SOLUCIONES A LA TAREA 0

1. Sean x_0, x_1 dos puntos diferentes en $\mathbb{C}$. Demuestra que $\mathbb{C}-\{x_0, x_1\}$ es homotópicamente equivalente a $(S^1, 1) \vee (S^1, -1)$.

Solución:

Mostremos primero que podemos suponer $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$. La función $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que resta x_0 es un homeomorfismo y se restringe a un homeomorfismo $\mathbb{C} - \{x_0, x_1\} \to \mathbb{C} - \{0, x_1 - x_0\}$. La función $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que dividie por by $x_1 - x_0 \neq 0$ es un homeomorfismo que se restringe a un homeomorfismo $\mathbb{C} - \{0, x_1 - x_0\} \to \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

Sea $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z - 0\| = 1/2\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \|z - 1\| = 1/2\} = B_1 \cup B_2$ y consideremos la función

$$f\colon \mathbb{C} - \{0, 1\} \to B,$$

$$z = x + iy \mapsto \begin{cases} x + \sqrt{1/4 - x^2}i, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \text{ y } y \geq 0 \text{ y } \|z\| \geq 1/2, \\ x - \sqrt{1/4 - x^2}i, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \text{ y } y \leq 0 \text{ y } \|z\| \geq 1/2, \\ z/2\|z\|, & \text{si } \|z\| \leq 1/2 \text{ ó } \|z\| \geq 1/2 \text{ y } x \leq 0, \\ x + \sqrt{1/4 - (x-1)^2}i, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \text{ y } y \geq 0 \text{ y } \|z - 1\| \geq 1/2, \\ x - \sqrt{1/4 - (x-1)^2}i, & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \text{ y } y \leq 0 \text{ y } \|z - 1\| \geq 1/2, \\ z - 1/2\|z - 1\| + 1, & \text{si } \|z - 1\| \leq 1/2 \text{ ó } \|z - 1\| \geq 1/2 \text{ y } x \geq 1. \end{cases}$$

Esta función está bien definida y es continua en cada uno de los seis trozos cerrados. Las definiciones coinciden en las intersecciones. Por ejemplo, en la intersección entre el primer y tercer cerrado tenemos $x = 0$, $y > 0$ y $\|z\| \geq 1/2$, y las dos imágenes son

$$\sqrt{1/4}i = i/2$$

y

$$yi/2\|yi\| = yi/2y = i/2.$$

El resto de intersecciones pueden ser comprobadas de la misma manera, así que f es continua. Por otra parte, sea $g\colon B \to \mathbb{C} - \{0, 1\}$ la inclusión. Se cumple $fg = 1_B$ y la función gf tiene la misma expresión que f, pero vista como función $\mathbb{C} - \{0, 1\} \to \mathbb{C} - \{0, 1\}$. Consideremos la homotopía

$$\begin{aligned} H\colon \mathbb{C} - \{0,1\} \times I &\to \mathbb{C} - \{0,1\}, \\ (s,t) &\mapsto tgf(s) + (1-t)s. \end{aligned}$$

Está bien definida porque el segmento entre $gf(s)$ y s no pasa por 0 ni 1. Satisface $H_0 = 1_{\mathbb{C}-\{0,1\}}$ y $H_1 = gf$, así que hemos mostrado $\mathbb{C} - \{0,1\} \simeq B$.

Finalmente, el espacio B es homeomorfo $(S^1, 1) \vee (S^1, -1)$ mediante la función

$$\begin{aligned} h\colon B &\to (S^1,1) \vee (S^1,-1), \\ z &\mapsto \begin{cases} 2z \text{ del primer } S^1, & \text{si } z \in B_1, \\ 2(z-1) \text{ del segundo } S^1, & \text{si } z \in B_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función está bien definida y es continua en cada uno de los cerrados B_1 y B_2. En la intersección, que el punto $1/2$, obtenemos el punto 1 del primer S^1 y el punto -1 del segundo S^1, que son precisamente los puntos que se identifican en $(S^1, 1) \vee (S^1, -1)$. Luego h es continua. Por otra parte consideremos

$$\begin{aligned} k\colon (S^1,1) \vee (S^1,-1) &\to B, \\ z &\mapsto \begin{cases} z/2, & \text{si } z \text{ pertenece al primer } S^1, \\ z/2+1, & \text{si } z \text{ pertenece al segundo } S^1. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función está bien definida y es continua en cada uno de los dos cerrados. La intersección corresponde al punto 1 del primer S^1, que es el punto -1 del segundo S^1. Ambas definiciones coinciden para este punto, ambas arrojan $1/2$. Por tanto, k es continua. Es fácil comprobar que k es la inversa de h. □

2. Sea X un espacio topológico y $n \geq 0$. Prueba que las tres condiciones siguientes son equivalentes.

(a) Cualquier función $S^n \to X$ es nulhomótopa.

(b) Cualquier función $S^n \to X$ extiende a una función $D^{n+1} \to X$.

(c) Cualquier función $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ es homótopa a c_{x_0} como funciones de pares para todo $x_0 \in X$.

Solución:

(a) $\Rightarrow$ (b)

Sea $f\colon S^n \to X$. Como es nulhomótopa, existe una homotopía $H\colon S^n \times I \to X$ tal que $H_0 = c_a$ y $H_1 = f$. Notemos que H es constante en $S^n \times \{0\}$, así que define una función continua $F\colon CS^n = S^n \times I/S^n \times \{0\} \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} S^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "q"'] & X \\ CS^n \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

donde q es el cociente. Por otro lado, CS^n es homeomorfo a D^{n+1} mediante la función r que envía la clase de (x,t) a tx. La inversa de esta función está dada por

$$\begin{aligned} g\colon D^{n+1} &\to CS^n \\ x &\mapsto \begin{cases} [x/\|x\|, \|x\|], & \text{si } x \neq 0, \\ [s_0, 0], & \text{si } x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

donde s_0 es cualquier punto de S^n. Como r es continua y biyectiva, CS^n es compacto y D^{n+1} es Hausdorff, es un homeomorfismo. En particular, g es continua. Sea $\tilde{f} = F \circ g\colon D^{n+1} \to X$. Dado $x \in S^n$, se tiene

$$F(g(x)) = F([x/\|x\|, \|x\|]) = F([x,1]) = Fq(x,1) = H(x,1) = f(x).$$

Así que $\tilde{f}$ es una extensión de f.

(b) $\Rightarrow$ (c)

Sea $f\colon (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. Como f es constante en ∂I^n, existe una función continua $F\colon I/\partial I \to X$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & X \\ I^n/\partial I^n \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, donde p es el cociente. Recordemos que existe un homeomorfismo entre I^n y D^n que envía ∂I^n a ∂D^n, así que $I^n/\partial I^n$ es homeomorfo a $D^n/\partial D^n$, el cual es homeomorfo a S^n. Sea $h\colon S^n \to I^n/\partial I^n$ este homeomorfismo y $\tilde{f} = F \circ h\colon S^n \to X$. Por hipótesis, existe

$z\colon D^{n+1}\to X$ que entiende a $\tilde{f}$. Ahora consideremos la función

$$\begin{aligned} H\colon I^n\times I &\to X,\\ (x,t)&\mapsto z(ts_0+(1-t)h^{-1}([x])), \end{aligned}$$

donde $s_0=h^{-1}([0,\dots,0])$. Está bien definida porque D^{n+1} es convexo. Notemos que

$$zh^{-1}([y])=\tilde{f}(h^{-1}([y])=Fhh^{-1}([y])=Fhh^{-1}p(y)=Fp(y)=f(y).$$

Entonces

$$\begin{aligned} H(x,0)&=zh^{-1}([x])=f(x),\\ H(x,1)&=z(s_0)=zh^{-1}([0,\dots,0])=f(0,\dots,0)=x_0, \end{aligned}$$

es decir, $H_0=f$ y $H_1=c_{x_0}$. Para terminar, checamos que es una homotopía relativa ∂I^n. Si $x\in\partial I^n$, entonces $h^{-1}([x])=s_0$ y entonces

$$H(x,t)=z(ts_0+(1-t)s_0)=z(s_0)=x_0.$$

Luego f es homótopa a c_{x_0} rel ∂I^n.

(c) $\Rightarrow$ (a)

Sea $f\colon S^n\to X$. Tomemos un homeomorfismo $h\colon I^n/\partial I^n\to S^n$, sea $s_0=h([0,\dots,0])$ y sea $x_0=f(s_0)$. Llammos $g\colon I^n\to S^n$ a la composición de h con el cociente $q\colon I^n\to I^n/\partial I^n$. Consideremos la función $\tilde{f}=fg\colon(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$.

Es una función de pares pues $g(\partial I^n)=h([0,\dots,0])=s_0$. Por hipótesis, $\tilde{f}$ es homótopa rel ∂I^n a la función constante c_{x_0}. Sea $H\colon I^n\times I\to X$ una homotopía que exhibe esto. Como $H(y,t)=x_0$ para todo $y\in\partial I^n$, esto define una función $\tilde{H}\colon I^n\times I/(\partial I^n\times I)\to X$. Notemos que

$$I^n\times I/(\partial I^n\times I)\cong I^n/\partial I^n\times I$$

mediante la función a que envía la clase de (x,t) a $([x],t)$. Este último espacio es homeomorfo a $S^n\times I$ con la función $h\times 1_I$. Obtenemos una homotopía

$$F=\tilde{H}\circ a^{-1}\circ(h^{-1}\times 1_I)\colon S^n\times I\to X.$$

Sea $x \in S^n$ y sea $y \in I^n$ tal que $q(y) = h^{-1}(x)$. Entonces F satisface

$$\begin{aligned} F(x,0) &= \tilde{H}a^{-1}(h^{-1}(x),0) \\ &= \tilde{H}a^{-1}(q(y),0) \\ &= \tilde{H}([y,0]) \\ &= H(y,0) \\ &= \tilde{f}(y) \\ &= fg(y) \\ &= fhq(y) \\ &= fhh^{-1}(x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

y $F(x,1) = H(y,1) = x_0$. Es decir, f es nulhomótopa. $\square$

3. Prueba que $\bigvee_{j\in J} S^1$ no es homotópicamente equivalente a la botella de Klein.

Solución:

Sea $X = \bigvee_{j\in J} S^1$ y sea Y la botella de Klein. Por van Kampen, $\pi_1(X) \cong F[J]$, el grupo libre generado por el conjunto J y $\pi_1(Y) \cong \langle a, b \mid a^2b^{-2}\rangle$. Si X fuese homotópicamente equivalente a Y, entonces $\pi_1(Y)$ sería isomorfo a $F[J]$. En particular, sus abelianizaciones serían isomorfas.

$$\begin{aligned} F[J]_{\mathrm{ab}} &\cong \bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}, \\ \pi_1(Y)_{\mathrm{ab}} &\cong \langle a, b \mid a^2b^{-2}, aba^{-1}b^{-1}\rangle \cong \frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}(2,-2)}. \end{aligned}$$

Notemos que $F[J]_{\mathrm{ab}}$ no tiene elementos de orden finito. Sin embargo, la clase del elemento $(1,-1)$ en $\pi_1(Y)_{\mathrm{ab}}$ tiene orden 2. Por lo tanto $F[J]_{\mathrm{ab}}$ no puede ser isomorfo a $\pi_1(Y)_{\mathrm{ab}}$, de donde X no es homotópicamente equivalente a Y. $\square$

lución alternativa:

Podemos expresar $\pi_1(Y) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/N$, donde los elementos de N son productos finitos de elementos de la forma $w^{-1}a^{2n}b^{-2n}w$. Para cada $x \in \langle a, b\rangle$, sea $l(x)$ la suma de los exponentes que aparecen en la expresión reducida de x. Notemos que si $x \in N$, entonces $l(x) = 0$.

Supongamos que J tiene más de un elemento. El elemento a^2 conmuta con todos los elementos de $\pi_1(Y)$. Si $f: \pi_1(Y) \to F[J]$ fuese un isomorfismo, entonces $f(a^2)$ conmutaría con todos los elementos de $F[J]$. Pero veremos que en $F[J]$ cualquier elemento no trivial no conmuta con algún otro elemento de $F[J]$. Sea w un elemento no trivial de $F[J]$ que comienza con c^n y termina con d^m, donde c y d son generadores correspondientes a diferentes elementos de J. Dado $0 \neq n_1 \neq n$, se tiene

$$c^{n_1} \cdot d \cdot w \neq w \cdot c^{n_1} \cdot d,$$

porque estas dos expresiones son reducidas y tienen un primer elemento diferente. Si la palabra empieza con c^n y termina con c^m, entonces

$$d \cdot w \neq w \cdot d,$$

porque ambas expresiones son reducidas y tienen su primer elemento diferente. Esto muestra que el centro de $F[J]$ solo contiene al elemento trivial.

Por lo tanto, se debe tener $f(a^2) = \emptyset$. Pero como f es inyectiva, esto implica que a^2 es el elemento trivial, es decir, $a^2 \in N$. Puesto que $l(a^2) = 2$, tenemos que $a^2 \notin N$ que es una contradicción.

Si J solo tuviera un elemento, entonces $F[J] \cong \mathbb{Z}$, que es cíclico. Si $\pi_1(Y)$ fuese isomorfo a $\mathbb{Z}$, también sería cíclico y todos sus cocientes serían cíclicos también. Consideremos el único homomorfismo $p: \langle a, b\rangle \to \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ que cumple $p(a) = (1, 0)$ y $p(b) = (0, 1)$. Como $p(a^2) = p(b^2) = 1$, induce un homomorfismo $q: \pi_1(Y) \to \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ que es sobreyectivo, puesto que p es sobreyectivo. Esto significa que $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ es un cociente no cíclico de $\pi_1(Y)$, que es una contradicción. $\square$

4. Demuestra que si una variedad topológica arcoconexa X tiene grupo fundamental finito, entonces cualquier función $X \to S^1$ es nulhomótopa.

Solución:

Sea $f: X \to S^1$ y escojamos $x_0 \in X$. Sea $y_0 = f(x_0)$ y consideremos el recubridor universal $p: \mathbb{R} \to S^1$. Como p es sobreyectiva, existe $z_0 \in \mathbb{R}$ con $p(z_0) = y_0$. Entonces tenemos un problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R}, z_0) \arrow[d, "p"] \\ (X, x_0) \arrow[r, "f"] & (S^1, y_0) \end{tikzcd}$$

Puesto que X es arcoconexo y localmente arcoconexo, podemos usar el criterio de levantamiento, que nos dice que existe un levantamiento de f si y solo si

$$f_*\pi_1(X, x_0) \subseteq p_*(\pi_1(\mathbb{R}, z_0)) = \{1\}.$$

Notemos que f_* es un homomorfismo desde un grupo finito a $\mathbb{Z}$, así que debe ser trivial. Por lo tanto, se cumplen las condiciones del criterio y existe una función $g\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $pg = f$. Como $\mathbb{R}$ es contráctil, g es nulhomótopa y por lo tanto, f es nulhomótopa. $\square$

5. Sea $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ con $n = 1, 2$. Muestra que existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Solución:

Hagamos el caso $n = 1$ primero. Sea $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ y supongamos que $f(x) \neq f(-x)$ para todo x en S^1. Consideremos la función continua

$$g\colon S^1 \to S^0,$$
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Como S^1 es conexo, la imagen de g es conexa. El espacio S^0 es discreto, luego g debe ser constante. O bien $g = c_1$ ó $g = c_{-1}$. Pero $g(-x) = -g(x)$ y ninguna de estas dos opciones satisface esta ecuación, lo que es una contradicción.

Ahora sea $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ y supongamos que $f(x) \neq f(-x)$ para todo x en S^2. Consideramos la función continua

$$g\colon S^2 \to S^1,$$
$$x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|},$$

y sea $r\colon S^1 \to S^1$ la restricción al ecuador de S^2. Notemos que r es nulhomótopa pues factoriza a través de la inclusión de S^1 en el hemisferio norte de S^2, que es contráctil. Ahora consideremos el problema de levantamiento

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{R}, z_0) \arrow[d, "p"] \\ (S^1, 1) \arrow[r, "r"] & (S^1, f(1)) \end{tikzcd}$$

Como r es nulhomótopa, la imagen de r_* es trivial. Por el criterio de levantamiento, existe $h\colon S^1 \to \mathbb{R}$ tal que $ph = r$. Por la parte anterior, existe $x \in S^1$ tal que $h(x) = h(-x)$. Y entonces $r(x) = r(-x)$.

Pero por otra parte $r(-x) = g(-x) = -g(x) = -r(x)$, de donde $r(x) = -r(x)$ que contradice $r(x) \in S^1$. $\square$

6. Sea $X = S^1 \amalg D_a^2 \amalg D_b^2/\sim$, donde cada $z \in \partial D_a^2$ se identifica con $z^3 \in S^1$ y cada $z \in \partial D_b^2$ se identifica con $z^5 \in S^1$. (vemos $S^1 \subseteq \mathbb{C}$).

(a) Calcula el grupo fundamental de X.

Solución:

El espacio X es un CW-complejo con $X^0 = \{v\}$ y $X^{(1)} = S^1$, formado pegando los dos extremos de una 1-celda a $X^{(0)}$. Y $X = X^{(2)}$, con dos 2-celdas pegadas a mediante las funciones $S^1 \to X^{(1)}$ descritas en el enunciado. Sea a el generador del grupo fundamental de S^1 que da una vuelta alrededor del círculo en dirección positiva. Entonces tenemos

$$\pi_1(X^{(1)}) \cong \mathbb{Z} = \langle a \rangle.$$

Las dos 2-celdas se pegan por las funciones que envían el lazo que da una vuelta en sentido positivo a los lazos que dan tres y cinco vueltas en la misma dirección, respectivamente. Por lo tanto

$$\pi_1(X^{(2)}) \cong \langle a \mid a^5, a^3 \rangle.$$

Pero si $a^3 = 1 = a^5$, entonces $a = a^6 a^{-5} = 1$. Luego $\pi_1(X) \cong \pi_1(X^{(2)}) = \{1\}$. $\square$

(b) Demuestra que X no es homeomorfo a S^2.

Solución:

Escogemos un punto p en el interior de la 2-celda pegada mediante la función $z \mapsto z^5$. Entonces $X - \{p\}$ es homotópicamente equivalente a un CW-complejo con $X^{(1)} = S^1$ y una 2-celda pegada mediante la función $z \mapsto z^3$. Esto se cumple porque $D^2 - \{0\} \simeq S^1$ rel S^1 y entonces podemos construir una equivalencia homotópica que envían los puntos del interior de la celda al círculo de $X^{(1)}$.

Si X fuera homeomorfo a S^2, entonces $X - \{p\}$ sería homeomorfo $S^2 - \{b\}$ para algún $b \in S^2$. Pero $S^2 - \{b\} \cong \mathbb{R}^2$, que es contráctil, mientras que al mismo tiempo por el mismo argumento de la parte (a) se cumple

$$\pi_1(X - \{p\}) \cong \langle a \mid a^3 \rangle \cong \mathbb{Z}/3.$$

Así que $X - \{p\}$ no es contráctil, luego no puede ser homeomorfo a $S^2 - \{b\}$. En consecuencia, X no es homeomorfo a S^2. $\square$