

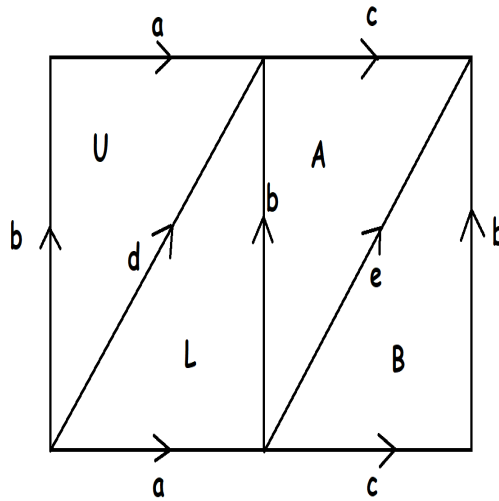
SOLUCIONES AL EXAMEN FINAL

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA

1. (30 puntos) Sea $X = (S^1 \times S^1) \amalg (S^1 \times S^1)/\sim$, donde $(1, x)$ en el primer $S^1 \times S^1$ se identifica con $(1, x)$ en el segundo $S^1 \times S^1$. Determina sus grupos de homología, de cohomología y su anillo de cohomología, expresado como cociente de un anillo graduado de polinomios.

Solución:

Consideremos la estructura de Δ -complejo de X que muestra el siguiente dibujo.



Su complejo simplicial está dado por

$$\mathbb{Z}\{A, B, U, L\} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\{a, b, c, d, e\} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}v.$$

donde $\partial_1 \equiv 0$ porque hay un solo vértice, y

$$\begin{aligned}\partial_2(A) &= c - e + b, \\ \partial_2(B) &= b - e + c, \\ \partial_2(U) &= a - d + b, \\ \partial_2(L) &= b - d + a.\end{aligned}$$

Puesto que es arcoconexo, tenemos $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}H_1(X) &= \frac{\mathbb{Z}\{a, b, c, d, e\}}{\mathbb{Z}(b - e + c) + \mathbb{Z}(a - d + b)} = \frac{\mathbb{Z}\{a, b, c\} \oplus \mathbb{Z}(b - e + c) + \mathbb{Z}(a - d + b)}{\mathbb{Z}(b - e + c) + \mathbb{Z}(a - d + b)} \cong \mathbb{Z}^3, \\ H_2(X) &= \text{Ker}(\partial_2) = \mathbb{Z}(A - B) \oplus \mathbb{Z}(U - L) \cong \mathbb{Z}^2.\end{aligned}$$

Luego

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } n = 0, \\ \mathbb{Z}^3, & \text{if } n = 1, \\ \mathbb{Z}^2, & \text{if } n = 2, \\ 0, & \text{if } n > 2 \end{cases}$$

Puesto que todos los grupos son libres y finitamente generados, se tiene $H^n(X) \cong H_n(X)$ por el teorema de coeficientes universales. Pero de todas maneras tenemos que calcularlos explícitamente para calcular el producto cap. Notemos que ∂_2 está dado por la matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con respecto a las bases ordenadas $\{A, B, U, L\}$ y $\{a, b, c, d, e\}$, y por lo tanto δ^1 está dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

respecto a las bases duales. Es decir

$$\begin{aligned}\delta^1(\iota_a) &= \iota_U + \iota_L, \\ \delta^1(\iota_b) &= \iota_A + \iota_B + \iota_U + \iota_L, \\ \delta^1(\iota_c) &= \iota_A + \iota_B, \\ \delta^1(\iota_d) &= -\iota_U - \iota_L, \\ \delta^1(\iota_e) &= -\iota_A - \iota_B.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$H^1(X) = \text{Ker}(\delta^1) = \mathbb{Z}\{\iota_c + \iota_e, \iota_a + \iota_d, \iota_b + \iota_d + \iota_e\}.$$

Llamamos a estos tres elementos de la base x_1, y_1 y z_1 , respectivamente. Por otra parte

$$H^2(X) = \frac{\mathbb{Z}\{\iota_A, \iota_B, \iota_U, \iota_L\}}{\mathbb{Z}(\iota_A + \iota_B) + \mathbb{Z}(\iota_U + \iota_L)} \cong \mathbb{Z}\iota_B \oplus \mathbb{Z}\iota_L.$$

Les llamamos w_2 y u_2 a estos dos elementos de la base. Ahora calculamos

$$\begin{aligned}x_1y_1(U) &= x_1(b)y_1(a) = 0 \cdot 1 = 0, \\ x_1y_1(L) &= x_1(a)y_1(b) = 0 \cdot 0 = 0, \\ x_1y_1(A) &= x_1(b)y_1(c) = 0 \cdot 0 = 0, \\ x_1y_1(B) &= x_1(c)y_1(b) = 1 \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

de donde $x_1y_1 = 0$. Basado en el cálculo anterior, es suficiente hacer

$$x_1z_1(B) = x_1(c)z_1(b) = 1 \cdot 1 = 1$$

para concluir $x_1z_1 = w_2$. Por último

$$\begin{aligned}y_1z_1(U) &= y_1(b)z_1(a) = 0 \cdot 0 = 0, \\ y_1z_1(L) &= y_1(a)z_1(b) = 1 \cdot 1 = 1, \\ y_1z_1(A) &= y_1(b)z_1(c) = 0 \cdot 0 = 0, \\ y_1z_1(B) &= y_1(c)z_1(b) = 0 \cdot 1 = 0,\end{aligned}$$

de donde $y_1z_1 = u_2$. Puesto que x_1, y_1 y z_1 están en dimensión impar y $H^2(X)$ es libre de torsión, sus cuadrados son cero. Como X es arcoconexo, $H^0(X)$ está generado por la unidad multiplicativa. Todos los demás productos se deducen de los anteriores por conmutatividad graduada o por pertenecer a grupos que son triviales. Entonces

$$H^*(X) \cong \mathbb{Z}[x_1, y_1, z_1]/(x_1^2, y_1^2, z_1^2, x_1y_1),$$

y esto concluye el problema. \square

2. (30 puntos) Sea $g \geq 1$. Demuestra que N_g no es homotópicamente equivalente a un espacio de la forma $X \vee Y$ con X y Y CW-complejos no \mathbb{F}_2 -acíclicos. **Pista:** Usa el anillo de cohomología con coeficientes en \mathbb{F}_2 .

Solución:

Recordemos que

$$\tilde{H}^*(N_g; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_g] / (x_i^2 - x_j^2, x_i x_j, x_i^3),$$

donde cada x_j tiene grado uno. En particular, $H^2(N_g; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$ está generado por x_i^2 para cualquier i . Si $N_g \simeq X \vee Y$ con las condiciones sobre X y Y del enunciado, se debería tener que X y Y son arcoconexos, pues es otro caso $X \vee Y$ no sería arcoconexo. Sean $i: X \rightarrow N_g$ y $j: Y \rightarrow N_g$ las composiciones de las inclusiones a $X \vee Y$ y la equivalencia homotópica $N_g \rightarrow X \vee Y$. Entonces

$$(i^*, j^*): H^n(N_g; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^n(X; \mathbb{F}_2) \oplus H^n(Y; \mathbb{F}_2)$$

es un isomorfismo para todo $n \geq 1$ y

$$(i^*, j^*): \tilde{H}^*(N_g; \mathbb{F}_2) \rightarrow \tilde{H}^*(X; \mathbb{F}_2) \times \tilde{H}^*(Y; \mathbb{F}_2)$$

es un isomorfismo de anillos graduados. En particular, se tendría

$$\mathbb{F}_2 \cong H^2(N_g; \mathbb{F}_2) \cong H^2(X; \mathbb{F}_2) \oplus H^2(Y; \mathbb{F}_2),$$

de donde $H^2(X; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$ y $H^2(Y; \mathbb{F}_2) = 0$ o viceversa. Supondremos que es la primera opción sin pérdida de generalidad. Como $H^2(Y; \mathbb{F}_2) = 0 = \tilde{H}^0(Y; \mathbb{F}_2)$, pero Y no es \mathbb{F}_2 -acíclico, se debe tener $H^1(Y; \mathbb{F}_2) \neq 0$. Sea $\alpha \in H^1(Y; \mathbb{F}_2)$ un elemento no nulo. Sea $a \in H^1(N_g; \mathbb{F}_2)$ tal que $(i^*, j^*)(a) = (0, \alpha)$. Se debe tener $a \neq 0$, así que

$$a = \sum_{j=1}^k x_{i_j}$$

para algún $k \geq 1$. Notemos que

$$ax_{i_1} = x_{i_1}^2 \neq 0.$$

Entonces

$$(0, 0) \neq (i^*, j^*)(ax_{i_1}) = (i^*, j^*)(a)(i^*, j^*)(x_{i_1}) = (0, \alpha)(i^*(x_{i_1}), j^*(x_{i_1})) = (0, \alpha j^*(x_{i_1})) = (0, 0),$$

donde la última igualdad se cumple porque $H^2(Y; \mathbb{F}_2) = 0$. Esto es una contradicción, luego no se puede tener $N_g \simeq X \vee Y$ bajo las hipótesis del enunciado. \square

3. Decide si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, con justificación completa.

(a) (10 puntos) Si X y Y son CW-complejos finitos, entonces $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Solución:

Verdadero. Recordemos que $H_n(X \times Y) \cong H_n((X \times Y)_c)$ para todo n y que $Z = (X \times Y)_c$ tiene una CW-estructura con

$$\sum_{i=0}^k |J_i^X| |J_{k-i}^Y|$$

k -celdas, donde J_i^X es el conjunto de i -celdas de X y J_{k-i}^Y es el conjunto de j -celdas de Y . Entonces

$$\begin{aligned} \chi(X)\chi(Y) &= \left(\sum_i (-1)^i |J_i^X| \right) \left(\sum_j (-1)^j |J_j^Y| \right) \\ &= \sum_{i,j} (-1)^{i+j} |J_i^X| |J_j^Y| \\ &= \sum_k \left(\sum_i (-1)^k |J_i^X| |J_{k-i}^Y| \right) \\ &= \sum_k (-1)^k \left(\sum_i |J_i^X| |J_{k-i}^Y| \right) \\ &= \sum_k (-1)^k |J_k^Z| \\ &= \chi(Z). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\chi(X \times Y) = \chi(Z) = \chi(X)\chi(Y)$. \square

(b) (10 puntos) Sea $X = \mathbb{R}P^2 \cup_{\pi \amalg \pi} (D^3 \amalg D^3)$, donde $\pi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ es el cociente. Se tiene que $X \simeq \mathbb{R}P^3$.

Solución:

Falso. Notemos que $X \cong (\mathbb{R}P^2 \cup_{\pi} D^3) \cup_{\pi'} D^3 = \mathbb{R}P^3 \cup_{\pi'} D^3$, donde π' es la composición de π con la inclusión de $\mathbb{R}P^2$ en $\mathbb{R}P^3$. Pero π' se extiende a una función $D^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$, así que es nulhomótopa. Por lo tanto

$$X \simeq \mathbb{R}P^3 \cup_c D^3 = \mathbb{R}P^3 \vee S^3,$$

y X no es homotópicamente equivalente a $\mathbb{R}P^3$ porque $H^3(X) \cong \mathbb{Z}^2$, que no es isomorfo a $H^3(\mathbb{R}P^3) \cong \mathbb{Z}$. \square

(c) (10 puntos) La función $f: S^3 \rightarrow S^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, x_1)$ tiene grado uno.

Solución:

Falso. Notemos que la función $a_{i,j}: S^3 \rightarrow S^3$ que permuta las coordenadas i y j es una reflexión a través de la esfera máxima dada por la intersección de S^3 con el hiperplano $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_i = x_j\}$. Puesto que $f = a_{3,4}a_{2,3}a_{1,2}$, se tiene

$$\deg(f) = \deg(a_{3,4}) \deg(a_{2,3}) \deg(a_{1,2}) = (-1)^3 = -1,$$

que no es igual a uno. \square

(d) (10 puntos) Existe un CW-complejo X tal que $\tilde{H}^7(X) \cong \mathbb{Z}/56$ y $\tilde{H}^m(X) = 0$ si $m \neq 7$.

Solución:

Verdadero. Sea $X = S^6 \cup_f D^7$, donde $f: S^6 \rightarrow S^6$ es una función de grado 56. Le puedo dar una CW-estructura con una 0-celda, una 6-celda, y una 7-celda que se pega mediante f . Su complejo para calcular cohomología celular será entonces

$$\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{56} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

y vemos que tiene la cohomología deseada. \square