

Invarianza homotópica de homología singular

Homología y cohomología

3 de Febrero del 2026

Lema 1. Si $f, g: X \rightarrow Y$ son homótopas, entonces $f_{\#}$ y $g_{\#}$ son homótopas.

Demostración: Primero rompemos $\Delta^n \times I = [v_0, \dots, v_n] \times I$ en símlices de dimensión $n + 1$.

Sea $u_i = (v_i, 0)$ y $w_i = (v_i, 1)$. Mostraremos que $[u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, w_n]$ es un $(n + 1)$ -símplex y que hay una descomposición

$$\Delta^n \times I = \bigcup_{i=0}^n [u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, w_n].$$

Veamos que el conjunto de vectores

$$\{u_1 - u_0, \dots, u_i - u_0, w_i - u_0, \dots, w_n - u_0\}$$

es linealmente independiente. Si se tuviera

$$\lambda_1(u_1 - u_0) + \dots + \lambda_i(u_i - u_0) + \lambda'_i(w_i - u_0) + \dots + \lambda'_n(w_n - u_0) = 0,$$

entonces tendríamos la siguiente ecuación en la primera coordenada

$$\lambda_1(v_1 - v_0) + \dots + \lambda_i(v_i - v_0) + \lambda'_i(v_i - v_0) + \dots + \lambda'_n(v_n - v_0) = 0.$$

Como Δ^n es un n -símplex, los elementos $v_i - v_0$ son linealmente independientes y por lo tanto todos los números λ_j y λ'_j en esta ecuación anterior con $j \neq i$ deben ser cero y $\lambda_i + \lambda'_i = 0$. Pero la segunda coordenada nos dice que $\lambda'_i + \dots + \lambda'_n = 0$, de donde $\lambda'_i = 0$, luego $\lambda_i = 0$. Esto muestra que este conjunto de vectores es linealmente independiente y por lo tanto $[u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, w_n]$ es un $(n + 1)$ -símplex.

Como u_i y w_i pertenecen a $\Delta^n \times I$ y este espacio es convexo, la unión de estos $(n + 1)$ -símlices está contenida en $\Delta^n \times I$. Para ver que $\Delta^n \times I$ está contenida en la unión, consideremos un elemento de $\Delta^n \times I$, que debe ser de la forma

$$\left(\sum_{i=0}^n t_i v_i, t \right),$$

donde la suma de los t_i es uno, y todos los t_i y t están en I . Puesto que t está entre 0 y la suma de todos los t_i y los t_i son positivos, existe un índice $0 \leq j \leq n$ tal que

$$\sum_{i=j+1}^n t_i \leq t \leq \sum_{i=j}^n t_i.$$

Entonces consideramos el siguiente elemento de $[u_0, \dots, u_j, w_j, \dots, w_n]$

$$\sum_{i=0}^{j-1} t_i u_i + \left(\sum_{i=j}^n t_i - t \right) u_j + \left(t - \sum_{i=j+1}^n t_i \right) w_j + \sum_{i=j+1}^n t_i w_i,$$

que es igual a

$$\left(\sum_{i=0}^{j-1} t_i u_i + \left[\sum_{i=j}^n t_i - t \right] u_j + \left[t - \sum_{i=j+1}^n t_i \right] u_j + \sum_{i=j+1}^n t_i u_i, \left[t - \sum_{i=j+1}^n t_i \right] + \sum_{i=j+1}^n t_i \right).$$

Es decir,

$$\left(\sum_{i=0}^n t_i v_i, t \right)$$

Así que este elemento pertenece a $[u_0, \dots, u_j, w_j, \dots, w_n]$ y esto prueba lo que queríamos.

Ahora sea $H: X \times I \rightarrow Y$ una homotopía tal que $H_0 = f$ y $H_1 = g$. Dado $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$, usamos la abreviación $H^\sigma = H \circ (\sigma \times 1_I)$ y omitimos el símbolo $|$ cuando restringimos. Definimos

$$P: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X),$$

$$\sigma \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i H_{[u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, w_n]}^\sigma.$$

Comenzamos expandiendo

$$\partial P(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j H_{[u_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_i, w_i, \dots, w_n]}^\sigma + \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^j H_{[u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, \widehat{w}_{j-1}, \dots, w_n]}^\sigma.$$

Separamos la primera suma en dos sumandos, cuando $j = i$ y cuando $j < i$. Separamos la segunda suma en dos sumandos, cuando $j = i + 1$ y cuando $j > i + 1$.

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i+i} H_{[u_0, \dots, \widehat{u}_i, w_i, \dots, w_n]}^\sigma + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} H_{[u_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_i, w_i, \dots, w_n]}^\sigma +$$

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{i+i+1} H_{[u_0, \dots, u_i, \widehat{w}_i, \dots, w_n]}^\sigma + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{i+j} H_{[u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, \widehat{w}_{j-1}, \dots, w_n]}^\sigma.$$

Notemos que los términos $H_{[u_0, \dots, \widehat{u}_i, w_i, \dots, w_n]}^\sigma$ con $i > 0$ en la primera suma coinciden con los términos $-H_{[u_0, \dots, u_{i-1}, \widehat{w_{i-1}}, \dots, w_n]}^\sigma$ de la tercera suma excepto por su signo. Notemos también que el término $H_{[\widehat{u}_0, w_0, \dots, w_n]}^\sigma = g_\#(\sigma)$ para $i = 0$ en la primera suma y el término $-H_{[u_0, \dots, u_n, \widehat{w_n}]}^\sigma = -f_\#(\sigma)$ para $i = n$ en la tercera suma coinciden salvo signo. Así que podemos simplificar:

$$g_\#(\sigma) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} H_{[u_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_i, w_i, \dots, w_n]}^\sigma - f_\#(\sigma) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+2}^{n+1} (-1)^{i+j} H_{[u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, \widehat{w_{j-1}}, \dots, w_n]}^\sigma.$$

Cambiamos la variable $k = j - 1$ en el cuarto sumando:

$$g_\#(\sigma) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} H_{[u_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_i, w_i, \dots, w_n]}^\sigma - f_\#(\sigma) + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n (-1)^{i+k+1} H_{[u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, \widehat{w}_k, \dots, w_n]}^\sigma.$$

Ahora expandimos $P(\partial\sigma)$. Recordemos que $\partial\sigma = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sigma_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]}$.

Entonces

$$H \circ (\sigma_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_n]} \times 1_I)_{[u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, w_n]} = \begin{cases} H_{[u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]}^\sigma, & \text{si } i < j, \\ H_{[u_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{i+1}, w_{i+1}, \dots, w_n]}^\sigma, & \text{si } i \geq j, \end{cases}$$

y por lo tanto

$$P(\partial\sigma) = \sum_{j=1}^n (-1)^j \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i H_{[u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]}^\sigma + \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^i H_{[u_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_{i+1}, w_{i+1}, \dots, w_n]}^\sigma.$$

En la primera suma, hacemos $k = j$ y cambiamos el orden de sumación. Como $i < j = k$, ahora k está entre $i + 1$ y n . En la segunda suma, sea $k = i + 1$ y cambiamos el orden de sumación. Como $j \leq i$, ahora $j < k$ y j estará entre 0 y $k - 1$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n (-1)^{i+k} H_{[u_0, \dots, u_i, w_i, \dots, \widehat{w}_k, \dots, w_n]}^\sigma + \sum_{k=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+k-1} H_{[u_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots, u_k, w_k, \dots, w_n]}^\sigma.$$

Ahora la primera suma es igual al cuarto sumando $\partial P(\sigma)$ pero con signo opuesto.

Y la segunda suma es igual al segundo sumando de $\partial P(\sigma)$ con el signo opuesto.

Así que:

$$\partial P(\sigma) + P(\partial\sigma) = g_\#(\sigma) - f_\#(\sigma).$$

Esto es, $\partial P + P\partial = g_\# - f_\#$, lo cual dice que $g_\#$ y $f_\#$ son homótopas. \square