TAREA 0 A ENTREGARSE EL 2 DE FEBRERO

Esta tarea tiene dos páginas y contiene seis problemas.

1. (10 puntos) Sean x_0, x_1 dos puntos diferentes en $\mathbb{C}$. Demuestra que $\mathbb{C} - \{x_0, x_1\}$ es homotópicamente equivalente a $(S^1, 1) \vee (S^1, -1)$.

2. (10 puntos) Sea X un espacio topológico y $n \geq 0$. Prueba que las tres condiciones siguientes son equivalentes.

(a) Cualquier función $S^n \to X$ es nulhomótopa.

(b) Cualquier función $S^n \to X$ extiende a una función $D^{n+1} \to X$.

(c) Cualquier función $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ es homótopa a c_{x_0} como funciones de pares para todo $x_0 \in X$.

3. (10 puntos) Prueba que $\bigvee_{j \in J} S^1$ no es homotópicamente equivalente a la botella de Klein.

4. (6 puntos) Demuestra que si una variedad topológica arcoconexa X tiene grupo fundamental finito, entonces cualquier función $X \to S^1$ es nulhomótopa.

5. (10 puntos) Sea $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ con $n = 1, 2$. Muestra que existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Pista: Asume lo contrario, y define una nueva función mediante $[f(x) - f(-x)]/\|f(x) - f(-x)\|$.

6. Sea $X = S^1 \amalg D^2_a \amalg D^2_b/\sim$, donde cada $z \in \partial D^2_a$ se identifica con $z^3 \in S^1$ y cada $z \in \partial D^2_b$ se identifica con $z^5 \in S^1$. (vemos $S^1 \subseteq \mathbb{C}$).

(a) (6 puntos) Calcula el grupo fundamental de X.

(b) (8 puntos) Demuestra que X no es homeomorfo a S^2.