

### TAREA 3 A ENTREGARSE EL 19 DE MARZO

Esta tarea tiene una página y contiene seis problemas y un bonus.

1. (12 puntos) Sea  $A$  un subcomplejo de un CW-complejo  $X$ . Demuestra que  $X/A$  tiene una estructura de CW-complejo con una celda por cada celda de  $X$  que no es una celda de  $A$ , y una 0-celda adicional correspondiente al punto al que se colapsó  $A$ .
  2. (8 puntos) Sea  $X$  un CW-complejo que es la unión de dos subcomplejos  $X_1$  y  $X_2$ . Prueba que si  $X_1$ ,  $X_2$  y  $X_1 \cap X_2$  son contráctiles, entonces  $X$  es contráctil. **Pista:** Usa el problema 1 y agarra inspiración del segundo teorema de isomorfismo de teoría de grupos.
  3. (12 puntos) Sea  $X$  un CW-complejo  $n$ -dimensional con una única  $n$ -celda y sea  $x_0$  un punto en el interior de la  $n$ -celda. Demuestra que  $X^{(n-1)}$  es un retracto por deformación de  $X - \{x_0\}$ . Un subespacio  $A$  de  $X$  es un retracto por deformación si existe una retracción por deformación de  $X$  en  $A$  en el sentido de la página 2 del libro de Hatcher. A esto se le llama a veces un retracto por deformación fuerte.
  4. (8 puntos) Considera la estructura CW de  $\mathbb{R}P^3$  que vimos en clase, con  $\mathbb{R}P^1$  como su 1-esqueleto y  $\mathbb{R}P^2$  como su 2-esqueleto. Calcula los grupos de homología de  $\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1$  y  $\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^2$ .
  5. (8 puntos) Una descomposición totalmente acíclica de longitud  $n$  de un espacio  $X$  es una descomposición  $X = U_1 \cup \dots \cup U_n$  tal que los  $U_i$  son abiertos acíclicos y todas las posibles múltiples intersecciones de los  $U_i$  son vacías ó acíclicas. Prueba que  $\tilde{H}_k(X) = 0$  si  $k \geq n - 1$ .
  6. (12 puntos) Calcula los grupos de homología de  $S^1 \times S^2$ .
- Bonus. (10 puntos) Sea  $A$  un subespacio cerrado de  $X$ . Demuestra que si el par  $(X, A)$  satisface la propiedad de extensión de homotopías, también la satisface el par  $(X \cup_A CA, CA)$ .