

TAREA 2 A ENTREGARSE EL 2 DE MARZO

Esta tarea tiene dos páginas y contiene seis problemas y un bonus.

1. (10 puntos) Sea $A = \{(x, y, z) \in S^2 \mid xyz = 0\}$. Calcula el grupo fundamental y los grupos de homología de los espacios A y S^2/A .
2. (10 puntos) Calcula los grupos de homología relativa $H_n(S^2, S^1)$, donde S^1 se ve como el ecuador de S^2 , usando la sucesión exacta larga del par. No se pueden usar para este ejercicio los grupos de homología del cociente.
3. (10 puntos) Demuestra que la función $j: (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (D^n, D^n - \{0\})$ inducida por la identidad $D^n \rightarrow D^n$ no es una equivalencia homotópica de pares, pero que sí induce isomorfismos en todos los grupos de homología.
4. (12 puntos) Muestra que $S^1 \times S^1$ y $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ tiene grupos de homología isomorfos en todas las dimensiones, y que esto no se cumple para sus recubridores universales.
5. (8 puntos) Prueba que el cociente $q: S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ que colapsa $S^1 \vee S^1$ a un punto no es nulhomótopa.
6. (10 puntos) Sea $H: I \times I \rightarrow Y$ una homotopía de f a g . Sean $b_1, b_2: I \rightarrow Y$ las funciones que mandan t a $H(0, t)$ y $H(1, t)$, respectivamente. Prueba que $f \simeq b_1 \cdot g \cdot \bar{b}_2$ rel ∂I .

Bonus. Sea A el subespacio de I formado por los elementos $1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ y además el 0.

- (a) (6 puntos) Demuestra que I/A es homeomorfo al subespacio Y de \mathbb{R}^2 dado por la unión de todos los círculos de centro $(1/n, 0)$ y radio $1/n$.
- (b) (10 puntos) Prueba que los grupos $\pi_1(Y)$ y $H_1(Y)$ no son numerables (Pista: Completa los detalles del ejemplo 1.25 del libro de Hatcher).

- (c) (6 puntos) Demuestra que $H_1(I, A)$ no es isomorfo a $H_1(I/A)$. Concluye que el par (I, A) no satisface la propiedad de extensión de homotopías.