EXAMEN FINAL

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA

Este examen tiene una página y contiene tres problemas.

1. (30 puntos) Sea $X = (S^1 \times S^1) \amalg (S^1 \times S^1)/\sim$, donde $(1, x)$ en el primer $S^1 \times S^1$ se identifica con $(1, x)$ en el segundo $S^1 \times S^1$. Determina sus grupos de homología, de cohomología y su anillo de cohomología, expresado como cociente de un anillo graduado de polinomios.

2. (30 puntos) Sea $g \geq 1$. Demuestra que N_g no es homotópicamente equivalente a un espacio de la forma $X \vee Y$ con X y Y CW-complejos no $\mathbb{F}_2$–acíclicos. **Pista:** Usa el anillo de cohomología con coeficientes en $\mathbb{F}_2$.

3. Decide si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, con justificación completa.

(a) (10 puntos) Si X y Y son CW-complejos finitos, entonces $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

(b) (10 puntos) Sea $X = \mathbb{R}P^2 \cup_{\pi \amalg \pi} (D^3 \amalg D^3)$, donde $\pi \colon S^2 \to \mathbb{R}P^2$ es el cociente. Se tiene que $X \simeq \mathbb{R}P^3$.

(c) (10 puntos) La función $f \colon S^3 \to S^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, x_1)$ tiene grado uno.

(d) (10 puntos) Existe un CW-complejo X tal que $\widetilde{H}^7(X) \cong \mathbb{Z}/56$ y $\widetilde{H}^m(X) = 0$ si $m \neq 7$.