SOLUCIONES A LA TAREA 1

1. Sean $C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \to 0$ y $0 \to B \xrightarrow{h} D \xrightarrow{k} E$ sucesiones exactas. Demuestra que existe una sucesión exacta $C \xrightarrow{f} A \to D \xrightarrow{k} E$ para un cierto homomorfismo $A \to D$.

Solución:

Consideremos $hg\colon A \to D$. Como h es inyectiva, $hg(x) = 0$ si y solo si $g(x) = 0$. Es decir, el núcleo de hg coincide con $\mathrm{Ker}(g)$, que es igual a la imagen de $\mathrm{Im}(f)$ por la exactitud de la primera sucesión exacta. Esto prueba la exactitud en A. Por otra parte, como g es sobreyectiva, se tiene $\mathrm{Im}(hg) = \mathrm{Im}(h)$, que es igual a $\mathrm{Ker}(k)$ por la exactitud de la segunda sucesión exacta. Esto prueba la exactitud en D. $\square$

2. Sea $A \xrightarrow{f} B \to C \to D \xrightarrow{g} E$ una sucesión exacta. Demuestra que existe una sucesión exacta corta $0 \to \mathrm{Coker}(f) \to C \to \mathrm{Ker}(g) \to 0$.

Solución:

Le damos nombre a los otros morfismos

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{j} D \xrightarrow{g} E.$$

El morfismo $h\colon B \to C$ factoriza a través del cociente $B \to B/\mathrm{Ker}(h)$ por la propiedad universal del cociente. Como $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(f)$, obtenemos un morfismo $\varphi\colon \mathrm{Coker}(f) \to C$. Este morfismo está dado por $\varphi(b + \mathrm{Im}(f)) = h(b)$.

Por otra parte el morfismo $j\colon C \to D$ restringe a un morfismo $C \to \mathrm{Im}(j)$. Como $\mathrm{Im}(j) = \mathrm{Ker}(g)$, así obtenemos un morfismo $\psi\colon C \to \mathrm{Ker}(g)$ que de hecho está dado por $\psi(c) = j(c)$. Veamos que la sucesión

$$0 \to \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} \mathrm{Ker}(g) \to 0$$

es exacta. En primer lugar, $b + \mathrm{Im}(f)$ pertenece al núcleo de φ si y solo si $h(b) = 0$, es decir, $b \in \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(f)$ y entonces $b + \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Luego φ es inyectiva. Como $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(j)$ y ψ es la restricción de j a su imagen, vemos que ψ es sobreyectiva.

Por último, como ψ es la restricción de j a su imagen, $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ker}(j) = \mathrm{Im}(h)$. Pero $\varphi(b + \mathrm{Im}(f)) = h(b)$, así que $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(\varphi)$. Es decir, $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Im}(\varphi)$. $\square$

3. Para cada $n \geq 0$, definamos $C_n = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ y sea $C_n = 0$ si $n < 0$. Esto define un complejo C_* donde todas las diferenciales $C_n \to C_{n-1}$ con $n \geq 1$ están dadas por $(m, n) \mapsto (m + n, -m - n)$. Sea D_* el complejo dado por $D_0 = \mathbb{Z}$ y $D_n = 0$ si $n \neq 0$. Demuestra que C_* es homotópicamente equivalente a D_*.

Solución:

Primero definimos $f_*\colon C_* \to D_*$ mediante $f_j = 0$ si $j \neq 0$ y

$$\begin{aligned} f_0\colon \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z}, \\ (m, n) &\mapsto m + n. \end{aligned}$$

Similarmente, definimos $g_*\colon D_* \to C_*$ mediante $g_j = 0$ si $j \neq 0$ y

$$\begin{aligned} g_0\colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \\ m &\mapsto (m, 0). \end{aligned}$$

Puesto que todas las diferenciales de D_* son cero, es obvio que f_* y g_* son morfismos de complejos. Notemos que $f_0 g_0 = 1_{D_0}$ y $f_j g_j = 0 = 1_{D_j}$ si $j \neq 0$. Así que $f_* g_* = 1_{D_*}$. Por otra parte $g_j f_j = 0$ si $j \neq 0$ y

$$g_0 f_0(m, n) = (m + n, 0).$$

Así que $g_* f_*$ no es igual a 1_{C_*}. Pero veremos que es homótopa a la identidad. Para ello consideremos $h_j = 0$ si $j < 0$ y cuando $j \geq 0$ definimos

$$\begin{aligned} h_j\colon C_j &\to C_{j+1}, \\ (m, n) &\mapsto (-n, 0). \end{aligned}$$

Si $j < 0$, tenemos

$$d_{j-1} h_j + h_{j-1} d_j = 0 = 1_{C_j} - g_j f_j.$$

Por otra parte

$$(d_1 h_0 + h_{-1} d_0)(m, n) = d_1 h_0(m, n) = d_1(-n, 0) = (-n, n),$$

$$(1_{C_0} - g_0 f_0)(m,n) = (m,n) - (m+n,0) = (-n,n).$$

Y si $j > 0$, tenemos

$$(d_{j+1}h_j + h_{j-1}d_j)(m,n) = d_{j+1}(-n,0) + h_{j-1}(m+n,-m-n) = (-n,n) + (m+n,0) = (m,n),$$

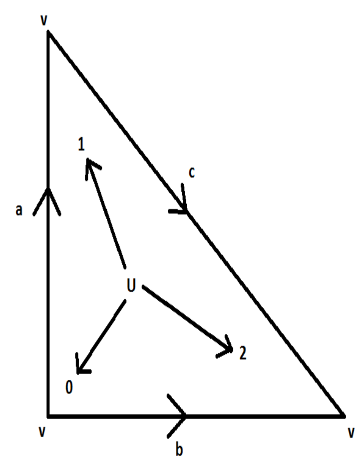
$$(1_{C_j} - g_j f_j)(m,n) = 1_{C_j}(m,n) = (m,n).$$

Con todo esto hemos probado que $g_* f_*$ es homótopa a la identidad. Y como ya teníamos también que $f_* g_* = 1_{D_*}$, concluimos que C_* es homotópicamente equivalente a D_*. $\square$

4. (10 puntos) Calcula los grupos de homología simplicial del paracaídas triangular obtenido de Δ^2 identificando los tres vértices a un mismo punto.

Solución:

Este espacio X tiene un 0-símplex v, tres 1-símplices a, b, c y un 2-símplex U que orientamos como en el dibujo.



El complejo simplicial es

$$0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}U \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}v \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

donde se tiene que

$$\partial_0 = 0,$$

$$\partial_1 a = \partial_1 b = \partial_1 c = 0,$$

$$\partial_2 U = c - b + a.$$

Ahora calculamos los grupos de homología simplicial

$H_0^\Delta(X) = \mathrm{Ker}(\partial_0)/\,\mathrm{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}v/0 \cong \mathbb{Z}v \cong \mathbb{Z}$.

$H_1^\Delta(X) = \mathrm{Ker}(\partial_1)/\,\mathrm{Im}(\partial_2) = \dfrac{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}{\mathbb{Z}(c-b+a)} = \dfrac{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}(c-b+a)}{\mathbb{Z}(c-b+a)} \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \cong \mathbb{Z}^2$.

$H_2^\Delta(X) = \mathrm{Ker}(\partial_2)/\,\mathrm{Im}(\partial_3) = 0/0 = 0$.

Luego

$$H_m^\Delta(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } m = 0, \\ \mathbb{Z}^2, & \text{si } m = 1, \\ 0, & \text{en el resto de casos,} \end{cases}$$

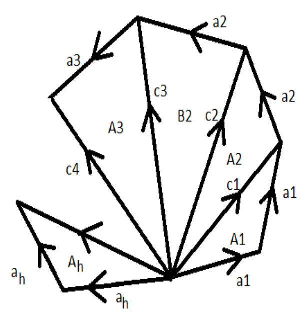
y esto concluye el ejercicio. $\square$

5. (12 puntos) Calcula los grupos de homología simplicial de N_h para todo $h > 0$.

Solución:

Como ya calculamos los grupos de homología simplicial de $N_1 = \mathbb{R}P^2$ en clase, supondremos que $h > 1$.

Esta superficie tiene una presentación poligonal regular con un vértice y aristas $a_1, \ldots, a_h$. Trazamos las diagonales desde un punto $c_1, \ldots, c_{2h-3}$ y esto nos divide el polígono en 2-símplices $A_1, \ldots, A_h, B_1, \ldots, B_{h-1}$ como se indica en el dibujo:



El complejo simplicial tiene la forma

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{h} \mathbb{Z}A_i \oplus \bigoplus_{i=2}^{h-1} B_i \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{i=1}^{h} \mathbb{Z}a_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{2h-3} \mathbb{Z}c_i \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}v \to 0.$$

Como sólo hay un 0-símplex, ∂_1 es la función cero. Por otra parte se tiene

$$\begin{aligned}
\partial_2 A_1 &= a_1 - c_1 + a_1 = 2a_1 - c_1.\\
\partial_2 A_i &= a_i - c_{2i-2} + c_{2i-3}, \qquad \text{si } 1 < i < h.\\
\partial_2 A_h &= a_h - a_h + c_{2h-3} = c_{2h-3}.\\
\partial_2 B_i &= a_i - c_{2i-1} + c_{2i-2}.
\end{aligned}$$

Veamos que ∂_2 es inyectiva. Notemos que cada 1-símplex de la forma c_i aparece como el borde de exactamente dos 2-símplices, una vez con cada signo, excepto por c_{2h-3} que aparece dos veces con signo negativo. Así que para que una cadena de 2-símplices

$$\sum n_i A_i + \sum m_i B_i$$

esté en el núcleo, se debe tener $n_1 = n_2$, $n_2 = m_2$, $m_2 = n_3$, $\ldots$, $n_{h-1} = m_{h-1}$ y $m_{h-1} = -n_h$. Es decir, este elemento debe ser un múltiplo de la cadena

$$A_1 + \cdots + A_{h-1} - A_h + B_2 + \cdots + B_{h-1}.$$

Pero

$$\partial_2(A_1 + \cdots + A_{h-1} - A_h + B_2 + \cdots + B_{h-1}) = 2a_1 + \cdots + 2a_{h-1} - 2a_h \neq 0,$$

así que el núcleo de ∂_2 es trivial. Como los grupos del complejo son cero en dimensiones mayores que dos, se tiene

$$H_2^{\Delta}(N_h) = \operatorname{Ker} \partial_2 = 0,$$

y también

$$H_k^{\Delta}(N_h) = 0 \text{ si } k \geq 3.$$

Ahora calculemos el resto de grupos de homología

$$H_0^{\Delta}(N_h) = \frac{\mathbb{Z}v}{0} \cong \mathbb{Z}.$$

$$H_1^{\Delta}(N_h) = \frac{\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{h} \mathbb{Z}a_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{2h-3} \mathbb{Z}c_i}{\operatorname{Im} \partial_2}.$$

Cambiemos los elementos c_i de la base del numerador por los elementos $2a_1 - c_1$, $c_1 - c_2 + a_2$, $c_2 - c_3 + a_2$, etc., es decir, todos los de abajo. Está claro que estos elementos juntos con los

a_i generan el numerador. Por lo tanto

$$H_1^\Delta(N_h) \cong \frac{\displaystyle\bigoplus_{i=1}^h \mathbb{Z}a_i}{\displaystyle\bigoplus_{i=1}^h \mathbb{Z}a_i \cap \operatorname{Im}\partial_2}.$$

Ahora para estar en $\oplus_{i=1}^h \mathbb{Z}a_i \cap \operatorname{Im}\partial_2$, debemos tener una combinación lineal de A_i y B_i que al hacer borde se cancelen todos los c_i. Esto ya vimos antes que tenía que ser

$$n(A_1 + \cdots + A_{h-1} - A_h + B_2 + \cdots + B_{h-1}),$$

cuyo borde es $n(2a_1 + \ldots + 2a_h)$, así que esta intersección es $\mathbb{Z}(2a_1 + \ldots + 2a_h)$. Por lo tanto

$$H_1^\Delta(N_h) = \frac{\displaystyle\bigoplus_{i=1}^h \mathbb{Z}a_i}{\mathbb{Z}(2a_1 + \cdots + 2a_h)} = \frac{\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{h-1} \mathbb{Z}a_i \oplus \mathbb{Z}(a_1 + \cdots + a_h)}{\mathbb{Z}(2a_1 + \cdots + 2a_h)} \cong \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}/2$$

En resumen

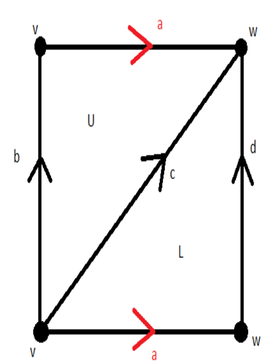
$$H_k^\Delta(N_h) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{Z}^{h-1}, \oplus \mathbb{Z}/2 & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{si } k \geq 2, \end{cases}$$

y esta expresión también sirve para $h = 1$ por el cálculo que hicimos en clase. □

6. (10 puntos) Calcula los grupos de homología simplicial del cilindro $S^1 \times I$.

Solución:

Recordemos que $S^1 \times I$ es homeomorfo al espacio cociente de $I \times I$ donde identificamos $(x, 0)$ con $(x, 1)$ para todo $x \in I$. De esta manera le damos a $S^1 \times I$ una estructura de Δ-complejo como se aprecia en el siguiente dibujo:



donde las flechas rojas, además de orientación, indican la identificación. Con respecto a esta estructura de Δ-complejo, el complejo simplicial de $S^1 \times I$ tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{Z}U \oplus \mathbb{Z}L \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c \oplus \mathbb{Z}d \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w,$$

donde las diferenciales están dadas por

$$\begin{aligned}\partial_2(U) &= a - c + b,\\ \partial_2(L) &= d - c + a,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\partial_1(b) &= \partial_1(d) = 0,\\ \partial_1(a) &= \partial_1(c) = w - v.\end{aligned}$$

Puesto que el complejo es trivial en dimensiones a partir de tres, tenemos

$$H_k^\Delta(S^1 \times I) = 0, \qquad \text{si } k \geq 3.$$

Comencemos calculando H_0, tenemos

$$H_0^\Delta(S^1 \times I) = \frac{\mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w}{\mathbb{Z}(w-v)} = \frac{\mathbb{Z}(w-v) \oplus \mathbb{Z}v}{\mathbb{Z}(w-v)} \cong \mathbb{Z}v = \mathbb{Z}.$$

Ahora calculemos H_1

$$\begin{aligned}H_1^\Delta(S^1 \times I) &= \frac{\operatorname{Ker}(\partial_1)}{\operatorname{Im}(\partial_2)}\\ &= \frac{\mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}d \oplus \mathbb{Z}(a-c)}{\mathbb{Z}(a-c+b) \oplus \mathbb{Z}(d-c+a)}\\ &= \frac{\mathbb{Z}(a-c+b) \oplus \mathbb{Z}(d-c+a) \oplus \mathbb{Z}(a-c)}{\mathbb{Z}(a-c+b) \oplus \mathbb{Z}(d-c+a)}\\ &\cong \mathbb{Z}(a-c) = \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Y por último

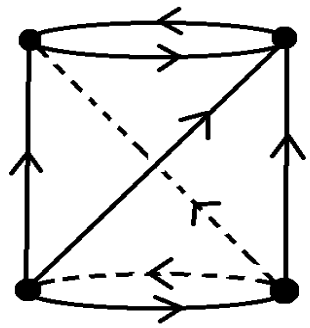
$$H_2^\Delta(S^1 \times I) = \operatorname{Ker}(\partial_2) = 0,$$

pues claramente la única combinación lineal entera $m(a-c+b) + n(d-c+a)$ que es igual a cero es cuando $m = n = 0$. Así que para resumir

$$H_k^\Delta(S^1 \times I) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, 1,\\ 0, & \text{si } k \geq 2,\end{cases}$$

y esto concluye el ejercicio. $\square$

Noten que esta no es la única solución, otra posible estructura de Δ-complejo podría haber sido la que se indica en el siguiente diagrama.



pero esta estructura tiene cuatro 0-símplices, ocho 1-símplices y cuatro 2-símplices, así que el cálculo sería más complicado.