

SOLUCIONES AL EXAMEN

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA

1. Sean $f, h: S^1 \rightarrow S^1 \times S^2$ dadas por $f(x, y) = (1, 0, x, y, 0)$ and $h(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy, x, y, 0)$. Calcula los grupos de homología de $(S^1 \times S^2) \cup_f D^2$ y $(S^1 \times S^2) \cup_h D^2$.

Solución:

Puesto que $S^1 \times S^2$ y D^2 son arcoconexos, también lo son estos dos espacios, así que su homología es \mathbb{Z} en dimensión cero. Sea Y uno de estos dos espacios y consideremos la sucesión exacta larga de pegado

$$H_k(S^1) \xrightarrow{(g_*, -j_*)} H_k(S^1 \times S^2) \oplus H_k(D^2) \rightarrow H_k(Y) \rightarrow H_{k-1}(S^1) \xrightarrow{(g_*, -j_*)} \dots,$$

donde $j: S^1 \rightarrow D^2$ es la inclusión y g es f ó h , dependiendo de cuál de los dos espacios sea. Si $k \geq 3$, se anulan los grupos de homología del círculo en la expresión de arriba y $H_k(D^2)$, así que

$$H_k(Y) \cong H_k(S^1 \times S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 3, \\ 0, & \text{si } k > 3. \end{cases}$$

Para calcular el primer y segundo grupo de homología consideramos el pedazo

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(S^1) \xrightarrow{(g_*, -j_*)} & H_2(S^1 \times S^2) \oplus H_2(D^2) & \longrightarrow & H_2(Y) & \longrightarrow & H_1(S^1) \xrightarrow{(g_*, -j_*)} & H_1(S^1 \times S^2) \oplus H_1(D^2) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & H_1(Y) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & H_0(S^1) \\ & & & & & & \downarrow (g_*, -j_*) \\ & & & & & & H_0(S^1 \times S^2) \oplus H_0(D^2) \end{array}$$

Puesto que S^1 , $S^1 \times S^2$ y D^2 son arcoconexos, el morfismo $(g_*, -j_*)$ en dimensión 0 está dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \\ n &\mapsto (n, -n),\end{aligned}$$

que es inyectivo, así que podemos cortar la sucesión exacta por 0 tras $H_1(Y)$. Usando esto y reemplazando los grupos que son triviales, tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow H_2(S^1 \times S^2) \rightarrow H_2(Y) \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{g_*} H_1(S^1 \times S^2) \rightarrow H_1(Y) \rightarrow 0,$$

de donde obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow H_2(S^1 \times S^2) \rightarrow H_2(Y) \rightarrow \text{Ker}(g_*) \rightarrow 0$$

y que $H_1(Y) \cong \text{Coker}(g_*)$. Así que necesitamos determinar g_* es dimensión uno. Puesto que los grupos fundamentales de S^1 y $S^1 \times S^2$ son abelianos, es suficiente ver el inducido en el grupo fundamental. En primer lugar $f_*: \pi_1(S^1, (1, 0)) \rightarrow \pi_1(S^1 \times S^2, (1, 0, 1, 0, 0))$ es trivial porque f es la composición

$$S^1 \xrightarrow{\varphi} S^2 \xrightarrow{\psi} S^1 \times S^2,$$

donde $\varphi(x, y) = (x, y, 0)$ y $\psi(z) = (1, 0, z)$. Como el grupo fundamental de S^2 es trivial, obtenemos que f_* es trivial. Entonces $\text{Ker}(f_*) \cong \mathbb{Z} \cong \text{Coker}(f_*)$ y

$$\begin{aligned}H_2((S^1 \times S^2) \cup_f D^2) &\cong \mathbb{Z}^2, \\ H_1((S^1 \times S^2) \cup_f D^2) &\cong \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Para resumir

$$H_k((S^1 \times S^2) \cup_f D^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } k = 1, \\ \mathbb{Z}^2, & \text{si } k = 2, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } k = 3, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por otra parte, si cambiamos a coordenadas complejas en S^1 , se tiene $h(z, 0) = (z^2, z, 0)$ y el mapeo inducido en el grupo fundamental

$$h_*: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1 \times S^2, (1, 1, 0)) \cong \pi_1(S^1, 1) \times \pi_1(S^2, (1, 0)) \cong \pi_1(S^1, 1)$$

envía la clase $[\omega_1]$ a $[(\omega_2, \omega_1, 0)] = [(\omega_2, c_{(1,0,0)})]$, donde $\omega_n(t) = e^{2\pi int}$. Es decir, es multiplicación por dos. Así que $\text{Ker}(h_*) = 0$ y $\text{Coker}(h_*) \cong \mathbb{Z}/2$ y por lo tanto

$$H_k((S^1 \times S^2) \cup_h D^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{Z}/2, & \text{si } k = 1, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } k = 2, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } k = 3, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y esto termina los cálculos deseados. □

2. (30 puntos) Sea $X = S^2/\sim$ donde \sim identifica el polo norte con el polo sur. Calcula los grupos de homología de X y describe una función explícita $S^1 \rightarrow X$ que no sea nulhomótopa.

Solución:

Sea $A = \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\}$. Notemos que $X = S^2/A$. Podemos darle una estructura de CW-complejo de S^2 donde A es un subcomplejo. Por ejemplo, comenzando con A como 0-esqueleto, adjuntando dos 1-celdas para formar un círculo máximo con estos dos puntos y finalmente adjuntando dos 2-celdas mediante la función identidad del círculo a este círculo máximo. Entonces (S^2, A) satisface la propiedad de extensión de homotopía y por lo tanto

$$\tilde{H}^j(X) \cong H_j(S^2, A).$$

Nos concentramos en $j > 0$, ya que X es arcoconexo y por lo tanto $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Usamos la sucesión exacta larga del par

$$H_j(A) \rightarrow H_j(S^2) \rightarrow H_j(S^2, A) \rightarrow H_{j-1}(A) \rightarrow H_{j-1}(S^2).$$

Si $j > 1$, entonces $H_j(A) = H_{j-1}(A) = 0$ y por lo tanto $H_j(S^2, A) \cong H_j(S^2)$. Podemos obtener $H_1(S^2, A)$ a partir del pedazo

$$H_1(S^2) \rightarrow H_1(S^2, A) \rightarrow H_0(A) \rightarrow H_0(S^2).$$

Como $H_1(S^2) = 0$, tenemos que $H_1(S^2, A)$ es isomorfo al núcleo de $H_0(A) \rightarrow H_0(S^2)$. Las dos componentes de A se envían en la única componente de S^2 bajo la inclusión, así que el mapeo $H_0(A) \rightarrow H_0(S^2)$ es el homomorfismo $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ que envía (m, n) a $m + n$, que tiene

núcleo isomorfo a \mathbb{Z} . Luego $H_1(S^2, A) \cong \mathbb{Z}$. Para resumir

$$H_j(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } j = 0, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } j = 1, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } j = 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para la segunda parte, tomemos un meridiano J conectando el polo norte y el polo sur. La inclusión induce un mapeo de pares $k: (J, A) \rightarrow (S^2, A)$ y notemos que J es un CW-complejo con A como subcomplejo, así que (J, A) satisface la propiedad de extensión de homotopías y $H_1(J, A) \cong H_1(J/A)$. Un morfismo de pares induce un morfismo entre las sucesiones exactas largas de las parejas. Nos fijamos en el pedazo

$$\begin{array}{ccccccc} H_1(J) & \longrightarrow & H_1(J, A) & \longrightarrow & H_0(A) & \longrightarrow & H_0(J) \\ \downarrow & & \downarrow k_* & & \downarrow & & \downarrow \\ H_1(S^2) & \longrightarrow & H_1(S^2, A) & \longrightarrow & H_0(A) & \longrightarrow & H_0(J) \end{array}$$

que tiene la forma más concreta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1(J, A) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow k_* & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H_1(S^2, A) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{array}$$

Como k restringido a A es la identidad, el mapeo vertical $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ es la identidad. El mapeo $k: J \rightarrow S^2$ es la inclusión, que envía la única componente arcoconexa de J a la única componente arcoconexa de S^2 , así que el morfismo vertical $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es la identidad. Por el lema de los cinco, $k_*: H_1(J, A) \rightarrow H_1(S^2, A)$ es un isomorfismo. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_1(J, A) & \xrightarrow[\cong]{q_*} & H_1(J/A, *) \\ k_* \downarrow \cong & & \downarrow h_* \\ H_1(S^2, A) & \xrightarrow[p_*]{\cong} & H_1(S^2/A, *) \end{array}$$

donde p y q son los cocientes y $h: (J/A, *) \rightarrow (S^2/A, *)$ es el morfismo inducido por la inclusión. Es conmutativo porque $hq = pk$, lo cual es claro. De aquí sacamos que h_* es un

isomorfismo. Tenemos otro diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_1(J/A) & \xrightarrow{\cong} & H_1(J/A, *) \\ h_* \downarrow & & \cong \downarrow h_* \\ H_1(S^2/A) & \xrightarrow{\cong} & H_1(S^2/A, *) \end{array}$$

donde los isomorfismos horizontales provienen de las respectivas sucesiones del par. Esto nos dice que $h_*: H_1(J/A) \rightarrow H_1(S^2/A)$ es un isomorfismo y por lo tanto, $h: J/A \rightarrow S^2/A$ no es nulhomótopa. Si componemos con un homeomorfismo $S^1 \rightarrow J/A$, obtenemos un mapeo $S^1 \rightarrow X$ que no es nulhomótopo. \square

Solución alternativa: Consideremos la estructura CW sobre S^2 que se dio en la solución anterior, donde el subespacio J de esa solución es una de las dos 1-celdas, y adjuntemos una nueva 1-celda que une el polo norte y el sur para formar un nuevo CW-complejo Y . Esa 1-celda junto con el polo norte y polo sur forma un subcomplejo contráctil K , así que el cociente $Y \rightarrow Y/K = X$ es una equivalencia homotópica. Por otra parte, el subespacio J de la solución anterior también es un subcomplejo contráctil, así que el cociente $Y \rightarrow Y/J$ es una equivalencia homotópica. Ahora Y/J es un CW-complejo con una 0-celda, dos 1-celdas $-J$ y K que forzosamente se pegan mediante el mapeo constante y dos 2-celdas que se pegan al círculo que se formó a partir de $-J$ mediante la identidad. Es decir $Y/J \cong S^2 \vee S^1$. Poniendo todo esto junto, tenemos

$$X \simeq Y \simeq Y/J \cong S^2 \vee S^1,$$

y el cálculo de la homología ahora es inmediato. Además, la inclusión natural $S^1 \rightarrow S^2 \vee S^1$ no es nulhomótopa pues induce un isomorfismo en el grupo fundamental y entonces la composición $S^1 \rightarrow X$ con la equivalencia homotópica $S^2 \vee S^1 \rightarrow X$ tampoco es nulhomótopa. \square

3. Decide si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, con justificación completa.

(a) (10 puntos) La inclusión $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ no es nulhomótopa.

Solución:

Verdadero. Recordemos que $\mathbb{C}P^1$ es el 2-esqueleto del CW-complejo $\mathbb{C}P^2$, así que $(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1)$ satisface la propiedad de extensión de homotopías y de hecho $\mathbb{C}P^2 = \mathbb{C}P^1 \cup_f D^4$, así que $\mathbb{C}P^2/\mathbb{C}P^1 \cong S^4$. El pedazo de la sucesión exacta larga del par

$$H_3(S^2) \rightarrow H_2(\mathbb{C}P^1) \rightarrow H_2(\mathbb{C}P^2),$$

tiene la forma

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Como el mapeo inducido $H_2(\mathbb{C}P^1) \rightarrow H_2(\mathbb{C}P^2)$ es inyectivo y estos grupos son no triviales, la inclusión no es nulhomótopa. \square

- (b) (10 puntos) Si X tiene un subespacio contráctil A tal que X/A es contráctil, entonces X es contráctil.

Solución:

Falso. El subespacio $A = S^1 - \{1\}$ de S^1 es contráctil y S^1/A es el espacio de Sierpinski, que también es contráctil, pero S^1 no es contráctil pues $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. \square

- (c) (10 puntos) Si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo local en el punto x entre variedades topológicas, entonces $H_n(X, X - \{x\}) \cong H_n(Y, Y - \{f(x)\})$ para todo n .

Solución:

Verdadero. Por hipótesis, existen vecindades abiertas U de x y V de $f(x)$ tal que $f: U \rightarrow V$ es un homeomorfismo, en particular $f: (U, U - \{x\}) \rightarrow (V, V - \{f(x)\})$ es un homeomorfismo de pares e induce un isomorfismo

$$f_*: H_n(U, U - \{x\}) \rightarrow H_n(V, V - \{f(x)\}).$$

Notemos que $X - U \subseteq X - \{x\}$, el primero es cerrado y el segundo es abierto (porque X es Hausdorff al ser variedad topológica). Entonces se cumplen las hipótesis de escisión y la inclusión nos induce un isomorfismo

$$H_n(U, U - \{x\}) \rightarrow H_n(X, X - \{x\}).$$

Lo mismo aplica para Y y V . Entonces el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U - \{x\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V - \{f(x)\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(X, X - \{x\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y, Y - \{f(x)\}) \end{array}$$

donde los mapeos verticales son inducidos por las inclusiones nos muestra que el mapeo horizontal inferior es un isomorfismo. \square

(d) (10 puntos) Existe un Δ -complejo X de dimensión cuatro con $H_4^\Delta(X) \cong \mathbb{Z}/6$.

Solución:

Falso. Como X tiene dimensión cuatro, se tiene $C_5^\Delta(X) = 0$ y entonces

$$H_4^\Delta(X) \cong \text{Ker}(\partial_4: C_4^\Delta(X) \rightarrow C_3^\Delta(X)).$$

Como $C_4^\Delta(X)$ es un grupo abeliano libre, también lo es $H_4^\Delta(X)$. \square