SOLUCIONES A LA TAREA 3

1. Sea A un subcomplejo de un CW-complejo X. Demuestra que X/A tiene una estructura de CW-complejo con una celda por cada celda de X que no es una celda de A, y una 0-celda adicional correspondiente al punto al que se colapsó A.

Solución:

Para probar esto, construimos un CW-complejo Y inductivamente. Su 0-esqueleto está dado por

$$Y^{(0)} = [X^{(0)} - A^{(0)}] \amalg \{y_0\}$$

Consideremos la función

$$\varphi_0 \colon X^{(0)}/A^{(0)} \to Y^{(0)},$$
$$[x] \mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x \notin A, \\ y_0, & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Esta función es claramente biyectiva y un homeomorfismo porque ambos espacios son discretos.

Supongamos por inducción que hemos construido un CW-complejo $Y^{(n)}$ de dimensión n para el que existe un homeomorfismo $\varphi_n \colon X^{(n)}/A^{(n)} \to Y^{(n)}$ tal que la restricción a $X^{(k)}/A^{(k)}$ es un homeomorfismo sobre $Y^{(k)}$ para todo $k \leq n$.

Sea $\{f_\alpha \colon S^n \to X^{(n)}\}$ el conjunto de funciones de adjunción para las $(n+1)$-celdas de X que no están en A. Denotamos las funciones características correspondientes mediante $F_\alpha \colon D^{n+1} \to X^{(n+1)}$. Las funciones de adjunción para las $(n+1)$-celdas de Y serán las siguientes composiciones

$$S^n \xrightarrow{f_\alpha} X^{(n)} \xrightarrow{q} X^{(n)}/A^{(n)} \xrightarrow{\varphi_n} Y^{(n)},$$

donde q denota a la función cociente. Denotamos esta composición mediante f'_α y consideramos

$$Y^{(n+1)} = Y^{(n)} \cup_{\amalg f'_\alpha} \left(\coprod D^{n+1}_\alpha \right).$$

Consideremos la función

$$\phi_{n+1}\colon X^{(n+1)} \to Y^{(n+1)},$$
$$x \mapsto \begin{cases} [\varphi_n([x])], & \text{si } x \in X^{(n)}, \\ [z]_\alpha, & \text{si } x = F_\alpha(z), \\ [y_0], & \text{si } x \in A, \end{cases}$$

donde $[z]_\alpha$ denota la clase del elemento $z \in D^{n+1}_\alpha$ en $Y^{(n+1)}$. Probemos que esta función está bien definida. Si $x = F_\alpha(z) \in X^{(n)}$, entonces $x = f_\alpha(z)$ y $z \in S^n$. Entonces

$$[z]_\alpha = [f'_\alpha(z)] = [\varphi_n q f_\alpha(z)] = [\varphi_n q(x)] = [\varphi_n([x])].$$

Si $x = F_\alpha(z) = F_\beta(w)$, entonces $f_\alpha(z) = f_\beta(w)$ y z, $w \in S^n$. Y $x \in X^{(n)}$, así que por la parte anterior

$$[z]_\alpha = [\varphi_n([x])] = [w]_\beta.$$

Esto también cubre el caso $\beta = \alpha$, pues las funciones F_α son inyectivas en el interior de D^{n+1}.

Si $a \in A \cap X^{(n)}$, entonces

$$[\varphi_n([a])] = [\varphi_n([a_0])] = [\varphi_0([a_0])] = [y_0],$$

donde $a_0 \in A$. Y si $a = F_\alpha(z) \in A$, como las F_α eran funciones características para las celdas que no están en A, esto implica $a = f_\alpha(z)$ con $z \in S^n$. En particular $a \in A^{(n)}$ y entonces

$$[z]_\alpha = [\varphi_n([a])] = [y_0].$$

La restricción de ϕ_{n+1} a $X^{(n)}$ es $\varphi_n q$, que es continua. Y

$$\phi_{n+1} \circ F_\alpha(z) = [z]_\alpha,$$

esto es, $\phi_{n+1} \circ F_\alpha$ es la función característica de la celda D^{n+1}_α para $Y^{(n+1)}$, así que es continua. Y $\phi_{n+1}F_\beta$ es constante si F_β es la función característica para una $(n+1)$-celda de A. Por lo tanto ϕ_{n+1} es continua.

Notemos que si $a \in A^{(n+1)}$, entonces $\phi_{n+1}(a) = [y_0]$, luego ϕ_{n+1} induce una función continua $\varphi_{n+1}\colon X^{(n+1)}/A^{(n+1)} \to Y^{(n+1)}$. Notemos que la restricción de φ_{n+1} a $X^{(k)}/A^{(k)}$ es un homeomorfismo sobre $Y^{(k)}$ por la hipótesis de inducción. La inversa de φ_{n+1} está dada por

$$\psi_{n+1}\colon Y^{(n+1)} \to X^{(n+1)}/A^{(n+1)},$$
$$[y] \mapsto \begin{cases} \varphi_n^{-1}([y]), & \text{si } y \in Y^{(n)}, \\ [F_\alpha(z)], & \text{si } y = [z]_\alpha. \end{cases}$$

Está bien definida. Si $y = [z]_\alpha \in Y^{(n)}$, entonces $z \in S^n$, así que

$$[F_\alpha(z)] = [f_\alpha(z)] = qf_\alpha(z) = \varphi_n^{-1}\varphi_n q f_\alpha(z) = \varphi_n^{-1} f'_\alpha(z) = \varphi_n^{-1}([z]_\alpha) = \varphi_n^{-1}(y).$$

Si $y = [z]_\alpha = [z']_\beta$, entonces de nuevo z, $z' \in S^n$ y

$$[F_\alpha(z)] = \varphi_n^{-1}(y) = [F_\beta(z')].$$

La restricción de ψ_{n+1} a $Y^{(n)}$ es φ_n^{-1}, que es continua por la hipótesis de inducción. La composición de ψ_{n+1} con la función característica F'_α es qF_α, que es continua. Luego ψ_{n+1} es continua. Y es claramente la inversa de φ_{n+1}, lo cual muestra que φ_{n+1} es un homeomorfismo. Y notemos que las inversas ψ_n de φ_n satisfacen que la restricción al k-esqueleto es ψ_k.

Finalmente, consideremos el CW-complejo $Y = \bigcup Y^{(n)}$ y la función

$$\psi\colon Y \to X/A,$$
$$y \mapsto \psi_n(y), \quad \text{si } y \text{ pertenece a } Y^{(n)}.$$

Esta función está bien definida porque la restricción de ψ_n al k-esqueleto es ψ_k. Y es continua porque la restricción a cada esqueleto es continua. Es biyectiva porque cada ψ_n es biyectiva. Sea U un abierto de Y. Esto se cumple si y solo si $U \cap Y^{(n)}$ es abierto en $Y^{(n)}$ para todo n.

$$\psi(U) = \bigcup \psi_n(U \cap Y^{(n)}).$$

Sea $p\colon X \to X/A$ el cociente. Entonces $\bigcup \psi_n(U \cap Y^{(n)})$ es abierto si y solo si $p^{-1}(\bigcup \psi_n(U \cap Y^{(n)}))$ es abierto en X. Pero como X es un CW-complejo, esto es abierto si y solo si sus intersecciones con $X^{(n)}$ son abiertas en $X^{(n)}$

$$p^{-1}\left(\bigcup \psi_n(U \cap Y^{(n)})\right) \cap X^{(n)} = p^{-1}(\psi_n(U \cap Y^{(n)})).$$

Como $\psi_n(U \cap Y^{(n)})$ es abierto en $X^{(n)}/A^{(n)}$, este conjunto es abierto en $X^{(n)}$. Esto muestra que ψ es abierta. Por lo tanto ψ es un homeomorfismo y esto le da a X/A la estructura de un CW-complejo. $\square$

2. Sea X un CW-complejo que es la unión de dos subcomplejos X_1 y X_2. Prueba que si X_1, X_2 y $X_1 \cap X_2$ son contráctiles, entonces X es contráctil.

Solución:

Notemos que la inclusión de X_1 en X envía $X_1 \cap X_2$ dentro de X_2, así que por la propiedad universal de la topología cociente induce una función continua

$$\begin{aligned} f\colon \frac{X_1}{X_1 \cap X_2} &\to \frac{X}{X_2}, \\ [x] &\mapsto [x], \end{aligned}$$

Es claramente biyectiva y su inversa está dada por

$$\begin{aligned} h\colon \frac{X}{X_2} &\to \frac{X_1}{X_1 \cap X_2}, \\ [x] &\mapsto \begin{cases} [x], & \text{si } x \in X_1, \\ [x_2], & \text{si } x \in X_2, \end{cases} \end{aligned}$$

donde $x_2 \in X_1 \cap X_2$. Mostremos que esta función es continua. Como X/X_2 es un CW-complejo, es suficiente mostrar que la composición con las funciones características son continuas. Sea $\Phi\colon D^n \to X/X_2$ una función característica para una celda de X/X_2 que viene de una celda de X que no está en X_2. Entonces Φ es una composición

$$D^n \to X \xrightarrow{q} X/X_2,$$

donde q es el cociente y la primera función es la función característica de una celda de X. Como esta celda no está en X_2 y $X = X_1 \cup X_2$, esta celda debe estar en X_1, es decir, esta composición factoriza como

$$D^n \to X_1 \to X \xrightarrow{q} X/X_2,$$

donde la segunda función es la inclusión. Entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[drr, "r"'] & X \arrow[r] & X/X_2 \arrow[d, "h"] \\ & & & X_1/(X_1 \cap X_2) \end{tikzcd}$$

donde r es el cociente. Y entonces $h\Phi = r\Phi$, que es continua. Por otra parte, si $\Phi\colon D^0 \to X/X_2$ es la 0-celda dada por $\Phi(*) = [x_2]$, entonces Φh es obviamente continua. Esto muestra que hay un homeomorfismo

$$\frac{X}{X_2} \cong \frac{X_1}{X_1 \cap X_2}.$$

Ahora, tenemos las siguientes equivalencias homotópicas

$$X \simeq \frac{X}{X_2} \cong \frac{X_1}{X_1 \cap X_2} \simeq X_1 \simeq *,$$

donde la primera equivalencia homotópica viene del hecho de que X_2 es contráctil y (X, X_2) es un CW-par, la segunda equivalencia se cumple porque $X_1 \cap X_2$ es contráctil y $(X_1, X_1 \cap X_2)$ es un CW-par, y la última equivalencia se cumple porque X_1 es contráctil. $\square$

3. (12 puntos) Sea X un CW-complejo n-dimensional con una única n-celda y sea x_0 un punto en el interior de la n-celda. Demuestra que $X^{(n-1)}$ es un retracto por deformación de $X - \{x_0\}$. Un subespacio A de X es un retracto por deformación si existe una retracción por deformación de X en A en el sentido de la página 2 del libro de Hatcher. A esto se le llama a veces un retracto por deformación fuerte.

Solución:

Notemos primero que si a es un punto en el interior de D^n, entonces S^{n-1} es un retracto por deformación fuerte de $D^n - \{a\}$. Las funciones que logran esto son la inclusión $j\colon S^{n-1} \to D^n - \{a\}$ y la función $r\colon D^n - \{a\} \to S^{n-1}$ definida como sigue. Dado z en $D^n - \{a\}$, el segmento que comienza en a y pasa por z intersecta S^{n-1} en un único punto $r(z)$. Es claro que $rj = 1_{S^{n-1}}$ y $jr \simeq 1_{D^n - \{a\}}$ rel S^{n-1} a través de la homotopía H que traslada a lo largo del segmento entre z y $r(z)$.

Sea $i\colon X^{(n-1)} \to X - \{x_0\}$ la inclusión y digamos que $X = X^{(n-1)} \cup_f D^n$ y $x_0 = [a]$. Sea $\Phi\colon D^n \to X$ la función característica de la única n-celda.

Mostremos primero que $X - \{x_0\}$ es homeomorfo a $X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\})$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \varphi\colon X - \{x_0\} &\to X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\}), \\ [x] &\mapsto [x]. \end{aligned}$$

Está bien definida porque la clase de a solo tiene un elemento y las relaciones de equivalencia en ambos espacios coinciden. Para ver que es continua, sea U un abierto de $X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\})$. Esto significa que $U \cap X^{(n-1)}$ es abierto en $X^{(n-1)}$ y $\Phi'^{-1}(U)$ es abierto en $D^n - \{a\}$, donde $\Phi'\colon D^n - \{a\} \to X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\})$ envía un elemento a su clase. Notemos que Φ' es la restricción de dominio y codominio de Φ.

Notemos que $\varphi^{-1}(U) \cap X^{(n-1)} = U \cap X^{(n-1)}$, que es abierto en $X^{(n-1)}$. Y notemos que $\Phi^{-1}\varphi^{-1}(U) = \Phi'^{-1}(U)$ es abierto en $D^n - \{a\}$, luego abierto en D^n. Esto muestra que $\varphi^{-1}(U)$ es abierto en X, y por lo tanto es abierto en $X - \{x_0\}$.

Su inversa está dada por

$$\begin{aligned} \psi\colon X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\}) &\to X - \{x_0\}, \\ [x] &\mapsto [x]. \end{aligned}$$

Está bien definida por las mismas razones. Sea U un abierto de $X - \{x_0\}$. Esto significa $U = V \cap (X - \{x_0\})$ para un cierto abierto de X. En particular, $V \cap X^{(n-1)}$ es abierto en $X^{(n-1)}$ y $\Phi^{-1}(V)$ es abierto en D^n.

Ahora $\psi^{-1}(U) \cap X^{(n-1)} = V \cap X^{(n-1)}$, que es abierto en $X^{(n-1)}$. Y $\Phi'^{-1}(\psi^{-1}(U)) = \Phi^{-1}(V) \cap (D^n - \{a\})$. Como $\Phi^{-1}(V)$ es abierto en D^n, esto es abierto en $D^n - \{a\}$. Por lo tanto $\psi^{-1}(U)$ es abierto, así que ψ es continua.

Ahora consideremos la función

$$\begin{aligned} s\colon X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\}) &\to X^{(n-1)}, \\ [x] &\mapsto \begin{cases} x, & \text{si } x \in X^{(n-1)}, \\ fr(x), & \text{si } x \in D^n - \{a\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función está bien definida, pues si $[x] = [z]$ con $x \in X^{(n-1)}$ y $z \in D^n - \{a\}$, entonces $z \in S^{n-1}$ y $f(z) = x$. Como r es una retracción sobre S^{n-1}, tenemos $x = rf(z)$. Y es continua, pues es la identidad cuando se restringe a $X^{(n-1)}$ y $s\Phi' = fr$, que son ambas continuas.

Sea $v\colon X - \{x_0\} \to X^{(n-1)}$ la función dada por $v = s\varphi$. Notemos que

$$vi(x) = v([x]) = s\varphi([x]) = s([x]) = x,$$

luego v es una retracción.

Consideremos la homotopía

$$\begin{aligned} F\colon X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\}) \times I &\to X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\}), \\ ([x], t) &\mapsto \begin{cases} [x], & \text{si } x \in X^{(n-1)}, \\ [H(x,t)], & \text{si } x \in D^n - \{a\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Está bien definida, pues si $[x] = [z]$ con $x \in X^{(n-1)}$ y $z \in D^n - \{a\}$, entonces $z \in S^{n-1}$ y $f(z) = x$. Entonces $H(z,t) = z$ porque H es una homotopía rel S^{n-1} y entonces

$$[H(z,t)] = [z] = [x].$$

Para ver que es continua, notemos que la topología producto sobre $X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\}) \times I$ coincide con la topología final con respecto a las funciones $X^{(n-1)} \times I \to X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\}) \times I$ y $(D^n - \{a\}) \times I \to X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\}) \times I$ por la compatibilidad de la topología final y la topología producto en este caso. Ahora la restricción de F a $X^{(n-1)} \times I$ es la composición de la proyección $X^{(n-1)} \times I \to X^{(n-1)}$ con la inclusión $X^{(n-1)} \to X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\})$, luego es continua. Y la composición $F \circ (\Phi' \times 1_I)$ coincide con la composición de H con Φ', luego es continua. Por lo tanto F es continua.

Satisface $F_0 = 1$ y $F_1 = ks$, donde $k\colon X^{(n-1)} \to X^{(n-1)} \cup_f (D^n - \{a\})$ es la inclusión. Y $F([x],t) = F([x],0)$ para todo t, luego es una homotopía rel $X^{(n-1)}$.

Consideremos la homotopía $G\colon (X - \{x_0\}) \times I \to X - \{x_0\}$ dada por $G(x,t) = \psi F(\varphi(x),t)$, que satisface

$$G(x,0) = \psi F(\varphi(x),0) = \psi\varphi(x) = x,$$
$$G(x,1) = \psi F(\varphi(x),1) = \psi k s \varphi(x) = \psi k v = iv,$$

y si $x \in X^{(n-1)}$, entonces $\varphi(x) \in X^{(n-1)}$ y por lo tanto

$$G(x,t) = \psi F(\varphi(x),t) = \psi F(\varphi(x),0) = G(x,0).$$

Luego $iv \simeq 1$ rel $X^{(n-1)}$. Esto concluye la demostración de que v es una retracción por deformación fuerte. □

4. (8 puntos) Considera la estructura CW de $\mathbb{R}P^3$ que vimos en clase, con $\mathbb{R}P^1$ como su 1-esqueleto y $\mathbb{R}P^2$ como su 2-esqueleto. Calcula los grupos de homología de $\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1$ y $\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^2$.

Solution:

Como $\mathbb{R}P^n$ se forma desde $\mathbb{R}P^{n-1}$ adjuntando una n-celda, tenemos $\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1} \cong S^n$. En particular, $\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^2 \cong S^3$ y entonces

$$H_k(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0,3, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calculemos los grupos de homología de $\mathbb{R}P^2$ usando $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ y $\mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1 \cong S^2$. Puesto que $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^1)$ es un CW-par, satisface la propiedad de extensión de homotopías y la sucesión exacta larga del par tiene la forma

$$\widetilde{H}_{k+1}(S^2) \to H_k(S^1) \xrightarrow{i_*} H_k(\mathbb{R}P^2) \to \widetilde{H}_k(S^2) \to H_{k-1}(S^1).$$

Si $k \geq 3$, tenemos

$$0 \to H_k(\mathbb{R}P^2) \to 0,$$

luego $H_k(\mathbb{R}P^2) = 0$. Miremos ahora el trozo

$$H_2(S^1) \to H_2(\mathbb{R}P^2) \to H_2(S^2) \to H_1(S^1) \xrightarrow{i_*} H_1(\mathbb{R}P^2),$$

que se convierte en

$$0 \to H_2(\mathbb{R}P^2) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z}/2.$$

Ya vimos en clase que $i_* \colon H_1(S^1) \to H_1(\mathbb{R}P^2)$ corresponde al cociente $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$. Por lo tanto la función f debe ser multiplicación por ± 2. En particular, es inyectiva y $H_2(\mathbb{R}P^2) = 0$. Luego

$$H_k(\mathbb{R}P^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{Z}/2, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{si } k \leq 2. \end{cases}$$

Similarmente, usando el par $(\mathbb{R}P^3, \mathbb{R}P^2)$ tenemos una sucesión exacta larga

$$\widetilde{H}_{k+1}(S^3) \to H_k(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{i_*} H_k(\mathbb{R}P^3) \to \widetilde{H}_k(S^3) \to H_{k-1}(\mathbb{R}P^2).$$

Si $k \geq 4$, entonces

$$0 \to H_k(\mathbb{R}P^3) \to 0,$$

luego $H_k(\mathbb{R}P^3) = 0$. Veamos el pedazo

$$H_3(\mathbb{R}P^2) \to H_3(\mathbb{R}P^3) \to H_3(S^3) \to H_2(\mathbb{R}P^2),$$

es decir,

$$0 \to H_3(\mathbb{R}P^3) \to \mathbb{Z} \to 0,$$

y por lo tanto $H_3(\mathbb{R}P^3) \cong \mathbb{Z}$. También miramos el trozo

$$H_2(\mathbb{R}P^2) \to H_2(\mathbb{R}P^3) \to H_2(S^3),$$

de donde obtenemos $H_2(\mathbb{R}P^3) = 0$. Y sabemos $H_1(\mathbb{R}P^3) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^3)_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}/2$. Para resumir,

$$H_k(\mathbb{R}P^3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, 3, \\ \mathbb{Z}/2, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{si } k = 2 \text{ ó } k \geq 4. \end{cases}$$

Para calcular los grupos de homología de $\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1$ miramos la sucesión exacta larga del par $(\mathbb{R}P^3, \mathbb{R}P^1)$

$$\widetilde{H}_{k+1}(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) \to H_k(S^1) \xrightarrow{i_*} H_k(\mathbb{R}P^3) \to \widetilde{H}_k(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) \to H_{k-1}(S^1).$$

Si $k \geq 4$, tenemos

$$0 \to H_k(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) \to 0.$$

También tenemos

$$H_3(S^1) \to H_3(\mathbb{R}P^3) \to H_3(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) \to H_2(S^1).$$

Como los términos de los extremos son cero, obtenemos $H_3(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$. Ahora miramos el pedazo

$$H_2(\mathbb{R}P^3) \to H_2(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) \to H_1(S^1) \xrightarrow{i_*} H_1(\mathbb{R}P^3) \to H_1(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) \to H_0(S^1) \xrightarrow{i_*} H_0(\mathbb{R}P^3).$$

Ya vimos en clase que $i_*\colon H_1(S^1) \to H_1(\mathbb{R}P^3)$ corresponde al cociente $q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$ y el morfismo $i_*\colon H_0(S^1) \to H_0(\mathbb{R}P^3)$ a la identidad porque ambos son arcoconexos. Por lo tanto esta sucesión se convierte en

$$0 \to H_2(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/2 \to H_1(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) \to \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z},$$

de donde obtenemos $H_2(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$ y $H_1(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) = 0$. Luego

$$H_k(\mathbb{R}P^3/\mathbb{R}P^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, 2, 3, \\ 0, & \text{si } k = 1 \text{ ó } k \geq 4, \end{cases}$$

y esto concluye todos los cálculos requeridos. □

5. Una descomposición totalmente acíclica de longitud n de un espacio X es una descomposición $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ tal que los U_i son abiertos acíclicos y todas las posibles múltiples intersecciones de los U_i son vacías ó acíclicas. Prueba que $\widetilde{H}_k(X) = 0$ si $k \geq n - 1$.

Solución:

Lo probaremos por inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces esto quiere decir que X es acíclico, así que $\tilde{H}_k(X) = 0$ para todo k, con lo cual se cumple lo requerido.

Supongamos que es cierto para todo $m \leq n - 1$ y sea $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ con $n \geq 2$.

Sea $Y = U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}$, el cual cumple por la hipótesis de inducción que $\tilde{H}_k(Y) = 0$ si $k \geq n-2$. Ahora $X = Y \cup U_n$. Podemos calcular la homología de X usando Mayer-Vietoris, ya que Y y U_n son abiertos.

Caso 1. Si $Y \cap U_n = \emptyset$, entonces $X = Y \amalg U_n$ y por lo tanto $H_k(X) \cong H_k(Y) \oplus H_k(U_n)$ si $k \geq 1$. Pero $H_k(U_n) = 0$ para todo $k \geq 1$ porque U_n es acíclico. Y si $k \geq n-1 \geq 1$, como $n-1 \geq n-2$, se tiene $H_k(Y) = \tilde{H}_k(Y) = 0$. Por lo tanto $H_k(X) = \tilde{H}_k(X) = 0$ si $k \geq n-1$.

Caso 2. Si $Y \cap U_n$ no es vacío.

$$Y \cap U_n = (U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}) \cap U_n = (U_1 \cap U_n) \cup \ldots \cup (U_{n-1} \cap U_n).$$

Sabemos que $U_k \cap U_n$ son abiertos en $Y \cap U_n$ que son acíclicos o vacíos (no todos vacíos porque suponemos que $Y \cap U_n \neq \emptyset$ en este caso). Y las múltiples intersecciones de estos son intersecciones de U_j, así que son acíclicas o vacías. Por lo tanto, esto es una descomposición totalmente acíclica de $Y \cap U_n$ de longitud menor o igual a $n-1$ (algunos $U_k \cap U_n$ pueden ser vacíos). Por la hipótesis de inducción, se tiene que $\tilde{H}_k(Y \cap U_n) = 0$ si $k \geq n-2$.

Sea $k \geq n-1 \geq 1$ y consideremos el siguiente trozo de la sucesión exacta de Mayer-Vietoris:

$$H_k(Y \cap U_n) \to H_k(Y) \oplus H_k(U_n) \to H_k(X) \to H_{k-1}(Y \cap U_n) \to H_{k-1}(Y) \oplus H_{k-1}(U_n).$$

Como $k \geq n-1 \geq n-2$ y $k \geq 1$, se tiene $H_k(Y \cap U_n) = H_k(Y) = 0$. Y como U_n es acíclico, también $H_k(U_n) = 0$. Si $k-1 \geq 1$, se tendría $k-1 \geq n-2$ y $H_{k-1}(Y \cap U_n) = H_{k-1}(Y) = H_{k-1}(U_n) = 0$. Y entonces $H_k(X) = 0$.

Si $k-1 = 0$, notemos que $Y \cap U_n$ es la unión de los $U_j \cap U_n$ que son vacíos o arcoconexos. Como la función $H_0(Y \cap U_n) \to H_0(Y)$ corresponde a inclusión de componentes arconexas, es inyectiva y entonces también lo es la función $H_0(Y \cap U_n) \to H_0(Y) \oplus H_0(U_n)$. Así que en este caso también $H_k(X) = 0$. $\square$

6. Calcula los grupos de homología de $S^1 \times S^2$.

Solution:

Sea $U_1 = \{(x, y) \in S^1 \mid y > -1/2\}$ y $V_1 = \{(x, y) \in S^1 \mid y < 1/2\}$. Estos forman una cubierta abierta de S^1 y por lo tanto $U = U_1 \times S^2$ y $V = V_1 \times S^2$ forman una cubierta abierta de S^2. Como U_1 y U_2 son contráctiles, U y V son homotópicamente equivalentes a S^2. Notemos que $U_1 \cap U_2$ es homotópicamente equivalente a S^0, luego $U \cap V = (U_1 \cap V_1) \times S^2$

es homotópicamente equivalente a $S^0 \times S^2$. Ahora podemos aplicar Mayer-Vietoris para esta cubierta abierta de $S^1 \times S^2$.

$$H_n(U \cap V) \to H_n(U) \oplus H_n(V) \to H_n(S^1 \times S^2) \to H_{n-1}(U \cap V).$$

Si $n \geq 4$, entonces

$$0 \to H_n(S^1 \times S^2) \to 0,$$

y por lo tanto $H_n(S^1 \times S^2) = 0$. Ahora miramos el trozo

$$H_3(U) \oplus H_3(V) \to H_3(S^1 \times S^2) \to H_2(U \cap V) \to H_2(U) \oplus H_2(V) \to H_2(S^1 \times S^2) \to H_1(U \cap V),$$

que se convierte en

$$0 \to H_3(S^1 \times S^2) \to \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 \to H_2(S^1 \times S^2) \to 0.$$

El morfismo $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ corresponde al morfismo $\varphi_* \colon H_2(U \cap V) \to H_2(U) \oplus H_2(V)$ dado por $\varphi_*(z) = ((i_U)_*(z), -(i_V)_*(z))$, donde i_U y i_V son las inclusiones correspondientes. Analicemos $i_U \colon U \cap V \to U$. Esta función corresponde a

$$\begin{aligned} i_U \colon (U_1 \cap V_1) \times S^2 &\to U_1 \times S^2, \\ (x, y) &\mapsto (i_{U_1}(x), y). \end{aligned}$$

Notemos que $U_1 \cap V_1$ tiene dos componentes arcoconexas C_1 y C_2 y

$$H_2((U_1 \cap V_1) \times S^2) \cong H_2(C_1 \times S^2) \oplus H_2(C_2 \times S^2).$$

Como C_1 y U_1 son contráctiles, la inclusión de C_1 en U_1 es una equivalencia homotópica. Sea $x \in C_1$, entonces el diagrama de inclusiones

$$\begin{tikzcd} C_1 \times S^2 \arrow[r] & U_1 \times S^2 \\ \{x\} \times S^2 \arrow[u] \arrow[r] & \{x\} \times S^2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además, las funciones verticales son equivalencias homotópicas y la función horizontal de abajo es la identidad. Así que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H_2(C_1 \times S^2) \arrow[r] & H_2(U_1 \times S^2) \\ H_2(S^2) \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "1"] & H_2(S^2) \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Notemos que lo mismo aplica para la inclusión de C_1 en U_2 y para las inclusiones de C_2 en U_1 ó U_2. Por lo tanto, el morfismo $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ envía (x, y) a $(x + y, -x - y)$. Y entonces

$H_3(S^1 \times S^2) \cong \mathbb{Z}$ y $H_2(S^1 \times S^2) \cong \mathbb{Z}$. Por otra parte, $S^1 \times S^2$ es arcoconexo, así que $H_0(S^1 \times S^2) \cong \mathbb{Z}$ y

$$H_1(S^1 \times S^2) \cong \pi_1(S^1 \times S^2)_{\mathrm{ab}} \cong \pi_1(S^1)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}.$$

Para resumir

$$H_k(S^1 \times S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } 0 \leq k \leq 3, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y esto concluye el cálculo. $\square$

Bonus. (10 puntos) Sea A un subespacio cerrado de X. Demuestra que si el par (X, A) satisface la propiedad de extensión de homotopías, también la satisface el par $(X \cup_A CA, CA)$.

Solution:

Recordemos que un par (Y, B) satisface la propiedad de extensión de homotopías si dada una homotopía $H \colon B \times I \to Z$ y una función $f \colon Y \to Z$ tal que $H_0 = f_{|B}$, existe una homotopía $F \colon Y \times I \to Z$ que extiende H y tal que $F_0 = f$.

Sea Z un espacio cualquiera y sean $H \colon CA \times I \to Z$ y $f \colon X \cup_A CA \to Z$ con $H_0 = f_{|CA}$.

Consideremos la restricción G de H al subespacio $A \times I$ y la restricción g de f al subespacio X. Entonces se tiene $G_0 = g_{|A}$. Esto nos define una función continua

$$g \cup G \colon X \times \{0\} \cup A \times I \to Z,$$
$$(z, t) \mapsto \begin{cases} g(z), & \text{si } (z, t) = (x, 0), \\ G(z, t), & \text{si } z \in A, \end{cases}$$

si A es cerrado en X, pues cada trozo es continuo y las definiciones coinciden en la intersección $A \times \{0\}$. Como (X, A) satisface la propiedad de extensión de homotopías, existe una retracción $r \colon X \times I \to X \times \{0\} \cup A \times I$. Sea $F = (g \cup G) \circ r \colon X \times I \to Z$, la cual es continua al serlo r y $g \cup G$.

Definimos

$$\begin{aligned} J\colon (X \cup_A CA) \times I &\to Z, \\ ([x],t) &\mapsto F(x,t), \qquad \text{si } x \in X, \\ ([a,s],t) &\mapsto H([a,s],t), \qquad \text{si } [a,s] \in CA. \end{aligned}$$

Veamos que está bien definida. Si $([x],t) = ([a,s],t')$, entonces $t = t'$, $s = 1$ y $x = a$. En este caso

$$F(a,t) = Gr(a,t) = G(a,t) = H([a,1],t),$$

donde la segunda igualdad es porque r es una retracción y la tercera porque G es la restricción de H a $A \times I$. Por lo tanto J está bien definida.

Para ver que es continua, sea $q\colon X \amalg CA \to X \cup_A CA$ el cociente. Notemos que $(X \amalg CA) \times I$ es homeomorfo a $(X \times I) \amalg (CA \times I)$ mediante las funciones α que llevan (r,t) a (r,t). Consideremos la función

$$(F \amalg H) \circ \alpha \colon (X \amalg CA) \times I \to Z.$$

Es continua, pues F, H y α lo son. Por otra parte, se tiene $J(q \times 1_I) = (F \amalg H) \circ \alpha$. Como $(X \cup_A CA) \times I$ tiene la topología final con respecto a $q \times 1_I$, la función J es continua.

Esta función J es la que buscábamos, pues extiende H en CA por definición y satisface

$$\begin{aligned} J_0([x]) &= F(x,0) = (g \cup G)r(x,0) = (g \cup G)(x,0) = g(x) = f([x]), \\ J_0([a,s]) &= H([a,s],0) = f([a,s]), \end{aligned}$$

concluyendo así el problema.