

TAREA 4 A ENTREGARSE EL 27 DE ABRIL

Esta tarea tiene dos páginas y contiene seis problemas.

1. (8 puntos) Calcula los grupos de homología celular de M_g con su estructura celular dada por su presentación poligonal estándar.
2. (10 puntos) Calcula los grupos de homología del espacio cociente X de $S^1 \times S^1$ obtenido al identificar puntos en el círculo $S^1 \times \{1\}$ que están relacionados mediante rotación por $2\pi/m$ y al identificar puntos en el círculo $\{1\} \times S^1$ que están relacionados mediante rotación por $2\pi/n$. Asumimos $m, n > 1$.
3. (10 puntos) Sea U un abierto de \mathbb{R}^n y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua e inyectiva. Prueba que $f(U)$ es abierto en \mathbb{R}^n y que $f: U \rightarrow f(U)$ es un homeomorfismo.
4. Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice celular si satisface $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$ para todo $n \geq 0$.
 - (a) (6 puntos) Demuestra que f induce un morfismo de complejos $f_{\#}^{\text{CW}}: C_*^{\text{CW}}(X) \rightarrow C_*^{\text{CW}}(Y)$ y por lo tanto homomorfismos $f_*^{\text{CW}}: H_n^{\text{CW}}(X) \rightarrow H_n^{\text{CW}}(Y)$.
 - (b) (10 puntos) Muestra que el isomorfismo entre homología singular y celular es natural en el sentido de que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(X) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_n^{\text{CW}}(X) & \xrightarrow{f_*^{\text{CW}}} & H_n^{\text{CW}}(Y) \end{array}$$

donde los isomorfismos son los que se construyeron en la demostración de que homología singular y homología celular coinciden.

5. (8 puntos) Una función $f: S^n \rightarrow S^n$ que satisface $f(x) = f(-x)$ para todo x se conoce como una función par. Supongamos $n > 0$. Muestra que el grado de una función par debe ser par, y que debe ser cero si n es par.

6. (8 puntos) Sea $f: S^n \rightarrow S^n$ una función de grado cero. Demuestra que existen puntos $x, y \in S^n$ con $f(x) = x$ y $f(y) = -y$. Usa esto para mostrar que si F es un campo vectorial continuo definido sobre D^n en \mathbb{R}^n tal que $F(x) \neq 0$ para todo x , entonces existe un punto en D^n donde F apunta radialmente hacia fuera y otro punto en D^n donde F apunta radialmente hacia dentro.