si $n \geq 0$, entonces $X = S^n \cup D^n$ y $Y = S^n \vee S^n$ son homotópicamente equivalentes.

Solución:

Verdadero. Démosle a X una estructura de complejo como sigue. Empezamos con una celda de dimensión cero y a esta le adjuntamos una celda de dimensión $n-1$, con lo cual el $(n-1)$-esqueleto es S^{n-1}, que pensamos como el ecuador de S^n. Ahora le adjuntamos tres celdas de dimensión n por medio de la identidad con lo cual nos queda un espacio homeomorfo a X. Con esta estructura, D^n es un subcomplejo de X que es contráctil luego $X \simeq X/D^n$. Y X/D^n tiene una estructura de CW-complejo con una 0-celda y n-celdas, así que $X/D^n \cong S^n \vee S^n$. Por lo tanto $X \simeq Y$. $\square$

(c) (10 puntos) Sea $n \geq 2$. La función cociente $S^n \to \mathbb{R}P^n$ es nulhomótopa.

Solución:

Falso. Supongamos que esta función π es nulhomótopa y recordemos que $\mathbb{R}P^{n+1} = \mathbb{R}P^n \cup_\pi D^{n+1} = C_\pi$. Consideremos la siguiente parte de la sucesión exacta larga asociada a la función π.

$$H_n(S^n) \xrightarrow{\pi_*} H_n(\mathbb{R}P^n) \to H_n(\mathbb{R}P^{n+1}) \to H_{n-1}(S^n) = 0.$$

Si π fuese nulhomótopa, induciría el morfismo cero en homología en dimensiones positivas, en particular en dimensión n. Pero entonces se tendría $H_n(\mathbb{R}P^n) \cong H_n(\mathbb{R}P^{n+1})$. Cuando $n > 2$ es impar, esto nos diría que $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2$, lo cual no es cierto. $\square$

(d) (10 puntos) Sea $Y = \{(x,y) \in S^1 \mid x \geq -1/2\}$. Se tiene $H_1(S^1, Y) \cong \mathbb{Z}$.

Solución:

Verdadero. Le damos a S^1 la estructura de CW-complejo con las dos 0-celdas $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ y $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ y como 1-celdas, los dos arcos que las conectan. Entonces Y es un subcomplejo de S^1. En particular, (S^1, Y) satisface la propiedad de extensión de homotopías y entonces $H_1(S^1, Y) \cong H_1(S^1/Y)$.

De hecho, Y corresponde a uno de los arcos, que es homeomorfo a I, y en particular es contráctil. Por lo tanto, $S^1/Y \simeq S^1$ y entonces $H_1(S^1/Y) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. $\square$