SOLUCIONES A LA TAREA 4

1. Calcula los grupos de homología celular de M_g con su estructura celular dada por su presentación poligonal estándar.

Solución:

Sea v la 0-celda, $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ las 1-celdas y U la 2-celda en la estructura de CW-complejo de M_g dada por su presentación poligonal estándar. Orientamos el borde de U en sentido positivo y las 1-celdas con las orientaciones que indican la notación de sus identificaciones. Entonces el complejo celular tiene la forma

$$\mathbb{Z}U \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{i=1}^{g} \mathbb{Z}a_i \oplus \mathbb{Z}b_i \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}v,$$

donde d_1 es el morfismo cero y

$$d_2(U) = a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \cdots + a_g + b_g - a_g - b_g = 0.$$

Por lo tanto,

$$H_k^{\mathrm{CW}}(M_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^{2g}, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y esto concluye el cálculo. $\square$

2. Calcula los grupos de homología del espacio cociente X de $S^1 \times S^1$ obtenido al identificar puntos en el círculo $S^1 \times \{1\}$ que están relacionados mediante rotación por $2\pi/m$ y al identificar puntos en el círculo $\{1\} \times S^1$ que están relacionados mediante rotación por $2\pi/n$. Asumimos m, $n > 1$.

Solución:

Consideremos el modelo plano de $S^1 \times S^1$ donde el borde del cuadrado corresponde a los elementos que tienen alguna de las coordenadas 1. Las identificaciones requeridas para construir X corresponden a subdividir el suelo y el techo en n partes iguales y todas las partes están identificadas entre sí, y subdividir cada una de las paredes en m partes iguales y todas estas partes están identificadas entre sí. Notemos que entonces todos los vértices están identificados entre sí.

Este modelo plano de X nos dice como darle una estructura de CW-complejo. Empezamos con un vértice v para su 0-esqueleto. Le adjuntamos dos 1-celdas a (cada una de las partes del suelo/techo) y b (cada una de las partes de las paredes), con lo que su 1-esqueleto es $S^1 \vee S^1$. Y por último le adjuntamos una 2-celda U mediante el lazo $a^n b^m a^{-n} b^{-m}$. Orientamos la 1-celda a para que apunte hacia la derecha y la 1-celda b para que apunte hacia arriba. Orientamos el borde de la 2-celda U en sentido positivo.

Consideremos su complejo celular

$$\mathbb{Z}U \xrightarrow{d_2} \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}v \to 0,$$

donde

$$\begin{aligned} d_2 U &= na + mb - na - mb = 0, \\ d_1 a &= d_1 b = 0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} H_0^{CW}(X) &\cong \frac{\mathbb{Z}v}{\operatorname{Im} d_1} = \frac{\mathbb{Z}v}{0} \cong \mathbb{Z}, \\ H_1^{CW}(X) &\cong \frac{\operatorname{Ker} d_1}{\operatorname{Im} d_2} = \frac{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b}{0} \cong \mathbb{Z}^2, \\ H_2^{CW}(X) &\cong \frac{\operatorname{Ker} d_2}{\operatorname{Im} d_3} = \frac{\mathbb{Z}U}{0} \cong \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

Y el resto son cero, así que

$$H_k^{CW}(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^2, & \text{si } k = 1, \\ 0, & \text{si } k > 2, \end{cases}$$

y esto concluye el cálculo. □

3. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ una función continua e inyectiva. Prueba que $f(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ y que $f \colon U \to f(U)$ es un homeomorfismo.

Solución:

Sea $x \in U$. Encontraremos una vecindad abierta (en $\mathbb{R}^n$) de $f(x)$ dentro de $f(U)$. Sea W una vecindad abierta de x cuyo cierre es compacto y está contenido en U. Consideremos la restricción

$$f_| \colon \overline{W} \to f(\overline{W}).$$

Es una función continua biyectiva de un espacio compacto a un espacio Hausdorff, así que es un homeomorfismo. Como W es abierto en $\mathbb{R}^n$ y $f(W)$ es homeomorfo a W, también $f(W)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ por el teorema de invarianza de dominios. Entonces $f(W)$ es una vecindad abierta en $\mathbb{R}^n$ de $f(x)$ que está contenida en $f(U)$, luego $f(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Ciertamente la función $f \colon U \to f(U)$ es continua y biyectiva. Sea V un abierto de U. Como la restricción $f \colon V \to \mathbb{R}^n$ es continua e inyectiva, por la parte anterior $f(V)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, luego abierto en $f(U)$. Por lo tanto, $f \colon U \to f(U)$ es un homeomorfismo. □

4. Una función $f \colon X \to Y$ se dice celular si satisface $f(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$ para todo $n \geq 0$.

(a) Demuestra que f induce un morfismo de complejos $f_\#^{\mathrm{CW}} \colon C_*^{\mathrm{CW}}(X) \to C_*^{\mathrm{CW}}(Y)$ y por lo tanto homomorfismos $f_*^{\mathrm{CW}} \colon H_n^{\mathrm{CW}}(X) \to H_n^{\mathrm{CW}}(Y)$.

Solución:

Recordemos que los grupos del complejo celular se definen como $C_k^{CW}(X) := H_k(X^k, X^{k-1})$. La función f induce un homomorfismo $f_* \colon H_k(X^k, X^{k-1}) \to H_k(Y^k, Y^{k-1})$, y lo llamaremos $f_\#^{\mathrm{CW}}$. Este homomorfismo conmuta con las diferenciales del complejo celular:

$$\begin{tikzcd}
C_k^{\mathrm{CW}}(X) := \arrow[d, dashed, "f_\#^{\mathrm{CW}}"] & H_k(X^k, X^{k-1}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_*"] & H_{k-1}(X^{k-1}) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_{k-1}(X^{k-1}, X^{k-2}) \arrow[d, "f_*"] & =: C_{k-1}^{\mathrm{CW}}(X) \arrow[d, dashed, "f_\#^{\mathrm{CW}}"] \\
C_k^{\mathrm{CW}}(Y) := & H_k(Y^k, Y^{k-1}) \arrow[r, "\partial"] & H_{k-1}(Y^{k-1}) \arrow[r, "j_*"] & H_{k-1}(Y^{k-1}, Y^{k-2}) & =: C_{k-1}^{\mathrm{CW}}(Y)
\end{tikzcd}$$

Las filas son las diferenciales de los complejos celulares. Las flechas horizontales son parte de sucesiones exactas largas, y los dos cuadrados de en medio conmutan porque la sucesión exacta larga del par es natural. Así que los homomorfismos $f_\#^{\mathrm{CW}}$ forman un morfismo de complejos y esto induce homomorfismos f_*^{CW} en homología celular. □

(b) Muestra que el isomorfismo entre homología singular y celular es natural en el sentido de que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H_n(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\cong"] & H_n(Y) \arrow[d, "\cong"] \\
H_n^{\mathrm{CW}}(X) \arrow[r, "f_*^{\mathrm{CW}}"] & H_n^{\mathrm{CW}}(Y)
\end{tikzcd}$$

donde los isomorfismos son los que se construyeron en la demostración de que homología singular y homología celular coinciden.

Solución:

Recordemos que hay un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \\
0 \arrow[dr, "i_*"] & & H_n(X^{(n+1)}) \arrow[ur, "j_*"] \arrow[r, "i_*", "\cong"'] & H_n(X) \\
 & H_n(X^{(n)}) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"] & & \\
H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) &
\end{tikzcd}$$

Los morfismos etiquetados con i_* y j_* vienen de inclusiones de la forma $X^{(n)} \hookrightarrow X^{(n+1)}$ y $(X^{(n)}, \emptyset) \hookrightarrow (X^{(n)}, X^{(n-1)})$, y las diagonales son sucesiones exactas cortas de pares. El isomorfismo entre homología singular y homología celular está definido de la siguiente manera. Empezando con una clase $x \in H_n(X)$, existe una única preimagen bajo i_* en $H_n(X^{(n+1)})$. Escogemos una preimagen de esa en $H_n(X^{(n)})$ y la llamamos y. Entonces $j_*(y) \in H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ es una cadena celular. Vimos que de hecho $j_*(y)$ es un ciclo celular, así que determina una clase $j_*(y) + \operatorname{Im} d_n$, y esta clase es única a pesar de la libertad que tuvimos al elegir y. El homomorfismo $x \mapsto j_*(y) + \operatorname{Im} d_n$ es el isomorfismo entre homología singular y celular. Denotemos $\Phi(x) = j_*(y) + \operatorname{Im} d_n$.

Ahora como f es celular, se restringe a funciones de pares $f\colon (X^{(n)}, X^{(n-1)}) \to (Y^{(n)}, Y^{(n-1)})$ para todo n, y todas las funciones en el diagrama anterior son naturales con respecto a los mapeos inducidos f_*. En particular, tenemos un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} H_n(X^{(n)}) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X) \arrow[d, "f_*"] \\ H_n(Y^{(n)}) \arrow[r, "i_*"] & H_n(Y) \end{tikzcd}$$

Si $y \in H_n(X^{(n)})$ es una preimagen de $x \in H_n(X)$, entonces $f_*(y) \in H_n(Y^{(n)})$ es una preimagen de $f_*(x) \in H_n(Y)$. Y por la naturalidad de j_*, tenemos que

$$\begin{aligned} f_*^{\mathrm{CW}}\Phi(x) &= f_*^{\mathrm{CW}}(j_*(y) + \operatorname{Im} d_n) \\ &= f_\#^{\mathrm{CW}}(j_*(y)) + \operatorname{Im} d_n \\ &= f_* j_*(y) + \operatorname{Im} d_n \\ &= j_*(f_*(y)) + \operatorname{Im} d_n \\ &= \Phi f_*(x) \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

5. Una función $f\colon S^n \to S^n$ que satisface $f(x) = f(-x)$ para todo x se conoce como una función par. Supongamos $n > 0$. Muestra que el grado de una función par debe ser par, y que debe ser cero si n es par.

Solución:

Como $f(x) = f(-x)$, la función f factoriza a través de $\mathbb{R}P^n$.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}P^n \arrow[d, "g"] \\ & S^n \end{tikzcd}$$

Y entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H_n(S^n) \arrow[r, "p_*"] \arrow[dr, "f_*"'] & H_n(\mathbb{R}P^n) \arrow[d, "g_*"] \\ & H_n(S^n) \end{tikzcd}$$

Si n es par, entonces $H_n(\mathbb{R}P^n) = 0$ y esto muestra que el grado de f es cero.

Supongamos ahora que n es impar y consideremos el siguiente trozo de la sucesión exacta larga asociada a la función p, o equivalentemente la sucesión de pegado de la celda de dimensión $n+1$ de $\mathbb{R}P^{n+1}$ desde $\mathbb{R}P^n$.

$$H_{n+1}(\mathbb{R}P^{n+1}) \to H_n(S^n) \xrightarrow{p_*} H_n(\mathbb{R}P^n) \to H_n(\mathbb{R}P^{n+1}) \to H_{n-1}(S^n) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(\mathbb{R}P^n).$$

Si $n > 1$, esta sucesión tiene la forma

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0,$$

y vemos que $p_*(1) = \pm 2$. Cuando $n = 1$, tiene la forma

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z},$$

y también podemos concluir $p_*(1) = \pm 2$. En cualquier caso, tenemos

$$f_*(1) = g_* p_*(1) = g_*(\pm 2) = \pm 2 g_*(1),$$

y por lo tanto el grado de f es par. □

6. Sea $f\colon S^n \to S^n$ una función de grado cero. Demuestra que existen puntos $x, y \in S^n$ con $f(x) = x$ y $f(y) = -y$. Usa esto para mostrar que si F es un campo vectorial continuo definido sobre D^n en $\mathbb{R}^n$ tal que $F(x) \neq 0$ para todo x, entonces existe un punto en D^n donde F apunta radialmente hacia fuera y otro punto en D^n donde F apunta radialmente hacia dentro.

Solución:

Si $f(x) \neq x$ para todo $x \in S^n$, entonces tendríamos $\deg(f) = (-1)^{n+1}$ por una propiedad que vimos en clase, pero $(-1)^{n+1} \neq 0$, así que f debe tener un punto fijo.

Si $f(x) \neq -x$ para todo $x \in S^n$, entonces la línea de $f(x)$ a x no pasaría por el origen y podemos considerar la homotopía

$$H\colon S^n \times I \to S^n,$$
$$(x,t) \mapsto \frac{(1-t)f(x) + tx}{\|(1-t)f(x) + tx\|},$$

que cumple $H_0 = f$ y $H_1 = 1_{S^n}$, de donde $\deg(f) = \deg(1_{S^n}) = 1 \neq 0$. Por lo tanto, debe existir un x tal que $f(x) = -x$.

Sea $F\colon D^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $F(x) \neq 0$ para todo $x \in D^n$. Entonces consideremos la función

$$\begin{aligned} a\colon D^n &\to S^{n-1}, \\ x &\mapsto \frac{F(x)}{\|F(x)\|}, \end{aligned}$$

y sea $b\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ la restricción a la frontera de D^n. La función b factoriza a través de D^n que es contráctil, así que es nulhomótopa. En particular, tiene grado 0. Por la parte (a), existen $x, y \in S^{n-1}$ tales que $b(x) = x$ y $b(y) = -y$, es decir,

$$F(x) = \|F(x)\|x,$$

con lo que F apunta hacia afuera en x, al ser $\|F(x)\|$ positivo, y

$$F(y) = -\|F(y)\|y,$$

con lo que F apunta hacia dentro en y, al ser $-\|F(y)\|$ negativo. $\square$