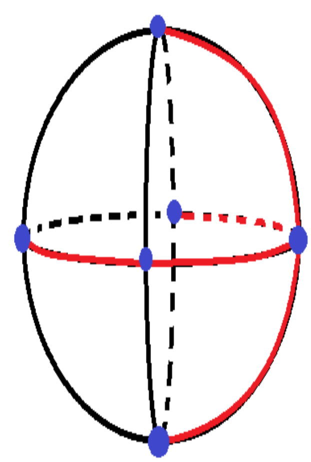
SOLUCIONES A LA TAREA 2

1. Sea $A = \{(x, y, z) \in S^2 \mid xyz = 0\}$. Calcula el grupo fundamental y los grupos de homología de los espacios A y S^2/A.

Solución:

El subespacio A es un grafo arcoconexo con 6 vértices y 12 aristas. Elegimos como árbol maximal las aristas coloreadas de rojo en la siguiente figura.



Quedan siete aristas cuyos interiores no están en el árbol maximal, con lo cual $\pi_1(A) \cong F_7$. Puesto que A es arcoconexo, $H_0(A) \cong \mathbb{Z}$ y $H_1(A) \cong \pi_1(A)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^7$. Notemos que A es un CW-complejo pues es un grafo, y su árbol maximal T es un subcomplejo. En particular, el par (A, T) satisface la propiedad de extensión de homotopías. Usamos la sucesión exacta larga del par (A, T). Veamos el siguiente trozo para $n > 1$

$$H_n(T) \to H_n(A) \to H_n(A, T).$$

Como T es contráctil, $H_n(T) = 0$. Puesto que $A/T \simeq \vee_{i=1}^{7} S^1$, tenemos

$$H_n(A, T) \cong \widetilde{H}_n(A/T) \cong \widetilde{H}_n\left(\bigvee_{i=1}^{7} S^1\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{7} \widetilde{H}_n(S^1) = 0,$$

y por lo tanto se tiene $H_n(A) = 0$ si $n > 1$. Luego

$$H_n(A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0, \\ \mathbb{Z}^7, & \text{si } n = 1, \\ 0, & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Si consideramos la CW-estructura de S^2 cuyo 1-esqueleto es A y al cual se le adjuntan ocho 2-celdas (los cuadrantes), el espacio S^2/A hereda una estructura de CW-complejo con una 0-celda (el punto al que se cocienta A) y ocho 2-celdas, que ahora se adjuntan a un punto. Por lo tanto, este espacio es $\vee_{i=1}^8 S^2$. Luego usando que es arcoconexo y que $H_n(\vee_{i=1}^8 S^2) \cong \oplus_{i=1}^8 H_n(S^2)$ si $n \geq 1$, obtenemos

$$H_n(S^2/A) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } n = 0, \\ \mathbb{Z}^8, & \text{si } n = 2, \\ 0, & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

y su grupo fundamental es trivial por van Kampen, puesto que $\pi_1(S^2) = 0$. □

2. Calcula los grupos de homología relativa $H_n(S^2, S^1)$, donde S^1 se ve como el ecuador de S^2, usando la sucesión exacta larga del par. No se pueden usar para este ejercicio los grupos de homología del cociente.

Solución:

Consideremos la sucesión de homología del par (S^2, S^1). Suponemos $m > 0$ para empezar

$$H_m(S^1) \to H_m(S^2) \to H_m(S^2, S^1) \to H_{m-1}(S^1) \to H_{m-1}(S^2).$$

Ya conocemos los grupos de homología de las esferas. De lo que podemos deducir que si $m > 0$ es distinto de 1 y 2, entonces los dos grupos adyacentes a $H_m(S^2, S^1)$ son ceros y por lo tanto $H_m(S^2, S^1) = 0$ si $m > 0$ y $m \neq 1, 2$. Para ver esos casos, escríbamos el trozo de la sucesión que los contiene

$$H_2(S^1) \longrightarrow H_2(S^2) \longrightarrow H_2(S^2, S^1) \longrightarrow H_1(S^1) \longrightarrow H_1(S^2) \longrightarrow H_1(S^2, S^1) \longrightarrow H_0(S^1) \longrightarrow H_0$$

$$H_0(S$$

Rellenemos la información que conocemos

$$0 \to \mathbb{Z} \to H_2(S^2, S^1) \to \mathbb{Z} \to 0 \to H_1(S^2, S^1) \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to H_0(S^2, S^1) \to 0.$$

Por el lema que vimos en clase $H_2(S^2, S^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Para los otros dos necesitamos ver qué hace la función $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ del medio. Esta es la función que manda la componente arcoconexa de S^1 a la componente arcoconexa de S^2. Por lo tanto, es un isomorfismo y se debe tener $H_1(S^2, S^1) = H_0(S^2, S^1) = 0$. Luego

$$H_m(S^2, S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & \text{si } m = 2, \\ 0, & \text{si } m \neq 2. \end{cases} \quad \square$$

3. Demuestra que la función $j\colon (D^n, S^{n-1}) \to (D^n, D^n - \{0\})$ inducida por la identidad $D^n \to D^n$ no es una equivalencia homotópica de pares, pero que sí induce isomorfismos en todos los grupos de homología.

Solución:

Sea $g\colon (D^n, D^n - \{0\}) \to (D^n, S^{n-1})$ una inversa homotópica para j. Como g es continua y 0 pertenece al cierre de $D^n - \{0\}$, su imagen debe caer en S^{n-1}. Por lo tanto g factoriza como

$$\begin{tikzcd}
(D^n, D^n - \{0\}) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & (S^{n-1}, S^{n-1}) \arrow[d, "k"] \\
 & (D^n, S^{n-1})
\end{tikzcd}$$

donde k es la inclusión. Luego $g_* = k_* h_*$. Pero notemos que $H_i(S^{n-1}, S^{n-1}) = 0$ para todo i pues su complejo es nulo. Por lo tanto $g_*\colon H_i(D^n, D^n - \{0\}) \to H_i(D^n, S^{n-1})$ es el morfismo cero para todo i. Pero como g es una inversa homotópica para j se debe tener un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H_n(D^n, S^{n-1}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[dr, "1"'] & H_n(D^n, D^n - \{0\}) \arrow[d, "g_*"] \\
 & H_n(D^n, S^{n-1})
\end{tikzcd}$$

Por la sucesión exacta larga del par, tenemos que $H_n(D^n, S^{n-1}) \cong \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ y vimos en clase que j_* es un isomorfismo. Por lo tanto este diagrama tiene la forma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "1"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "0"] \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

lo cual es una contradicción. En consecuencia, j no es una equivalencia homotópica de pares. $\square$

Noten que esto es un ejemplo de un mapeo $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ tal que $f\colon X \to Y$ y $f_{|A}\colon A \to B$ son equivalencias homotópicas, pero f no es una equivalencia homotópica de pares.

4. Muestra que $S^1 \times S^1$ y $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ tiene grupos de homología isomorfos en todas las dimensiones, y que esto no se cumple para sus recubridores universales.

Solución:

Ya hemos calculado los grupos de homología de $S^1 \times S^1$ en clase. Son

$$H_k(S^1 \times S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^2, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Ahora calculemos los grupos de homología de $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ usando que es arcoconexo y que $H_n(S^1 \vee S^1 \vee S^2) \cong H_n(S^1) \oplus H_n(S^1) \oplus H_n(S^2)$ para $n \geq 1$. De esta manera obtenemos

$$H_k(S^1 \vee S^1 \vee S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^2, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Por lo tanto sus grupos de homología son isomorfos.

El recubridor universal de $S^1 \times S^1$ es $\mathbb{R}^2$, que es contráctil, mientras que el recubridor universal de $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ es el espacio Y construido de la siguiente manera. Tomamos el recubridor universal Z de $S^1 \vee S^1$ y le pegamos una copia de S^2 en cada vértice a través del punto donde S^2 se pega a $S^1 \vee S^1$ en la base. Como Y es un CW-complejo y Z es un subcomplejo contráctil, tenemos

$$Y \simeq Y/Z \cong \bigvee_{w \in F_2} S^2.$$

Como S^2 es simplemente conexo, también lo es Y. Y es un recubridor de $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ a través de la función $p\colon Y \to S^1 \vee S^1 \vee S^2$ que es el recubridor $Z \to S^1 \vee S^1$ restringido a Z y la identidad restringida a cada S^2. Esta función es continua en cada trozo cerrado, así que es continua. Y claramente es un recubridor, pues ya es un recubridor en los puntos de $S^1 \vee S^1$ y S^2 que no sean el punto donde se pegan juntos. Y en ese punto en particular, lo hemos construido de tal manera que sea un espacio recubridor, pues de cada 0-celda en Y salen dos aristas, entran dos aristas, y tiene una vecindad abierta del punto de S^2 que se pega. Por lo tanto

$$H_2(Y) \cong \bigoplus_{w \in F_2} H_2(S^2) \cong \bigoplus_{w \in F_2} \mathbb{Z} \neq 0,$$

de donde obtenemos que $H_2(Y)$ no es isomorfo a $H_2(\mathbb{R}^2) = 0$ y por lo tanto Y no es homotópicamente equivalente a $\mathbb{R}^2$. $\square$

Hay otra manera de probar esto sin construir el recubridor universal de $S^1 \vee S^1 \vee S^2$. Sea $p\colon Y \to S^1 \vee S^1 \vee S^2$ el recubridor universal. Mostraremos que $H_2(Y) \neq 0$. Sea $i\colon S^2 \to S^1 \vee S^1 \vee S^2$ la inclusión. Como S^2 es simplemente conexo, tenemos que $i_*\pi_1(S^2, s_0) = 0 \leq p_*\pi_1(Y, y_0)$ y el criterio de levantamiento nos asegura la existencia de un levantamiento $f\colon S^2 \to Y$ of i. Es decir, $pf = i$.

Por otra parte, el isomorfismo $H_2(S^1) \vee H_2(S^1) \vee H_2(S^2) \cong H_2(S^1 \vee S^1 \vee S^2)$ está dado por las inclusiones de S^1, S^1 y S^2 en $S^1 \vee S^1 \vee S^2$. Como $H_2(S^1) = 0$, de hecho viene inducido por la inclusión $i\colon S^2 \to S^1 \vee S^1 \vee S^2$. Es decir, i_* es un isomorfismo. Pero $i_* = p_* f_*$, así que f_* no puede ser el morfismo cero. Por lo tanto $H_2(Y) \neq 0$. $\square$

5. Prueba que el cociente $q\colon S^1 \times S^1 \to S^2$ que colapsa $S^1 \vee S^1$ a un punto no es nulhomótopa.

Solución:

El espacio $S^1 \times S^1$ tiene una estructura de CW-complejo en la cual $S^1 \vee S^1$ es un subcomplejo, así que el par $(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1)$ satisface la propiedad de extensión de homotopías. Consideremos el siguiente trozo de la sucesión exacta larga del par $(S^1 \times S^1, S^1 \vee S^1)$ donde ya estamos teniendo en cuenta que $S^1 \times S^1/S^1 \vee S^1 \cong S^2$.

$$H_2(S^1 \vee S^1) \to H_2(S^1 \times S^1) \xrightarrow{q_*} H_2(S^2).$$

Recordemos que $H_2(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ y $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Como $H_2(S^1 \vee S^1) \cong H_2(S^1) \oplus H_2(S^1) = 0$, la función q_* es inyectiva y por lo tanto q no puede ser nulhomótopa, pues si lo fuera, q_* sería la función cero. $\square$

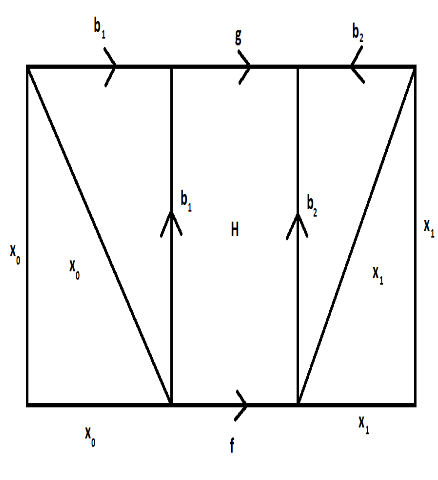
6. Sea $H\colon I \times I \to Y$ una homotopía de f a g. Sean b_1, $b_2\colon I \to Y$ las funciones que mandan t a $H(0,t)$ y $H(1,t)$, respectivamente. Prueba que $f \simeq b_1 \cdot g \cdot \overline{b}_2$ rel ∂I.

Solución:

Sea $x_0 = f(0)$ y $x_1 = f(1)$. Consideremos la homotopía

$$F\colon I \times I \to Y,$$
$$(s,t) \mapsto \begin{cases} x_0, & \text{si } 0 \le s \le \frac{1-t}{3}, \\ b_1(3s-1+t), & \text{si } \frac{1-t}{3} \le s \le \frac{1}{3}, \\ H(3s-1,t), & \text{si } \frac{1}{3} \le s \le \frac{2}{3}, \\ b_2(t+2-3s), & \text{si } \frac{2}{3} \le s \le \frac{t+2}{3}, \\ x_1, & \text{si } \frac{t+2}{3} \le s \le 1, \end{cases}$$

que corresponde al siguiente dibujo:



Esta función está bien definida y es continua porque es continua en cada trozo, los trozos son cerrados y las definiciones coinciden en las intersecciones. Comprobemos que nos da lo que queremos

$$\begin{aligned} F_0 &= c_{x_0} \cdot f \cdot c_{x_1}, \\ F_1 &= b_1 \cdot g \cdot \overline{b}_2, \\ F(0,t) &= x_0, \text{ para todo } t, \\ F(1,t) &= x_1 \text{ para todo } t. \end{aligned}$$

Luego $f \simeq c_{x_0} \cdot f \cdot c_{x_1} \simeq b_1 \cdot g \cdot \overline{b}_2$ rel ∂I. □

Bonus. Sea A el subespacio de I formado por los elementos $1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ y además el 0.

(a) Demuestra que I/A es homeomorfo al subespacio Y de $\mathbb{R}^2$ dado por la unión de todos los círculos de centro $(1/n, 0)$ y radio $1/n$.

Solución:

Sea C_n el círculo de centro $(1/n, 0)$ y radio $1/n$ y sea

$$\begin{aligned} \alpha_n \colon \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] &\to C_n, \\ t &\mapsto \frac{1}{n} e^{\pi i + 2\pi i n(n+1)(t - 1/(n+1))} + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

el lazo en C_n basado en $(0,0)$ que da una vuelta en sentido positivo alrededor de C_n. Notemos que es inyectiva excepto en sus extremos. Y definimos

$$\begin{aligned} f \colon I &\to Y \\ t &\mapsto \begin{cases} (0,0), & \text{si } t = 0, \\ \alpha_n(t), & \text{si } t \in [1/(n+1), 1/n]. \end{cases} \end{aligned}$$

Notamos que en las intersecciones los trozos continuos coinciden, así que es continua en $(0,1]$. Para ver que es continua en 0, como I es primer numerable, es suficiente ver que f manda sucesiones convergentes al 0 a sucesiones convergentes al $(0,0)$. Y para convergencia podemos usar bolas pues Y es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, que es métrico.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en I que converge a 0 y sea $\varepsilon > 0$. Puesto que el diámetro de C_N es $2/N$, si $2/N < \varepsilon$ entonces todo punto de C_N está a una distancia menor que ε de $(0,0)$, y por lo tanto todo punto de C_n para $n \geq N$.

Como $\{x_n\}$ converge a 0, existe M tal que si $n \geq M$ entonces $x_n < 1/(N+1)$. Entonces $f(x_n) \in C_m$ para algún $m \geq N$ y por lo tanto $\|f(x_n) - (0,0)\| < \varepsilon$. Por lo tanto, $\{f(x_n)\}$ converge a $(0,0)$ y esto prueba la continuidad de f.

Notemos que $f(A) = \{(0,0)\}$, por lo tanto f induce $F\colon I/A \to Y$ continua dada por $F([t]) = f(t)$. Ahora f es sobreyectiva por construcción, así que F también es sobreyectiva. Y f es inyectiva en $I - A$, por como elegimos los α_n, así que F es inyectiva.

Como I es compacto y Y es Hausdorff, F es un homeomorfismo. □

(b) Prueba que los grupos $\pi_1(Y)$ y $H_1(Y)$ no son numerables (Pista: Completa los detalles del ejemplo 1.25 del libro de Hatcher).

Solución:

Consideremos la función $r_n\colon Y \to C_n$ que es la identidad en C_n y manda el resto de círculos al origen. Por como la hemos definido, es una retracción y por lo tanto $(r_n)_*\colon \pi_1(Y) \to \pi_1(C_n) \cong \mathbb{Z}$ es sobreyectiva. Consideremos ahora

$$\begin{aligned} \rho\colon \pi_1(Y) &\to \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}, \\ a &\mapsto ((r_n)_*(a)). \end{aligned}$$

Esto es un homomorfismo porque cada $(r_n)_*$ lo es. Veamos que es sobreyectiva. Sea (k_n) un elemento del producto. Para cada C_i consideremos el lazo $\alpha_i^{k_i}$. Reescalemos este lazo para obtener un lazo $f_i\colon [1-1/i, 1-1/(i+1)] \to C_i$. Sea $h\colon I \to Y$ el lazo basado en $(0,0)$ que en el intervalo $[1-1/i, 1-1/(i+1)]$ está definido por f_i. Si h fuese continua, es claro que $\rho([h]) = (k_n)$, luego ρ es sobreyectiva. Esto quiere decir que la cardinalidad de $\pi_1(Y)$ es mayor que la de $\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}$, el cual no es numerable. Por lo tanto, $\pi_1(Y)$ no es numerable.

Puesto que $\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}$ es conmutativo, ρ factoriza a través de la abelianización de $\pi_1(Y)$, que es $H_1(Y)$ al ser Y arcoconexo. Como ρ es sobreyectiva, también lo es la factorización a través de $H_1(Y)$ y por lo tanto $H_1(Y)$ no es numerable.

Esta función h está bien definida pues es igual al origen en las intersecciones. Veamos que es continua. Sea U un abierto de Y y $x \in h^{-1}(U)$. Si $x \neq 1 - 1/i$ para ningún i, entonces x

está en el interior de alguno de los intervalos $[1-1/i, 1-1/(i+1)]$. Notemos que

$$x \in f_i^{-1}(U \cap C_i) \subseteq h^{-1}(U).$$

Y $f_i^{-1}(U \cap C_i)$ es un abierto en $[1-1/i, 1-1/(i+1)]$ que contiene a x. Como x está en el interior del intervalo, existe un intervalo abierto $(a,b) \subseteq f_i^{-1}(U \cap C_i)$ con $x \in (a,b)$. Luego $x \in (a,b) \subseteq h^{-1}(U)$.

Si $x = 1 - 1/i$, pero $x \neq 0$, entonces $f_i^{-1}(U \cap C_i)$ debe contener un abierto de la forma $[1-1/i, a)$ y $f_{i-1}^{-1}(U \cap C_{i-1})$ debe contener un abierto de la forma $(b, 1-1/i]$. Así que

$$x \in (b,a) \subseteq f_{i-1}^{-1}(U \cap C_{i-1}) \cup f_i^{-1}(U \cap C_i) \subseteq h^{-1}(U).$$

Si $x = 0$, entonces $f_1^{-1}(U \cap C_1)$ debe contener un abierto de la forma $[0, a)$.

Por último, si $x = 1$, U es una vecindad abierta de 0. Sea $r > 0$ tal que $Y \cap B_r(0) \subseteq U$. Existe N tal que si $n \geq N$, entonces $1/n < r$. Se tiene entonces que $C_n \subseteq Y \cap B_r(0) \subseteq U$ si $n \geq N$. Entonces

$$1 \in [1, 1-1/N) \subseteq h^{-1}(Y \cap B_r(0)) \subseteq h^{-1}(U).$$

Luego $h^{-1}(U)$ es abierto. $\square$

(c) Demuestra que $H_1(I,A)$ no es isomorfo a $H_1(I/A)$. Concluye que el par (I,A) no satisface la propiedad de extensión de homotopías.

Solución:

Consideremos el siguiente trozo de la sucesión exacta del par (I,A)

$$H_1(I) \to H_1(I,A) \to H_0(A) \to H_0(I).$$

Como I es contráctil, el primer término es nulo y los restantes están dados por grupos abelianos libres en las componentes arcoconexas.

$$0 \to H_1(I,A) \to \bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{Z}\{1/n\} \bigoplus \mathbb{Z}\{0\} \to \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $H_1(I,A)$ es el núcleo del último homomorfismo, el cual envía todos los generadores al 1. El núcleo es

$$\bigoplus_{n\geq 1} \mathbb{Z}(\{1/n\} - \{0\}),$$

el cual es un grupo de cardinalidad numerable.

Por otra parte, $H_1(I/A) \cong H_1(Y)$ por la parte (a) y $H_1(Y)$ es no numerable por la parte (b), así que $H_1(I/A)$ no puede ser isomorfo a $H_1(I, A)$. Esto implica que (I, A) no tiene la propiedad de extensión de homotopías, pues si la tuviese se debería cumplir $H_1(I, A) \cong H_1(I/A)$. $\square$