

PRELIMINARES

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA

1. ALGUNOS RESULTADOS ÚTILES DE TOPOLOGÍA GENERAL

En esta sección enumeramos algunos resultados de topología general que se usarán durante el curso. Comenzamos con un resultado sobre la compatibilidad de la topología final y la topología de subespacio bajo ciertas condiciones.

Definición 1.1. Sea $\mathcal{A} = \{f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y \mid \alpha \in J\}$ una familia de funciones desde espacios topológicos X_α a un conjunto Y . La topología final sobre Y respecto de \mathcal{A} es

$$\tau_{\mathcal{A}} = \{U \subseteq Y \mid f_\alpha^{-1}(U) \text{ es abierto en } X_\alpha \text{ para todo } \alpha \in J\}.$$

Es fácil comprobar que esto define una topología sobre Y . Es la topología más grande que hace que todas las funciones f_α sean continuas. Cuando la familia solo está formada por una función sobreyectiva, esto corresponde a la topología cociente inducida por esa función.

Propiedad universal de la topología final. *Sea Y un espacio con la topología final respecto de la familia $\{f_\alpha \mid \alpha \in J\}$. Entonces $g: Y \rightarrow Z$ es continua si y solo si gf_α es continua para todo $\alpha \in J$.*

Demostración: Si g es continua, puesto que cada f_α es continua, también gf_α es continua. Supongamos ahora que gf_α es continua para todo $\alpha \in J$. Dado un abierto U de Z , el subconjunto $g^{-1}(U)$ cumple que

$$f_\alpha^{-1}g^{-1}(U) = (gf_\alpha)^{-1}(U)$$

es abierto para todo $\alpha \in J$, así que por la definición de la topología final, $g^{-1}(U)$ es abierto. Esto prueba que g es continua. \square

Proposición 1.2. *Sea X un espacio topológico, Y un conjunto, A un subespacio abierto o cerrado de X y $f: X \rightarrow Y$ una función. Dotamos a Y de la topología final respecto de f . Si $f^{-1}f(A) = A$, entonces la topología de $f(A)$ como subespacio de Y y la topología final respecto de la restricción $f|_A: A \rightarrow f(A)$ coinciden.*

Demostración: Haremos solamente el caso en que A es abierto. Sea τ_s la topología de $f(A)$ como subespacio de Y y τ_g la topología final

en $f(A)$ respecto de $f|_A$. Denotemos $g = f|_A$ y notemos que $g^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap A$.

La función g es continua cuando ponemos las topologías de subespacio en A y $f(A)$ porque es una restricción de dominio y codominio de una función continua. Pero también es continua cuando ponemos la topología de subespacio en A y la topología final respecto de g sobre $f(A)$ por definición de la topología final. Ahora consideremos la función identidad

$$1_{f(A)}: (f(A), \tau_g) \rightarrow (f(A), \tau_s).$$

Notemos que $1_{f(A)}g$ es la función

$$g: A \rightarrow (f(A), \tau_s),$$

que es continua. Por la propiedad universal de la topología final, la función $1_{f(A)}: (f(A), \tau_g) \rightarrow (f(A), \tau_s)$ es continua, lo cual implica que τ_s está contenida en τ_g .

Ahora sea U un abierto de τ_g , es decir, $g^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$ es abierto en A . Como A es abierto en X , entonces $f^{-1}(U) \cap A$ es abierto en X . Por otra parte, como $U \subseteq f(A)$, se tiene que

$$f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}f(A) = A.$$

Luego $f^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$, y entonces $f^{-1}(U)$ es abierto en X . En consecuencia U es abierto en Y , así que $U = U \cap f(A)$ pertenece a τ_s . El caso en que A es cerrado es análogo, solamente cambiando abiertos por cerrados. \square

Este último resultado es útil en el siguiente contexto. Tenemos una relación de equivalencia \sim en un espacio X y queremos estudiar un subespacio de X/\sim que es la imagen de un subespacio abierto o cerrado A de X . Y además todo punto que está relacionado a un punto de A está en A . Entonces podemos pensar que este subespacio es el cociente de A bajo la relación de equivalencia \sim restringida a A .

Ejemplo 1.3. Consideremos la relación de equivalencia \sim sobre I^2 que define el toro plano $T = I^2/\sim$, es decir, $(0, y) \sim (1, y)$ y $(x, 0) \sim (x, 1)$. Denotemos la clase del punto (s, t) por $[s, t]$ y consideremos el subespacio

$$B = \{[s, t] \in T \mid (s, t) \neq (1/2, 1/2)\}.$$

En este caso T tiene la topología final respecto del cociente $q: I^2 \rightarrow T$. Y se tiene claramente que $B = q(A)$, donde

$$A = \{(s, t) \in I^2 \mid (s, t) \neq (1/2, 1/2)\}.$$

Es fácil comprobar que $A = q^{-1}q(A)$, así que podemos ver a B como A con las mismas identificaciones de antes, es decir, un cuadrado menos el centro con sus lados identificados.

Nótese que es posible escoger otro A que cumpla $q(A) = B$, pero no la segunda condición. Por ejemplo,

$$C = \{(s, t) \in I^2 \mid (s, t) \neq (1/2, 1/2) \text{ y } t > 0\}$$

satisface $B = q(C)$, pero $q^{-1}q(C) = A \neq C$.

Teorema 1.4. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto y Y es Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración: Sea C un cerrado de X . Como X es compacto, C es compacto y por lo tanto $f(C)$ es compacto. Como Y es Hausdorff, $f(C)$ es cerrado. Esto prueba que f^{-1} es continua. \square

El siguiente resultado nos ayudará a definir funciones continuas desde espacios cociente. Sea \sim una relación de equivalencia sobre un espacio topológico X y $q: X \rightarrow X/\sim$ la función cociente. Siempre consideramos en X/\sim la topología cociente.

Propiedad universal de la topología cociente. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua. Existe una función continua $g: X/\sim \rightarrow Y$ tal que $gq = f$ si y sólo si f es constante en cada clase de equivalencia de \sim . Es decir, si y sólo si $x \sim y$ implica $f(x) = f(y)$.*

Demostración: Supongamos que existe tal g y sean $x, y \in X$ tales que $x \sim y$. Entonces $[x] = [y]$ y se tiene

$$f(x) = gq(x) = g([x]) = g([y]) = gq(y) = f(y).$$

Es decir, f es constante en cada clase de equivalencia.

Ahora supongamos que f es constante en cada clase de equivalencia y definimos

$$\begin{aligned} g: X/\sim &\rightarrow Y, \\ [x] &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Veamos que g está bien definida. Si $[x] = [y]$, entonces $x \sim y$ y por lo tanto $f(x) = f(y)$, así que la definición no depende del representante. Notemos que con esta definición se cumple $gq(x) = g([x]) = f(x)$. Por la propiedad universal de la topología final, la función g es continua. \square

Ejemplo 1.5. Consideremos la relación de equivalencia \sim sobre S^1 dada por $(x, y) \sim (x, \pm y)$. Vamos a probar que S^1/\sim es homeomorfo a $[-1, 1]$. Para poder usar la propiedad universal de la topología cociente,

necesitamos construir una función continua $S^1 \rightarrow [-1, 1]$ que sea constante en cada clase de equivalencia. Consideremos la proyección a la primera coordenada

$$\begin{aligned} f: S^1 &\rightarrow [-1, 1], \\ (x, y) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Esta función es continua y satisface

$$f(x, -y) = f(x, y),$$

así que es constante en cada clase de equivalencia. Por lo tanto, existe $g: S^1/\sim \rightarrow [-1, 1]$ continua tal que $f = gq$, con $q: S^1 \rightarrow S^1/\sim$ el cociente.

Veamos que g es inyectiva. Supongamos $g([x, y]) = g([z, w])$. Entonces $x = f(x, y) = f(z, w) = z$. Como (x, y) y (x, w) son puntos de S^1 , tienen norma uno. Entonces $x^2 + y^2 = x^2 + w^2 = 1$, de donde $y^2 - w^2 = 0$ y por lo tanto $y = \pm w$. Entonces $[x, y] = [x, w] = [z, w]$. Para la sobreyectividad, dado $x \in [-1, 1]$, consideremos $(x, \sqrt{1-x^2}) \in S^1$. Se cumple $g([x, \sqrt{1-x^2}]) = x$.

Como S^1 es compacto, también lo es S^1/\sim . Puesto que $[-1, 1]$ es Hausdorff, por el Teorema 1.4, g es un homeomorfismo.

Merece la pena recalcar el caso de que queramos definir una función continua $X/A \rightarrow Y$, donde A es un subespacio de X . Por como se define la relación de equivalencia en X que da lugar a X/A , tendríamos que construir una función continua $X \rightarrow Y$ que enviase todo A a un punto.

2. ALGUNOS HOMEOMORFISMOS IMPORTANTES

En esta sección revisamos algunos homeomorfismos que usaremos en el curso.

Proposición 2.1. S^n es homeomorfo a ∂I^{n+1} .

Demostración. Notemos primero que

$$\partial I^{n+1} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in I^{n+1} \mid x_k = 0 \text{ ó } 1 \text{ para algún } k\},$$

$$\partial[-1/2, 1/2]^{n+1} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in [-1/2, 1/2]^{n+1} \mid x_k = \pm 1/2 \text{ para algún } k\}.$$

Además I^{n+1} es homeomorfo a $[-1/2, 1/2]^{n+1}$ mediante las funciones continuas de translación

$$\begin{aligned} r: I^{n+1} &\rightarrow [-1/2, 1/2]^{n+1}, \\ (x_0, \dots, x_n) &\mapsto (x_0 - 1/2, \dots, x_n - 1/2), \end{aligned}$$

y

$$s: [-1/2, 1/2]^{n+1} \rightarrow I^{n+1},$$

$$(y_0, \dots, y_n) \mapsto (y_0 + 1/2, \dots, y_n + 1/2),$$

las cuales son claramente inversas la una de la otra. Estas dos funciones restringen a funciones continuas entre sus bordes, así que estos también son homeomorfos. Es suficiente probar entonces que S^n es homeomorfo al borde de $[-1/2, 1/2]^{n+1}$. Consideremos la función

$$f: \partial[-1/2, 1/2]^{n+1} \rightarrow S^n,$$

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

Esta función está bien definida pues el origen no pertenece a $\partial[-1/2, 1/2]^{n+1}$. Y es continua, pues dividir por la norma es continua fuera del origen.

Veamos que es inyectiva. Intuitivamente esto es claro pues si dos puntos x y y de $\partial[-1/2, 1/2]^{n+1}$ tienen la misma imagen, entonces deben tener el mismo normalizado, que es la intersección del rayo de \mathbb{R}^{n+1} que pasa por el origen y ese punto con S^n . Pero un rayo en \mathbb{R}^{n+1} que sale del origen sólo corta a S^n y a $\partial[-1/2, 1/2]^{n+1}$ en un punto, así que esos puntos deben ser el mismo. Pero veámoslo algebraicamente también. Supongamos $f(x) = f(y)$, esto es:

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}.$$

Entonces

$$x = \frac{\|x\|}{\|y\|} y.$$

Es decir,

$$x = \lambda y$$

para cierto $\lambda > 0$. Ahora, como x está en el borde de $[-1/2, 1/2]^{n+1}$, existe k tal que $x_k = \pm 1/2$.

$$\pm 1/2 = \lambda y_k \quad \Rightarrow \quad y_k = \frac{\pm 1}{2\lambda}.$$

Como $y_k \in [-1/2, 1/2]$, se debe tener

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{\pm 1}{2\lambda} \leq \frac{1}{2},$$

$$-1 \leq \frac{\pm 1}{\lambda} \leq 1,$$

$$-1 \leq \frac{1}{\lambda} \leq 1.$$

Y como λ es positivo,

$$0 \leq \frac{1}{\lambda} \leq 1,$$

así que $\lambda \geq 1$. Pero también se tiene

$$y = \frac{1}{\lambda}x.$$

Por el mismo proceso obtenemos $\lambda \leq 1$. Por lo tanto $\lambda = 1$, de donde se obtiene que $x = y$.

Veamos ahora que f es sobreyectiva. De nuevo intuitivamente es claro, tomamos el rayo que pasa por el punto que queremos de S^n y ese rayo corta a $[-1/2, 1/2]^{n+1}$ sólo en un punto. Ese es el punto que buscamos. Formalmente, sea (z_0, \dots, z_n) un elemento de S^n . Si queremos que

$$(z_0, \dots, z_n) = \frac{(x_0, \dots, x_n)}{\|(x_0, \dots, x_n)\|}$$

para algún $(x_0, \dots, x_n) \in [-1/2, 1/2]^{n+1}$, entonces

$$\lambda(z_0, \dots, z_n) = (x_0, \dots, x_n).$$

Sabemos que existe k tal que $x_k = \pm 1/2$. El correspondiente z_k cumple $\lambda z_k = \pm 1/2$ y va a ser por lo tanto el más grande en módulo. Como $(z_0, \dots, z_n) \in S^n$, no puede ser el origen y por lo tanto $z_k \neq 0$. Esto nos motiva a hacer lo siguiente. Sea k tal que $|z_k|$ es el máximo de los $|z_j|$. Puede haber más de un k para el que esto pase, pero no importa, escogemos uno de ellos. Usamos la notación $\text{sgn}(a)$ para denotar el signo de a , es decir, 1 si a es positivo o nulo y -1 si a es negativo. Consideremos

$$x_j = \text{sgn}(z_k) \frac{z_j}{2z_k}.$$

Como $|z_j/z_k| \leq 1$, se tiene que

$$\frac{-1}{2} \leq \text{sgn}(z_k) \frac{z_j}{2z_k} \leq \frac{1}{2}$$

y por lo tanto $-1/2 \leq x_j \leq 1/2$, es decir, $(x_0, \dots, x_n) \in [-1/2, 1/2]^{n+1}$. Pero además $x_k = \pm 1/2$, así que $(x_0, \dots, x_n) \in \partial[-1/2, 1/2]^{n+1}$. Se

tiene

$$\begin{aligned}
\frac{(x_0, \dots, x_n)}{\|(x_0, \dots, x_n)\|} &= \frac{(\operatorname{sgn}(z_k) \frac{z_0}{2z_k}, \dots, \operatorname{sgn}(z_k) \frac{z_n}{2z_k})}{\|(\operatorname{sgn}(z_k) \frac{z_0}{2z_k}, \dots, \operatorname{sgn}(z_k) \frac{z_n}{2z_k})\|} \\
&= \operatorname{sgn}(z_k) \frac{(z_0, \dots, z_n)}{\frac{2z_k}{|2z_k|} \|(z_0, \dots, z_n)\|} \\
&= \operatorname{sgn}(z_k) \frac{(z_0, \dots, z_n)}{\operatorname{sgn}(z_k)} \\
&= (z_0, \dots, z_n),
\end{aligned}$$

luego f es sobreyectiva. Como $\partial[-1/2, 1/2]^{n+1}$ es compacto (es cerrado y acotado en \mathbb{R}^{n+1}) y S^n es Hausdorff, f es un homeomorfismo. \square

Proposición 2.2. D^n es homeomorfo a I^n .

Demostración: Como ya vimos en la proposición anterior que I^n es homeomorfo a $[-1/2, 1/2]^n$, probaremos que D^n es homeomorfo a $[-1/2, 1/2]^n$. Consideremos un homeomorfismo $h: S^{n-1} \rightarrow \partial[-1/2, 1/2]^n$, que sabemos que existe por la proposición anterior. Definamos

$$\begin{aligned}
g: D^n &\rightarrow [-1/2, 1/2]^n, \\
x &\mapsto \begin{cases} \|x\|h(x/\|x\|), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

La función g es claramente continua en $D^n - \{0\}$. Para ver que es continua en el origen, notemos que $\partial[-1/2, 1/2]^n$ es compacto, así que la función norma $\partial[-1/2, 1/2]^n \rightarrow \mathbb{R}$ alcanza un máximo, digamos M . Si $x \neq 0$ se tiene

$$\|g(x)\| \leq \|x\| \|h(x/\|x\|)\| \leq M\|x\|,$$

y por lo tanto, g es continua en el origen.

Veamos que es inyectiva. Notemos primero que $g(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, pues $\|x\|$ es no nulo y $h(x/\|x\|)$ no puede ser el origen pues está en el borde de $[-1/2, 1/2]^n$. Si $g(x) = g(y)$ con $x, y \neq 0$, entonces

$$\|x\|h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|y\|h\left(\frac{y}{\|y\|}\right),$$

luego

$$h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \lambda h\left(\frac{y}{\|y\|}\right)$$

para cierto $\lambda > 0$. Esto muestra dos elementos del borde de $[-1/2, 1/2]^n$ que son un múltiplo escalar positivo el uno del otro. Por el mismo argumento de la proposición anterior, esto sólo puede pasar con $\lambda = 1$,

así que

$$h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = h\left(\frac{y}{\|y\|}\right)$$

y $\|x\| = \|y\|$. Como h es un homeomorfismo,

$$\frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|} = \frac{y}{\|x\|},$$

de donde $x = y$.

Veamos ahora que es sobreyectiva. Sea $z \in [-1/2, 1/2]^n$ distinto del origen. Sea $|z_k|$ el máximo de los $|z_j|$. Al igual que en la proposición anterior, si este máximo ocurre en varios k elegimos uno. Consideremos $(z_0/2|z_k|, \dots, z_n/2|z_k|)$. Por la elección de k , se tiene que $-1/2 \leq z_i/2|z_k| \leq 1/2$ para todo i y además $z_k/2|z_k| = \pm 1/2$. Es decir, $(z_0/2|z_k|, \dots, z_n/2|z_k|) \in \partial[-1/2, 1/2]^n$. Como h es un homeomorfismo, existe $x \in S^{n-1}$ tal que

$$h(x) = (z_0/2|z_k|, \dots, z_n/2|z_k|).$$

Consideremos $w = 2|z_k|x$. Se tiene

$$g(w) = \|w\|h(w/\|w\|) = 2|z_k|h(x) = z,$$

y por lo tanto g es biyectiva. Como D^n es compacto (cerrado y acotado en \mathbb{R}^n) y $[-1/2, 1/2]^n$ es Hausdorff, g es un homeomorfismo. \square

Proposición 2.3. *Consideremos el punto $N = (0, \dots, 0, 1)$ en S^n . El espacio $S^n - \{N\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n .*

Demostración: La línea que une el punto $N = (0, \dots, 0, 1)$ con un punto cualquiera (y_1, \dots, y_{n+1}) de $S^n - \{N\}$ está dada por la ecuación paramétrica

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) = (0, \dots, 0, 1) + \lambda(y_1, \dots, y_n, y_{n+1} - 1).$$

La intersección de esta recta con el hiperplano $x_{n+1} = 0$ de \mathbb{R}^{n+1} ocurre cuando

$$\lambda = \frac{-1}{y_{n+1} - 1} = \frac{1}{1 - y_{n+1}},$$

lo cual tiene sentido, pues el único punto de la esfera que tiene $y_{n+1} = 1$ es N . Por lo tanto, la intersección es el punto

$$\left(\frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{1 - y_{n+1}}, 0\right).$$

Definimos

$$f: S^n - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$(y_1, \dots, y_{n+1}) \mapsto \left(\frac{y_1}{1 - y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{1 - y_{n+1}}\right).$$

Esta función es la restricción de dominio de la función $g: \mathbb{R}^{n+1} - \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con la misma expresión, la cual es continua. Por lo tanto, f es continua.

Por otra parte, la línea que une el punto N con un punto cualquiera $(z_1, \dots, z_n, 0)$ del hiperplano $x_{n+1} = 0$ de \mathbb{R}^{n+1} está dada por la ecuación paramétrica

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) = (0, \dots, 0, 1) + \lambda(z_1, \dots, z_n, -1).$$

Las intersecciones de esta recta con la esfera ocurren cuando

$$\lambda^2 z_1^2 + \dots + \lambda^2 z_n^2 + (1 - \lambda)^2 = 1,$$

es decir,

$$\lambda^2 z_1^2 + \dots + \lambda^2 z_n^2 + \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

La solución $\lambda = 0$ corresponde a N . El otro punto corresponde a la solución de

$$\lambda z_1^2 + \dots + \lambda z_n^2 + \lambda = 2$$

Es decir

$$\lambda = \frac{2}{z_1^2 + \dots + z_n^2 + 1},$$

que nos proporciona el punto

$$\left(\frac{2z_1}{z_1^2 + \dots + z_n^2 + 1}, \dots, \frac{2z_n}{z_1^2 + \dots + z_n^2 + 1}, 1 - \frac{2}{z_1^2 + \dots + z_n^2 + 1} \right),$$

lo cual tiene sentido, pues la última coordenada es siempre menor que uno. Definimos la función

$$h: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{N\},$$

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto \left(\frac{2z_1}{z_1^2 + \dots + z_n^2 + 1}, \dots, \frac{2z_n}{z_1^2 + \dots + z_n^2 + 1}, 1 - \frac{1}{z_1^2 + \dots + z_n^2 + 1} \right).$$

Esta función es la restricción de codominio de la función $j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con la misma expresión, la cual es continua. Por lo tanto, h es continua. Por construcción, h es la inversa de f , aunque también se podría comprobar algebraicamente (laboriosamente) que $fh(z) = z$ y $hf(y) = y$. Por lo tanto f y h son homeomorfismos. \square

Corolario 2.4. *Sea $x \in S^n$. Demuestra que $S^n - \{x\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n .*

Demostración: Veamos a x como un vector en \mathbb{R}^{n+1} de norma uno. Es posible encontrar una base ortonormal $B = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ de \mathbb{R}^{n+1} con $v_{n+1} = x$. Sea $E = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ la base ortonormal estándar de \mathbb{R}^{n+1} . La matriz A de cambio de base de B a E lleva x a $N = e_{n+1}$ y además es ortogonal ($A^{-1} = A^T$), con lo que preserva la norma. Por lo

tanto induce una función continua por restricción de dominio e imagen $S^n - \{x\} \rightarrow S^n - \{N\}$. De la misma manera la matriz A^{-1} induce una función continua $S^n - \{N\} \rightarrow S^n - \{x\}$. Estas dos funciones son inversas la una de la otra, así que $S^n - \{x\}$ es homeomorfo a $S^n - \{N\}$. Por la proposición anterior, concluimos que $S^n - \{x\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n . \square

Proposición 2.5. *El espacio $\mathbb{R}P^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$, donde $x \sim y$ si $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.*

Demostración: Recordemos que $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim'$, donde $x \sim' y$ si $x = \pm y$. Usamos las notaciones $[a]'$ y $[a]$ para denotar las clases de equivalencia de \sim' y \sim , respectivamente.

Consideremos la composición de la inclusión $j: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ con el cociente $q: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$. Notemos que se tiene

$$qj(-y) = qj(y)$$

y por lo tanto qj es constante en cada clase de equivalencia de \sim' . En consecuencia, existe $f: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$ continua tal que $fp = qj$, donde $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ es el cociente. Esta función está dada entonces por $f([x]') = [x]$. Veamos que f es un homeomorfismo.

Podemos construir la inversa de la siguiente manera. Consideremos la composición de la función normalización $N: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$ (dividir por la norma) con el cociente $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Se tiene

$$N(\lambda x) = \pm N(x)$$

y por lo tanto $pN(\lambda x) = pN(x)$. Es decir, pN es constante en cada clase de equivalencia de \sim . Entonces existe $g: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim \rightarrow \mathbb{R}P^n$ continua tal que $pN = gq$. Es decir $g([a]) = [a/\|a\|]'$. Es claro que g es la inversa de f , así que f es un homeomorfismo. \square

Proposición 2.6. *El espacio $\mathbb{R}P^n$ es homeomorfo a D^n/\sim , donde $x \sim y$ si $x = y$ ó si $x, y \in \partial D^n$ y $x = \pm y$.*

Demostración: Consideremos el subespacio

$$D_+^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_n \geq 0\}$$

de S^n y la relación de equivalencia \sim_2 sobre D_+^n dada por $x \sim_2 y$ si $x = y$ ó si $x_n = y_n = 0$ y $x = \pm y$. Denotamos las clases de equivalencia por $[a]_2$ y las de $\mathbb{R}P^n$ por $[a]'$ igual que en la proposición anterior.

Consideremos la composición de la inclusión $j: D_+^n \rightarrow S^n$ con el cociente $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Si $x_n = y_n = 0$ y $y = \pm x$, se tiene

$$pj(y) = pj(x),$$

así que pj es constante en cada clase de equivalencia de \sim_2 y por lo tanto existe $f: D_+^n/\sim_2 \rightarrow \mathbb{R}P^n$ tal que $fj = pj$, donde $q: D_+^n \rightarrow D_+^n/\sim_2$ es el cociente. Es decir, $f([a]_2) = [a]'$.

Construyamos la inversa. Consideremos la función

$$h: S^n \rightarrow D_+^n,$$

$$x \mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x_n \geq 0, \\ -x, & \text{si } x_n \leq 0. \end{cases}$$

Esta función es continua porque es continua en cada uno de los dos trozos cerrados y las definiciones coinciden en la intersección. Además se cumple

$$h(-x) = h(x),$$

así que qh es constante en cada clase de equivalencia y por lo tanto, existe $g: \mathbb{R}P^n \rightarrow D_+^n$ continua tal que $gp = qh$. Es decir, $g([x]') = [h(x)]_2$. Si $x_n \geq 0$, entonces

$$fg([x]') = f([x]_2) = [x]'$$

Si $x_n \leq 0$, entonces

$$fg([x]') = f([-x]_2) = [-x]' = [x]'$$

Y siempre se tiene

$$gf([a]_2) = g([a]') = [a]_2,$$

luego $\mathbb{R}P^n$ es homeomorfo a D_+^n/\sim_2 . Es fácil ahora ver que D_+^n/\sim_2 es homeomorfo a D^n/\sim . Consideremos la función continua

$$r: D^n \rightarrow D_+^n,$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(y_1, \dots, y_n, \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2} \right).$$

Si $y, z \in \partial D^n$ y $y = \pm z$, entonces

$$1 - y_1^2 - \dots - y_n^2 = 0 = 1 - z_1^2 - \dots - z_n^2$$

y por lo tanto $r(y) \sim_2 r(z)$, es decir, $qr(y) = qr(z)$. La función qr es constante en cada clase de equivalencia, así que por la propiedad universal de la topología cociente, existe $R: D^n/\sim \rightarrow D_+^n/\sim_2$ continua tal que $qr = R\pi$, donde $\pi: D^n \rightarrow D^n/\sim$ es el cociente.

Igualmente consideremos la composición de la función continua

$$s: D_+^n \rightarrow D_n,$$

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_{n-1}),$$

con el cociente π . Si $x_n = 0 = w_n$ y $x = \pm w$, entonces se tiene $x_0^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1 = w_0^2 + \dots + w_{n-1}^2$. Es decir, $s(x)$ y $s(w)$ están en ∂D^n y además $s(x) = \pm s(w)$. Por lo tanto $\pi s(x) = \pi s(w)$, es decir, πs

es constante en cada clase de equivalencia y por la propiedad universal de la topología cociente, existe $S: D_+^n/\sim_2 \rightarrow D^n/\sim$ continua tal que $\pi s = Sp$. Se cumple

$$\begin{aligned} RS([(x_0, \dots, x_n]_2) &= R([x_0, \dots, x_{n-1}]) \\ &= \left[x_0, \dots, x_{n-1}, \sqrt{1 - x_0^2 - \dots - x_{n-1}^2} \right]_2 \\ &= [x_0, \dots, x_{n-1}, x_n]_2, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se tiene porque $x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1$ y $x_n \geq 0$. Por otra parte,

$$SR([y_1, \dots, y_n]) = S \left(\left[y_1, \dots, y_n, \sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_n^2} \right]_2 \right) = [y_1, \dots, y_n],$$

luego estos espacios son homeomorfos y por lo tanto $\mathbb{R}P^n \cong D^n/\sim$. \square

Proposición 2.7. *El espacio S^n es homeomorfo a $D^n/\partial D^n$.*

Demostración: Consideremos la función

$$f: D^n \rightarrow S^n, \\ x \mapsto \begin{cases} \left(\sin(\|x\|\pi) \frac{x}{\|x\|}, \cos(\|x\|\pi) \right), & \text{si } x \neq 0, \\ (0, \dots, 0, 1), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Notemos primero que está bien definida pues $f(x)$ siempre tiene norma uno. Es claramente continua en la región donde $x \neq 0$, así que sólo resta comprobar la continuidad en $x = 0$. Notemos que si $z \neq 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(0)\|^2 &= \sum_{i=1}^n \sin^2(\|z\|\pi) \frac{z_i^2}{\|z\|^2} + (\cos(\|z\|\pi) - 1)^2 \\ &= \sin^2(\|z\|\pi) \frac{\|z\|^2}{\|z\|^2} + (\cos(\|z\|\pi) - 1)^2 \\ &= \sin^2(\|z\|\pi) + (\cos(\|z\|\pi) - 1)^2. \end{aligned}$$

Sea $\{x_m\}$ una sucesión en D^n que converge al origen. Entonces se tiene

$$0 \leq \|f(x_m) - f(0)\|^2 \leq \sin^2(\|x_m\|\pi) + (\cos(\|x_m\|\pi) - 1)^2.$$

Como el lado izquierdo y el derecho convergen a cero, también el término central converge a cero. Es decir, f es continua en el origen.

Sea y un elemento de ∂D^n . Esto quiere decir que tiene norma uno y por lo tanto

$$f(y) = (\sin(\pi)y, \cos(\pi)) = (0, \dots, 0, -1).$$

Como f envía todo ∂D^n a un punto, por la propiedad universal de la topología cociente, existe una función continua $g: D^n/\partial D^n \rightarrow S^n$ tal que $gq = f$, donde $q: D^n \rightarrow D^n/\partial D^n$ es el cociente.

Supongamos que $g([x]) = g([z])$, es decir, $f(x) = f(z)$. Si $x = 0$ ó $z = 0$, el otro está forzado a serlo también, pues $\sin(\|a\|\pi)\frac{a}{\|a\|} \neq (0, \dots, 0)$ si $a \in D^n - \{0\} - \partial D^n$ y $\cos(\|a\|\pi) \neq 0$ si $a \in \partial D^n$. Así que supongamos que ninguno de los dos es el origen. Como \cos es inyectiva en $[0, \pi]$, comparando las últimas coordenadas obtenemos $\|x\| = \|z\|$. Si esta norma es uno, ya se tendría que x y z están en ∂D^n y por lo tanto $[x] = [z]$. Si es menor que uno, entonces con el resto de coordenadas tendríamos

$$\sin(\|x\|\pi)\frac{x}{\|x\|} = \sin(\|x\|\pi)\frac{z}{\|x\|},$$

donde $\sin(\|x\|\pi) \neq 0$ y $\|x\| \neq 0$, así que $x = z$. En cualquiera de los casos, $[x] = [z]$ y por lo tanto g es inyectiva.

Sea $(y, z) \in S^n$, donde $y \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}$. Como la norma de (y, z) es uno, se debe tener que $-1 \leq z \leq 1$ y por lo tanto, existe un único $t \in [0, 1]$ tal que $\cos(t\pi) = z$. Si $t = 0$, esto significa que $z = 1$ y que $y = 0$ y en este caso

$$g([0]) = f(0) = (0, 1).$$

Si $t = 1$, entonces $z = -1$ y $y = 0$ y se tiene igualmente

$$g([1, 0, \dots, 0]) = (0, -1).$$

Así que supongamos que $-1 < t < 1$ y consideremos $w = \frac{ty}{\sin(t\pi)}$, el cual tiene sentido pues el denominador no es nulo. Notemos que

$$\|w\|^2 = \frac{t^2}{\sin(t\pi)^2}\|y\|^2 = \frac{t^2}{1 - \cos(t\pi)^2}\|y\|^2 = \frac{t^2}{1 - z^2}(1 - z^2) = t^2,$$

luego $\|w\| = t$. En particular $w \in D^n$. Además,

$$g([w]) = f(w) = \left(\sin(t\pi)\frac{w}{t}, \cos(t\pi) \right) = (y, z).$$

Esto prueba que g es sobreyectiva. Como D^n es compacto, también lo es $D^n/\partial D^n$. Como g es biyectiva, $D^n/\partial D^n$ es compacto y S^n es Hausdorff, g es un homeomorfismo. \square

3. COMPATIBILIDAD DE LA TOPOLOGÍA FINAL CON PRODUCTOS

En general, la topología producto y la topología cociente no son compatibles en el siguiente sentido. Si un espacio topológico X tiene la topología final respecto de una familia $\{f_j: Z_j \rightarrow X\}_{j \in J}$ y el espacio Y tiene la topología final respecto de una familia $\{g_l: W_l \rightarrow Y\}_{l \in L}$, no es necesariamente cierto que la topología producto en $X \times Y$ coincida

con la topología final respecto de la familia $\{f_j \times g_l: Z_j \times W_l \rightarrow X \times Y\}_{(j,l) \in J \times L}$.

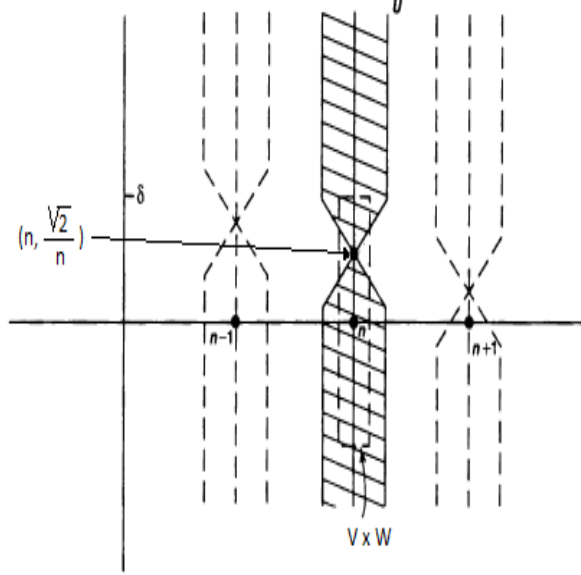
Lo que sí se cumple siempre es que la topología producto está contenida en la topología final. Pues como las f_j y las g_l son continuas, también lo son las $f_j \times g_l$ cuando le ponemos la topología producto a $X \times Y$. La topología final es la más grande tal que estas funciones son continuas, así que debe contener la topología producto. Veamos un ejemplo en el que las dos topologías no coinciden.

Ejemplo 3.1. Sea $X = \mathbb{R}/\mathbb{N}$ con la topología cociente. Es decir, X tiene la topología final respecto del cociente $q: \mathbb{R} \rightarrow X$. Y consideremos \mathbb{Q} con la topología de subespacio de \mathbb{R} . Entonces \mathbb{Q} tiene la topología final respecto de $1_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$.

Veremos que la topología producto de $X \times \mathbb{Q}$ no coincide con la topología final respecto de la función $p \times 1_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow X \times \mathbb{Q}$. Sea $q = p \times 1_{\mathbb{Q}}$ y consideremos el abierto

$$U = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \mid |x - n| < \min \left\{ \left| y - \frac{\sqrt{2}}{n} \right|, 1/4 \right\} \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \right\}$$

de $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$. Claramente contiene los conjuntos $\{n\} \times \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Recordemos que siempre se tiene $U \subseteq q^{-1}q(U)$. Sea $(a, b) \in q^{-1}q(U)$. Entonces $q(a, b) = q(u, b)$ para algún $(u, b) \in U$. Es decir, $[a] = [u]$ en X . Si $a = u$, entonces $(a, b) \in U$. Si $a \neq u$, se debe tener que ambos son naturales. Y entonces $(a, b) \in \{a\} \times \mathbb{Q} \subseteq U$. Luego $U = q^{-1}q(U)$ y en particular, $q(U)$ es un abierto de $X \times \mathbb{Q}$ con la topología final respecto de q .



Supongamos que $q(U)$ fuese abierto en la topología producto. Entonces dado $([1], 0) \in q(U)$ deberían existir vecindades abiertas V y W de $[1]$ y 0 en X y \mathbb{Q} , respectivamente tales que $V \times W \subseteq q(U)$. Como \mathbb{Q} tiene la topología de subespacio de \mathbb{R} , tiene una base de vecindades abiertas dada por intersecciones de intervalos abiertos finitos simétricos (respecto del punto del que es vecindad) con \mathbb{Q} . Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \cap \mathbb{Q} \subseteq W$. Por lo tanto

$$V \times [(-\delta, \delta) \cap \mathbb{Q}] \subseteq q(U)$$

y entonces

$$p^{-1}(V) \times [(-\delta, \delta) \cap \mathbb{Q}] \subseteq q^{-1}q(U) = U.$$

Elijamos un entero n tal que $\frac{\sqrt{2}}{n} < \delta$. Como $p^{-1}(V)$ es abierto en \mathbb{R} y contiene a n , existe $\varepsilon < 1/4$ y menor que $2(\delta - \frac{\sqrt{2}}{n})$ tal que $(n - \varepsilon, n + \varepsilon) \subseteq p^{-1}(V)$. Es decir,

$$(n - \varepsilon, n + \varepsilon) \times [(-\delta, \delta) \cap \mathbb{Q}] \subseteq U.$$

Existe un racional y tal que $\left| y - \frac{\sqrt{2}}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces, puesto que $n + \varepsilon/2 \in (n - \varepsilon, n + \varepsilon)$, se tienen

$$y < \frac{\sqrt{2}}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\sqrt{2}}{n} + \delta - \frac{\sqrt{2}}{n} = \delta,$$

$$y > \frac{\sqrt{2}}{n} - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{\sqrt{2}}{n} + \frac{\sqrt{2}}{n} - \delta > -\delta,$$

así que el punto $(n + \varepsilon/2, y) \in (n - \varepsilon, n + \varepsilon) \times [(-\delta, \delta) \cap \mathbb{Q}]$. Para que este punto estuviese en U , la primera coordenada tendría que estar a distancia menor de $1/4$ de un entero. Como $\varepsilon < 1/4$, entonces $n + \varepsilon/2$ sólo puede cumplir esa condición con el entero n . Es decir,

$$\left| y - \frac{\sqrt{2}}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} = |n + \varepsilon/2 - n|,$$

así que no está en U , lo cual es una contradicción. Por lo tanto, U no es un abierto de la topología producto.

Recordemos algunas definiciones y resultados de topología de conjuntos que vamos a usar.

Definición 3.2. Un espacio X es localmente compacto si para cada $x \in X$ existe un compacto C y una vecindad abierta U de x tal que $U \subseteq C$.

Lema 3.3. Si X es localmente compacto y Hausdorff y $x \in X$, toda vecindad abierta de x contiene otra vecindad abierta V tal que \bar{V} es compacto.

Demostración: Ver Teorema 29.2 en el libro Topology de Munkres. \square

En contextos donde todos los espacios son Hausdorff, a veces la condición de este lema anterior se toma como definición de localmente compacto.

Lema del tubo. Sea Y un espacio compacto. Si N es un abierto de $X \times Y$ que contiene un conjunto de la forma $\{x_0\} \times Y$ para algún $x_0 \in X$, entonces N contiene un conjunto de la forma $W \times Y$, donde W es una vecindad abierta de x_0 en X .

Demostración: Ver Lema 26.8 en el libro Topology de Munkres. \square

Proposición 3.4. Si Y tiene la topología final respecto de una función sobreyectiva $p: X \rightarrow Y$ y Z es localmente compacto y Hausdorff, entonces la topología producto sobre $Y \times Z$ coincide con la topología final respecto de la función $p \times 1_Z: X \times Z \rightarrow Y \times Z$.

Demostración: Ya sabemos que la topología producto está contenida en la final. Veamos la otra inclusión. Sea U un abierto de la topología final de $Y \times Z$ respecto de $q = p \times 1_Z$. Tenemos que probar que dado $(y, z) \in U$, existen vecindades abiertas V_y y V_z de y y z , respectivamente, tales que $V_y \times V_z \subseteq U$.

Como U es un abierto de la topología final, se tiene que $q^{-1}(U)$ es abierto en $X \times Z$. Y por ser p sobreyectiva, existe x tal que $p(x) = y$.

Entonces $(x, z) \in q^{-1}(U)$ y puesto que $X \times Z$ tiene la topología producto, existen vecindades abiertas W_1 y W de x y z , respectivamente, tales que $W_1 \times W \subseteq q^{-1}(U)$. Como Z es localmente compacto y Hausdorff, existe una vecindad abierta V de z tal que \bar{V} es compacto y $\bar{V} \subseteq W$. En particular

$$(x, z) \in W_1 \times V \subseteq W_1 \times \bar{V} \subseteq q^{-1}(U).$$

El problema aquí es que generalmente $p(W_1)$ no será abierto porque W_1 no es necesariamente saturado. Pero siempre se tiene $W_1 \subseteq p^{-1}p(W_1)$. Si a es un punto de $p^{-1}p(W_1)$, entonces $\{a\} \times \bar{V} \subseteq q^{-1}(U)$, pues

$$q(a, v) = (p(a), v) = (p(w_1), v) = q(w_1, v) \in U.$$

Por el Lema del tubo aplicado a la inclusión $\{a\} \times \bar{V} \subseteq q^{-1}(U)$, existe una vecindad abierta O_a de a tal que $O_a \times \bar{V} \subseteq q^{-1}(U)$. Sea

$$W_2 = \bigcup_{a \in p^{-1}p(W_1)} O_a.$$

Entonces W_2 es abierto en X y cumple

$$p^{-1}p(W_1) \times \bar{V} \subseteq W_2 \times \bar{V} \subseteq q^{-1}(U).$$

Repetimos el mismo proceso y así obtenemos una secuencia de abiertos $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots$ tales que $p^{-1}p(W_i) \subseteq W_{i+1}$ y $W_i \times \bar{V} \subseteq q^{-1}(U)$ para todo i . Ahora consideremos

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i,$$

la cual es una vecindad abierta de x en X . Veamos que $p(A)$ es una vecindad abierta de y . Esto se cumple porque

$$A \subseteq p^{-1}p(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p^{-1}p(W_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i = A$$

así que $A = p^{-1}p(A)$ y por lo tanto $p(A)$ es abierto en Y . Y además

$$p(A) \times V \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} p(W_i) \times V = \bigcup_{i=1}^{\infty} q(W_i \times V) \subseteq U.$$

Así que $p(A)$ y V son las vecindades que buscábamos y en consecuencia hemos probado que U está en la topología producto. \square

Corolario 3.5. Sean Y y Z espacios topológicos con la topología final respecto de las funciones sobreyectivas $p: X \rightarrow Y$ y $q: W \rightarrow Z$, respectivamente. Si X y Z son localmente compactos y Hausdorff (ó W y Y), entonces la topología producto de $Y \times Z$ coincide con la topología final respecto de $p \times q: X \times W \rightarrow Y \times Z$.

Demostración: Supongamos que X y Z son localmente compactos y Hausdorff. La función $p \times q$ es igual a la composición

$$X \times W \xrightarrow{1_X \times q} X \times Z \xrightarrow{p \times 1_Z} Y \times Z.$$

Sea U un abierto de la topología final respecto de $p \times q$. Entonces $(p \times q)^{-1}(U)$ es abierto en $X \times W$. Pero

$$(p \times q)^{-1}(U) = (1_X \times q)^{-1}(p \times 1_Z)^{-1}(U),$$

así que esto implica que $(p \times 1_Z)^{-1}(U)$ es un abierto de la topología final respecto de $1_X \times q$. Por la proposición anterior, $(p \times 1_Z)^{-1}(U)$ es un abierto de la topología producto de $X \times Z$. Luego U es un abierto de la topología final respecto de $p \times 1_Z$ y de nuevo por la proposición anterior, U es un abierto de la topología producto de $Y \times Z$. El caso en que W y Y son localmente compactos y Hausdorff es análogo. \square

Lema 3.6. *La topología final respecto de la familia $\{f_j: X_j \rightarrow Y\}_{j \in J}$ coincide con la topología final respecto de la función $\prod_{j \in J} f_j: \prod_{j \in J} X_j \rightarrow Y$.*

Demostración: Un subconjunto $U \subseteq Y$ pertenece a la topología final respecto de esa familia si y sólo si $f_j^{-1}(U)$ es abierto en X_j para todo $j \in J$. Pero esto se satisface si y sólo si $\prod_{j \in J} f_j^{-1}(U)$ es abierto en $\prod_{j \in J} X_j$. Y se tiene

$$\prod_{j \in J} f_j^{-1}(U) = \left(\prod_{j \in J} f_j \right)^{-1}(U).$$

Así que se cumple si y sólo si U pertenece a la topología final respecto de $\prod_{j \in J} f_j$. \square

Lema 3.7. *Los espacios $(\prod_{j \in J} X_j) \times Z$ y $\prod_{j \in J} (X_j \times Z)$ son homeomorfos.*

Demostración. Notemos primero que una base de abiertos para ambos espacios está dada por abiertos de la forma $U_j \times W$, donde U_j es un abierto de X_j y W es un abierto de Z . Consideremos las funciones

$$h: \prod_{j \in J} (X_j \times Z) \rightarrow \left(\prod_{j \in J} X_j \right) \times Z,$$

$$(x_j, z) \mapsto (x_j, z),$$

y

$$g: \left(\prod_{j \in J} X_j \right) \times Z \rightarrow \prod_{j \in J} (X_j \times Z),$$

$$(x_j, z) \mapsto (x_j, z).$$

Esta función es claramente la inversa de h . Y ambas funciones son continuas pues la imagen inversa de $U_j \times W$ es precisamente $U_j \times W$. \square

Teorema 3.8. *Si un espacio Y tiene la topología final respecto de una familia $\{f_j: X_j \rightarrow Y\}_{j \in J}$ tal que todo $y \in Y$ está en la imagen de algún f_j y Z es un espacio topológico localmente compacto y Hausdorff, entonces la topología producto sobre $Y \times Z$ coincide con la topología final respecto de la familia $\{f_j \times 1_Z: X_j \times Z \rightarrow Y \times Z\}_{j \in J}$.*

Demostración. Por el Lema 3.6, la topología final respecto de la familia $\{f_j \times 1_Z\}_{j \in J}$ es la topología final respecto de la función $\prod_{j \in J} (f_j \times 1_Z)$. Pero el homeomorfismo h construido en el Lema 3.7 forma el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \prod_{j \in J} (X_j \times Z) & \longrightarrow & Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & h \downarrow & (\prod_{j \in J} f_j) \times 1_Z \\ \left(\prod_{j \in J} X_j \right) \times Z & & \end{array}$$

donde la función horizontal superior es $\prod_{j \in J} (f_j \times 1_Z)$, así que también coincide con la topología final respecto de la función $(\prod_{j \in J} f_j) \times 1_Z$.

De nuevo por el Lema 3.6, la topología de Y es la final respecto de la función $\prod_{j \in J} f_j$. Y como todo $y \in Y$ está en la imagen de algún f_j , esta función es sobreyectiva. Ahora estamos en las hipótesis de la Proposición 3.4, así que esta topología coincide con la topología producto. \square

Puesto que vamos a estar interesados en construir homotopías con espacios que tengan topología final, el siguiente resultado será muy útil.

Corolario 3.9. *Si un espacio Y tiene la topología final respecto de una familia $\{f_j: X_j \rightarrow Y\}_{j \in J}$ tal que todo $y \in Y$ está en la imagen de algún f_j , entonces la topología producto sobre $Y \times I$ coincide con la topología final respecto de la familia $\{f_j \times 1_I: X_j \times I \rightarrow Y \times I\}_{j \in J}$.*

4. HOMOTOPÍA Y EL GRUPO FUNDAMENTAL

En esta sección daremos un resumen sin demostraciones de las definiciones y resultados básicos de homotopía, el grupo fundamental y espacios recubridores que normalmente se estudian en un primer curso de topología algebraica. A partir de este momento, todas las funciones son continuas a menos que se especifique lo contrario.

Definición 4.1. Sean $f, g: X \rightarrow Y$. Diremos que f es homótopa a g si existe una función continua $H: X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Denotamos esto por $f \simeq g$ y llamamos a H una homotopía de f a g . Esto define una relación de equivalencia en el conjunto de funciones continuas de X a Y . Es conveniente pensar en la homotopía H como en la familia continua de funciones H_t que envían x a $H(x, t)$, que intercalan entre f y g .

Más generalmente, si A es un subespacio de X y $f, g: X \rightarrow Y$ son dos funciones que coinciden en A , diremos que f es homótopa a g relativa a A , si existe una homotopía H de f a g que cumple $H(a, t) = H(a, 0)$ para todo $a \in A$ y $t \in I$. Es decir, la homotopía es estacionaria en A . En este caso denotamos $f \simeq g \text{ rel } A$.

Definición 4.2. Decimos que $f: X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si existe $g: Y \rightarrow X$ tal que $fg \simeq 1_Y$ y $gf \simeq 1_X$.

Cuando existe una equivalencia homotópica entre X y Y , decimos que son homotópicamente equivalentes o que tienen el mismo tipo de homotopía, y lo denotamos mediante $X \simeq Y$. Cuando un espacio tipo el tipo de homotopía de un punto, se dice que es contráctil.

En topología algebraica se usan invariantes homotópicos, generalmente de carácter algebraico, para descartar que dos espacios puedan ser homotópicamente equivalentes. Es decir, una asignación A que satisface que si $X \simeq Y$, entonces $A(X)$ es isomorfo a $A(Y)$ para la noción correspondiente de isomorfismo de la categoría donde toma valores A . Varios de los invariantes comunes que se usan definen funtores desde ciertas categorías de espacios topológicos y cumplen que si dos morfismos son homótopos, sus imágenes son iguales. Esto implica lo anterior.

Un primer invariante homotópico functorial es el conjunto de componentes arcoconexas $\pi_0(X)$ de X . Un invariante más potente es el grupo fundamental. Dado un punto base $x_0 \in X$, el grupo fundamental de X relativo a x_0 es el conjunto

$$\pi_1(X, x_0) = \{f: I \rightarrow X \mid f(0) = f(1) = x_0\} / \simeq \text{ rel } \partial I$$

con la operación

$$[f][g] = [f \cdot g],$$

donde $f \cdot g$ denota la concatenación de caminos dada por

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } t \leq 1/2, \\ g(2t - 1), & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

Esta operación dota a $\pi_1(X, x_0)$ de estructura de grupo, no necesariamente abeliano. La elección del punto base no juega un papel importante desde el punto de vista computacional porque si x_0 y x_1 están en la misma componente arcoconexa, entonces $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ y en estos casos a menudo se omite el punto base de la notación. Se dice que X es simplemente conexo si es arcoconexo y $\pi_1(X) = \{1\}$.

Por otra parte, la elección de punto base causa que el grupo fundamental no defina un funtor desde la categoría de espacios topológicos, aunque sí desde la categoría de espacios topológicos punteados. Esta es la categoría cuyos objetos son pares (X, x_0) , donde $x_0 \in X$, y cuyos morfismos son funciones continuas que envían el punto base al punto base. A pesar de esto, se puede probar que si $f: X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica que envía x_0 a y_0 , la función inducida $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo. Las siguientes propiedades se pueden probar de manera elemental:

- $\pi_1(S^n) = \{1\}$ si $n \geq 2$.
- $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Para realizar cálculos más serios se necesita el teorema de van Kampen y la teoría de espacios recubridores.

Teorema de van Kampen. *Si X es la unión de subespacios abiertos arcoconexos Y_α que contienen al punto x_0 y todas las dobles y triples intersecciones de estos subespacios son arcoconexas, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al producto amalgamado de los grupos $\pi_1(Y_\alpha, x_0)$, donde la amalgamación es con respecto a los homomorfismos $\pi_1(Y_\alpha \cap Y_\beta) \rightarrow \pi_1(Y_\alpha)$ inducidos por las inclusiones.*

Usando el Teorema de van Kampen y el cálculo $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$, el cual se mencionará más adelante, el cálculo de grupos fundamentales de CW-complejos se convierte en un proceso mecánico. Como consecuencia del Teorema de van Kampen, se puede probar el siguiente resultado.

Proposición 4.3. *Si X es un CW-complejo, la inclusión induce un isomorfismo $\pi_1(X^{(n)}, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ para cualquier $x_0 \in X^{(n)}$ y*

cualquier $n \geq 2$. Además, para cualquier $x_0 \in X^{(1)}$, existe un isomorfismo

$$\pi_1(X^{(2)}, x_0) \cong \pi_1(X^{(1)}, x_0)/N,$$

donde N es el subgrupo normal generado por los lazos determinados por las funciones $S^1 \rightarrow X^{(1)}$ de pegado de las 2-celdas tras cambiar el punto base.

Esta proposición reduce el cálculo del grupo fundamental de un CW-complejo al de CW-complejos de dimensión uno, es decir, grafos, y la determinación de N . Ambos pasos son mecánicos. Cualquier grafo arcoconexo X posee un árbol maximal T , es decir, un subgrafo contráctil que contiene todos los vértices de X . Cada arista que no está en T determina un lazo en x_0 dada por concatenar un camino en T de x_0 al principio de la arista, la arista, y un camino en T del final de la arista a x_0 . El grupo fundamental de X es libre, con una base dada por las clases de estos lazos. En el caso de un CW-complejo de dimensión dos, una vez determinamos estos lazos en su 1-esqueleto, es sencillo expresar los lazos determinados por las funciones de pegado de las 2-celdas como concatenación de estos y sus opuestos.

Por último, resumimos la teoría de espacios recubridores.

Definición 4.4. Se dice que una función $p: E \rightarrow B$ es un espacio recubridor si cada $b \in B$ tiene una vecindad abierta U tal que $p^{-1}(U)$ es la unión disjunta (como conjunto) de subconjuntos abiertos V_j de E tales que la restricción $p: V_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Un ejemplo importante de espacio recubridor es la función $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ que envía t a $e^{2\pi it}$. Cuando X es arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo (estas condiciones se cumplen cuando X es un CW-complejo arcoconexo o una variedad topológica arcoconexa), existe un recubridor $p: \tilde{X} \rightarrow X$, donde \tilde{X} es simplemente conexo. A este recubridor se le llama el recubridor universal y su grupo de automorfismos se define como

$$\text{Aut}(p) = \{f \in \text{Homeo}(\tilde{X}) \mid pf = p\},$$

con la operación dada por composición. La utilidad del recubridor universal para cálculos viene del hecho que

$$\pi_1(X, x_0) \cong \text{Aut}(p).$$

Por ejemplo, el recubridor $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ mencionado arriba es el recubridor universal de S^1 . El grupo de automorfismos de este recubridor está dado por los homeomorfismos $L_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que envían x a $x + n$ para cada entero n , por lo cual $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Los espacios recubridores tienen otras propiedades interesantes que los hacen útiles para otros propósitos.

- (1) Si X es arcoconexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo, existe una biyección entre el conjunto de clases de isomorfismo de recubridores arcoconexos punteados de X y el conjunto de subgrupos de $\pi_1(X)$.
- (2) Satisfacen la propiedad de levantamiento de homotopías. Sea $p: E \rightarrow B$ es un recubridor. Dada una homotopía $H: Z \times I \rightarrow B$ y una función $f: Z \times E$ que cumple $H_0 = pf$, existe una homotopía $F: Z \times I \rightarrow E$ que cumple $pF = H$ y $F_0 = f$.
- (3) Satisfacen el criterio de levantamiento. Sea $p: (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ un recubridor y $f: (Y, y_0) \rightarrow (B, b_0)$ una función desde un espacio arcoconexo y localmente arcoconexo. Entonces existe $g: (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ tal que $pg = f$ si y solo si $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0))$. Además, si existe, es única.