

## SOLUCIONES A LA TAREA 5

1. Sea  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  una sucesión exacta corta de grupos abelianos y  $X$  un espacio topológico. Muestra que esta sucesión induce una sucesión exacta larga de grupos de homología

$$\cdots \rightarrow H_n(X; A) \rightarrow H_n(X; B) \rightarrow H_n(X; C) \rightarrow H_{n-1}(X; A) \rightarrow \cdots$$

y que esta sucesión es natural con respecto a funciones  $X \rightarrow Y$  y con respecto a morfismos entre sucesiones exactas cortas de grupos abelianos.

### Solución:

Sea  $z: M \rightarrow N$  un homomorfismo de grupos abelianos. Esto nos define un homomorfismo de grupos abelianos

$$z_{\#}: C_n(X; M) \rightarrow C_n(X; N),$$

$$\sum m_i \sigma_i \mapsto \sum z(m_i) \sigma_i,$$

para cada  $n \geq 0$ . Además notemos que si  $f: X \rightarrow Y$  se tiene

$$f_{\#} z_{\#} \left( \sum m_i \sigma_i \right) = f_{\#} \left( \sum z(m_i) \sigma_i \right) = \sum z(m_i) (f \circ \sigma_i),$$

$$z_{\#} f_{\#} \left( \sum m_i \sigma_i \right) = z_{\#} \left( \sum m_i (f \circ \sigma_i) \right) = \sum z(m_i) (f \circ \sigma_i).$$

Es decir,  $f_{\#} z_{\#} = z_{\#} f_{\#}$ .

Dada la sucesión exacta larga de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0,$$

probaremos que

$$0 \longrightarrow C_n(X; A) \xrightarrow{f_{\#}} C_n(X; B) \xrightarrow{g_{\#}} C_n(X; C) \longrightarrow 0$$

es exacta para cada  $n \geq 0$ . Y por la igualdad que probamos en el párrafo anterior, es natural con respecto a funciones  $X \rightarrow Y$ . Una vez que probemos que es exacta, inducirá una sucesión exacta larga en homología que tiene precisamente la forma requerida, y que

es natural con respecto a funciones  $X \rightarrow Y$  por la naturalidad de la sucesión exacta larga asociada a una sucesión exacta corta de complejos.

Veamos que  $f_{\#}$  es inyectiva. Sea  $\sum a_i \sigma_i$  un elemento del núcleo de  $f_{\#}$  donde todos los  $\sigma_i$  son diferentes. Entonces

$$0 = f_{\#} \left( \sum a_i \sigma_i \right) = \sum f(a_i) \sigma_i,$$

y por lo tanto  $f(a_i) = 0$  para todo  $i$ . Como  $f$  es inyectiva,  $a_i = 0$  para todo  $i$  y por lo tanto  $\sum a_i \sigma_i = 0$ .

Puesto que  $gf = 0$ , se tiene  $g_{\#}f_{\#} = 0$  y por lo tanto la imagen de  $f_{\#}$  está contenida en el núcleo de  $g_{\#}$ .

Sea  $\sum b_i \sigma_i$  un elemento del núcleo de  $g_{\#}$  donde todos los  $\sigma_i$  son diferentes. Entonces

$$0 = g_{\#} \left( \sum b_i \sigma_i \right) = \sum g(b_i) \sigma_i.$$

Por lo tanto,  $g(b_i) = 0$  para todo  $i$  y como el núcleo de  $g$  es la imagen de  $f$  se tiene  $b_i = f(a_i)$  para ciertos  $a_i \in A$ . Entonces

$$\sum b_i \sigma_i = \sum f(a_i) \sigma_i = f_{\#} \left( \sum a_i \sigma_i \right).$$

Por último, sea  $\sum c_i \sigma_i \in C_n(X; C)$ . Como  $g$  es sobreyectiva,  $c_i = g(b_i)$  para ciertos  $b_i \in B$ , luego

$$\sum c_i \sigma_i = \sum g(b_i) \sigma_i = g_{\#} \left( \sum b_i \sigma_i \right).$$

Es decir,  $g_{\#}$  es sobreyectiva.

Finalmente, si tenemos un morfismo de sucesiones exactas cortas de grupos abelianos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

los morfismos inducidos forman un morfismo de sucesiones exactas cortas de complejos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_n(X; A) & \xrightarrow{f_\#} & C_n(X; B) & \xrightarrow{g_\#} & C_n(X; C) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_\# & & \downarrow \beta_\# & & \downarrow \gamma_\# & & \\ 0 & \longrightarrow & C_n(X; A') & \xrightarrow{f'_\#} & C_n(X; B') & \xrightarrow{g'_\#} & C_n(X; C') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y de nuevo los morfismos verticales nos inducen un morfismo entre las dos sucesiones exactas largas por la naturalidad de la sucesión exacta larga asociada a una sucesión exacta corta de complejos.  $\square$

2. Consideremos la estructura celular de  $N_g$  dada por su presentación poligonal estándar. Muestra que el cociente  $N_g \rightarrow S^2$  que colapsa el 1-esqueleto de  $N_g$  a un punto no es nulhomótopa.

**Solución:**

Calculemos primero la homología de  $N_g$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}/2$ . La presentación poligonal estándar de  $N_g$  le da una estructura de CW-complejo con una 0-celda,  $g$  1-celdas que llamábamos  $a_1, \dots, a_g$  y una 2-celda  $U$  que se pegaba a través del lazo  $a_1^2 a_2^2 \dots a_g^2$ . El complejo celular con coeficientes en  $\mathbb{Z}/2$  es

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \cdot U \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{i=1}^g \mathbb{Z}/2 \cdot a_i \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0,$$

donde  $\partial_2[m]U = 2[m]a_1 + \dots + 2[m]a_g = 0$  y  $\partial_1 = 0$  pues los  $a_i$  son lazos basados en la 0-celda. Como todas las funciones bordes son cero, la homología coincide con el complejo, es decir

$$H_i(N_g; \mathbb{Z}/2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2, & \text{si } i = 0, 2, \\ (\mathbb{Z}/2)^g, & \text{si } i = 1, \\ 0, & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

Sea  $A$  el 1-esqueleto de  $N_g$ . Está dado por adjuntar  $g$  1-celdas a un punto, así que  $A \cong \bigvee_{i=1}^g S^1$ .

Sea  $q: N_g \rightarrow N_g/A$  el cociente. Veremos que  $q_* \neq 0$  en homología con coeficientes en  $\mathbb{Z}/2$ . Consideremos el siguiente trozo de la sucesión exacta larga del par  $(N_g, A)$

$$H_2(A; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{i_*} H_2(N_g; \mathbb{Z}/2) \xrightarrow{q_*} H_2(N_g, A; \mathbb{Z}/2).$$

Ahora  $(N_g, A)$  es un CW-par, así que satisface la propiedad de extensión de homotopías, luego

$$H_2(N_g, A; \mathbb{Z}/2) \cong H_2(N_g/A; \mathbb{Z}/2) \cong H_2(S^2; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2.$$

Por otra parte,

$$H_2(A; \mathbb{Z}/2) \cong H_2(\bigvee_{i=1}^g S^1; \mathbb{Z}/2) = 0.$$

pues es un CW-complejo de dimensión 1. Y  $H_2(N_g; \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$  como vimos en la parte anterior. Entonces la sucesión queda

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{q_*} \mathbb{Z}/2.$$

Luego  $q_*$  es inyectiva, en particular  $q_* \neq 0$  y por lo tanto,  $q$  no es nulhomótopa.  $\square$

3. Muestra que la escisión en el teorema de coeficientes universales no es natural.

### Solución:

Sea  $f: S^2 \rightarrow S^2$  una función de grado 3 y  $X = S^2 \cup_f D^3$ . Consideremos el cociente  $g: X \rightarrow X/S^2 \cong S^3$ . Si el morfismo de escisión en el teorema de coeficientes universales fuese natural, entonces también lo sería la descomposición

$$H_k(X; M) \cong H_k(X) \otimes M \oplus \text{Tor}(H_{k-1}(X), M).$$

Vamos a considerar  $M = \mathbb{Z}/3$ . Recordemos que la homología de  $X$  estaba dada por

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{Z}/3, & \text{si } k = 2, \\ 0, & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

$$H_k(X; \mathbb{Z}/3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/3, & \text{si } k = 0, 2, 3, \\ 0, & \text{en el resto de los casos.} \end{cases}$$

Y también vimos en clase que  $g_* = 0$  en  $H_k$  para  $k > 0$ , pero  $g_*$  era un isomorfismo en  $H_3(\ ; \mathbb{Z}/3)$ . Por lo tanto, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_3(X; \mathbb{Z}/3) & \xrightarrow{\cong} & H_3(X) \otimes \mathbb{Z}/3 \oplus \text{Tor}(H_2(X), \mathbb{Z}/3) \\ \cong \downarrow g_* & & \downarrow g_* \otimes 1_{\mathbb{Z}/3} \oplus \text{Tor}(g_*, 1_{\mathbb{Z}/3}) \\ H_3(S^3; \mathbb{Z}/3) & \xrightarrow{\cong} & H_3(S^3) \otimes \mathbb{Z}/3 \oplus \text{Tor}(H_2(X), \mathbb{Z}/3) \end{array}$$

en el que los isomorfismos son los dados por la descomposición de antes se convierte en

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/3 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/3 \\ \cong \downarrow g_* & & \downarrow 0 \\ \mathbb{Z}/3 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}/3 \end{array}$$

que claramente no es conmutativo. Por lo tanto, esa descomposición no es natural.  $\square$

4. Construye un espacio  $\mathbb{Q}$ -acíclico que no es  $\mathbb{Z}/p$ -acíclico para ningún primo  $p$ .

**Solución:**

Fijemos primero un primo  $p$  y construyamos un CW-complejo  $X_p$  como sigue. Tomamos una 0-celda  $v$ , le adjuntamos una 1-celda  $a$  mediante la función constante, con lo cual nos queda  $S^1$  y después le adjuntamos una 2-celda  $U$  mediante una función  $S^1 \rightarrow S^1$  de grado  $p$ . Su complejo celular con coeficientes en  $R$  sería entonces

$$\dots 0 \rightarrow R \cdot U \xrightarrow{p} R \cdot a \xrightarrow{0} R \cdot v \rightarrow 0,$$

con lo cual obtenemos que  $X_p$  es  $\mathbb{Q}$ -acíclico y  $\mathbb{Z}/q$ -acíclico si  $q$  es un primo diferente de  $p$ . Y con coeficientes en  $\mathbb{Z}/p$  obtenemos

$$H_k(X_p; \mathbb{Z}/p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p, & \text{si } 0 \leq k \leq 2, \\ 0, & \text{si } k > 2. \end{cases}$$

Sea  $\mathbb{P}$  el conjunto de primos y consideremos el espacio

$$X = \bigvee_{p \in \mathbb{P}} X_p,$$

donde todos los  $X_p$  se pegan por su única 0-celda. Entonces

$$\tilde{H}_k(X; R) = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \tilde{H}_k(X_p; R).$$

Como todos los  $X_p$  son  $\mathbb{Q}$ -acíclicos,  $X$  también es  $\mathbb{Q}$ -acíclico. Sin embargo, si  $q$  es cualquier primo

$$\tilde{H}_1(X; \mathbb{Z}/q) \cong \bigoplus_{p \in \mathbb{P}} \tilde{H}_1(X_p; \mathbb{Z}/q) \cong H_1(X_q; \mathbb{Z}/q) \cong \mathbb{Z}/q,$$

así que  $X$  no es  $\mathbb{Z}/q$ -acíclico para ningún primo  $q$ .  $\square$

5. Construye una función  $f: M_g \times S^1 \rightarrow S^3$  tal que  $f_*: H_3(M_g \times S^1) \rightarrow H_3(S^3)$  es un isomorfismo.

**Solución:**

Consideremos la presentación poligonal estándar para  $M_g$  y la estructura de CW-complejo correspondiente. Sea  $Z$  su 1-esqueleto y notemos que  $M_g/Z$  es un CW-complejo con una 0-celda y una 2-celda, luego  $M_g/Z \cong S^2$ .

El cociente  $q: M_g \rightarrow M_g/Z$  es una función celular, así que por un ejercicio de la tarea anterior, el morfismo inducido en homología coincide con el inducido en homología celular. Primero determinamos el morfismo  $q_{\#}: C_2^{\text{CW}}(M_g) \rightarrow C_2^{\text{CW}}(M_g/Z)$ , que es un homomorfismo  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Fijemos un generador  $1 \in H_2(D^2, S^1)$ . Entonces los generadores de estos grupos están dados por sus imágenes bajo las funciones características. Pero si  $\Phi: (D^2, S^1) \rightarrow (M_g, Z)$  es la función característica de la 2-celda para  $M_g$ , la función característica de la 2-celda para  $M_g/Z$  es  $q\Phi$ . Por lo tanto

$$q_{\#}(\Phi_*(1)) = q_*\Phi_*(1)$$

envía un generador a un generador. Como  $d: C_2^{\text{CW}}(M_g) \rightarrow C_1^{\text{CW}}(M_g)$  y  $d: C_2^{\text{CW}}(M_g/Z) \rightarrow C_1^{\text{CW}}(M_g/Z)$  son ambos triviales, el morfismo  $q_*: H_2^{\text{CW}}(M_g) \rightarrow H_2^{\text{CW}}(M_g/Z)$  es un isomorfismo. Componiendo con el homeomorfismo  $M_g/Z \cong S^2$ , obtenemos una función  $h: M_g \rightarrow S^2$  que induce un isomorfismo en  $H_2$ .

Consideremos ahora la función

$$k = h \times 1: M_g \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1,$$

$$(x, y) \mapsto (h(x), y).$$

Mostraremos que induce un isomorfismo en  $H_3$ . Esto sería fácil usando la naturalidad del teorema aditivo de Künneth, pero daremos un argumento alternativo.

Descomponemos  $S^1 = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son los subespacios abiertos dados por números complejos unitarios con parte imaginaria estrictamente menor que  $1/2$  y estrictamente mayor que  $-1/2$ , respectivamente. Esto nos da descomposiciones  $M_g \times S^1 = (M_g \times U) \cup (M_g \times V)$  y  $S^2 \times S^1 = (S^2 \times U) \cup (S^2 \times V)$  y  $k$  respeta estas descomposiciones, así que induce un morfismo entre las sucesiones exactas de Mayer-Vietoris asociadas.

$$\begin{array}{ccccccc}
H_3(M_g \times U) \oplus H_3(M_g \times V) & \longrightarrow & H_3(M_g \times S^1) & \longrightarrow & H_2(M_g \times (U \cap V)) & \longrightarrow & H_2(M_g \times U) \oplus H_2(M_g \times V) \\
\downarrow & & \downarrow k_* & & \downarrow k_* & & \downarrow (k_*, k_*) \\
H_3(S^2 \times U) \oplus H_3(S^2 \times V) & \longrightarrow & H_3(S^2 \times S^1) & \longrightarrow & H_2(S^2 \times (U \cap V)) & \longrightarrow & H_2(S^2 \times U) \oplus H_2(S^2 \times V)
\end{array}$$

Recordemos que  $U$  y  $V$  son contráctiles y  $U \cap V \simeq S^0$ . El diagrama

$$\begin{array}{ccc}
U \cap V & \longrightarrow & U \\
\downarrow & & \downarrow \\
S^0 & \longrightarrow & *
\end{array}$$

es conmutativo (y el análogo con  $V$ ). La sucesión se simplifica a

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_3(M_g \times S^1) & \longrightarrow & H_2(M_g \times S^0) & \longrightarrow & H_2(M_g) \oplus H_2(M_g) \\
& & \downarrow k_* & & \downarrow (h \times 1)_* & & \downarrow (h_*, h_*) \\
0 & \longrightarrow & H_3(S^2 \times S^1) & \longrightarrow & H_2(S^2 \times S^0) & \longrightarrow & H_2(S^2) \oplus H_2(S^2)
\end{array}$$

y  $H_2(M_g \times S^0) \cong H_2(M_g) \oplus H_2(M_g)$ . La función  $M_g \times S^0 \rightarrow S^2 \rightarrow S^0$  es  $h$  en cada componente.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_3(M_g \times S^1) & \longrightarrow & H_2(M_g) \oplus H_2(M_g) & \longrightarrow & H_2(M_g) \oplus H_2(M_g) \\
& & \downarrow k_* & & \downarrow (h_*, h_*) & & \downarrow (h_*, h_*) \\
0 & \longrightarrow & H_3(S^2 \times S^1) & \longrightarrow & H_2(S^2) \oplus H_2(S^2) & \longrightarrow & H_2(S^2) \oplus H_2(S^2)
\end{array}$$

Como los dos morfismos llamados  $(h_*, h_*)$  son isomorfismos, también lo es  $k_*$ .

Finalmente, consideremos el cociente  $S^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \wedge S^1$  y recordemos que  $S^2 \wedge S^1 \cong S^3$ . Usamos la sucesión exacta larga del par  $(S^2 \times S^1, S^2 \vee S^1)$ , que ya vimos que es un CW-par

$$H_3(S^2 \vee S^1) \rightarrow H_3(S^2 \times S^1) \rightarrow H_3(S^2 \wedge S^1) \rightarrow H_2(S^2 \vee S^1) \rightarrow H_2(S^2 \times S^1) \rightarrow H_2(S^2 \wedge S^1).$$

Notamos que  $H_2(S^2 \vee S^1) \cong H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$  y ya calculamos en otra tarea que  $H_2(S^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ . Como  $S^2 \wedge S^1 \cong S^3$ , tenemos  $H_2(S^2 \wedge S^1) = 0$  y entonces el morfismo  $H_2(S^2 \vee S^1) \rightarrow H_2(S^2 \times S^1)$  es sobreyectivo. Como es un homomorfismo  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , debe ser un isomorfismo. Puesto que  $H_3(S^2 \vee S^1) = 0$ , el morfismo  $H_3(S^2 \times S^1) \rightarrow H_3(S^2 \wedge S^1)$  es un isomorfismo.

Para concluir, la composición

$$M_g \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1 \rightarrow S^2 \wedge S^1 \cong S^3$$

induce un isomorfismo en  $H_3$ . □

Merece la pena mencionar que hay una manera más fácil de construir una función de grado 1. Simplemente tomamos un subespacio  $R$  de  $M_g \times S^1$  que sea homeomorfo a  $D^3$ , el cual podemos encontrar porque es una variedad y consideramos la composición

$$M_g \times S^1 \rightarrow \frac{M_g \times S^1}{M_g \times S^1 - R^\circ} \cong R/\partial R \cong D^3/\partial D^3 \cong S^3$$

Esto siempre se puede hacer para variedades compactas, conexas y orientables.

2. Calcula los grupos de homología de  $S^n - X$ , donde  $X$  es un subespacio de  $S^n$  homeomorfo a  $S^k \vee S^l$ .

### Solución:

Sea  $h: S^k \vee S^l \rightarrow S^n$  un encaje con imagen  $X$ . Notemos que  $k$  y  $l$  deben ser estrictamente menores que  $n$ . Pues si  $k \geq n$ , tendríamos un encaje de  $S^k$  en  $S^n$  no sobreyectivo y en particular un encaje de  $S^n$  en  $S^n$  no sobreyectivo. Pero  $S^n$  es compacta y  $S^n$  es conexas, así que esto no es posible. Y lo mismo aplica para  $l$ .

Sea  $A = S^n - h(S^k)$  y  $B = S^n - h(S^l)$ . Entonces  $A \cap B = S^n - h(S^k \vee S^l) = S^n - X$  y  $A \cup B = S^n - h(*) = S^n - \{s_0\}$ , que es contráctil. Como  $S^k$  y  $S^l$  son compactos,  $A$  y  $B$  son abiertos en  $S^n$  y podemos usar Mayer-Vietoris.

$$\cdots \rightarrow H_{m+1}(A \cup B) \rightarrow H_m(S^n - X) \rightarrow H_m(S^n - h(S^k)) \oplus H_m(S^n - h(S^l)) \rightarrow H_m(A \cup B) \rightarrow \cdots$$

Por lo tanto, si  $m \geq 1$ , se tiene  $H_m(S^n - X) \cong H_m(S^n - h(S^k)) \oplus H_m(S^n - h(S^l))$ . Por el teorema de la curva de Jordan generalizado, sabemos la homología del lado derecho. Hay varios casos para  $m \geq 1$

Caso 1:  $k = l$  y  $n \neq k + 1$ .

$$H_m(S^n - X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & \text{si } m = n - k - 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Caso 2:  $k = l$  y  $n = k + 1$ .

$$H_m(S^n - X) = 0.$$

Caso 3:  $k \neq l$  y  $n \neq k + 1, l + 1$ .

$$H_m(S^n - X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } m = n - k - 1, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } m = n - l - 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Caso 4:  $k \neq l$  y  $n = k + 1$ .

$$H_m(S^n - X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } m = n - l - 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Caso 5:  $k \neq l$  y  $n = l + 1$ .

$$H_m(S^n - X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } m = n - k - 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sólo nos falta calcular el grupo de homología en dimensión cero. Miramos el siguiente trozo de la sucesión de Mayer-Vietoris

$$0 \rightarrow H_0(S^n - X) \rightarrow H_0(S^n - h(S^k)) \oplus H_0(S^n - h(S^l)) \rightarrow H_0(A \cup B) \cong \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Luego  $H_0(S^n - X)$  es un grupo abeliano cuyo rango es el rango de  $H_0(S^n - h(S^k)) \oplus H_0(S^n - h(S^l))$  menos uno. Recordando que  $H_0(S^n - Y) \cong \mathbb{Z}^2$  si  $Y \cong S^{n-1}$  y es  $\mathbb{Z}$  si  $Y \cong S^j$  para  $j \neq n - 1$ , podemos completar los cinco casos:

Caso 1:  $k = l$  y  $n \neq k + 1$ .

$$H_m(S^n - X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } m = 0, \\ \mathbb{Z}^2, & \text{si } m = n - k - 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Caso 2:  $k = l$  y  $n = k + 1$ .

$$H_m(S^n - X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^3, & \text{si } m = 0, \\ 0, & \text{si } m \neq 0. \end{cases}$$

Caso 3:  $k \neq l$  y  $n \neq k + 1, l + 1$ .

$$H_m(S^n - X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } m = 0, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } m = n - k - 1, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } m = n - l - 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Caso 4:  $k \neq l$  y  $n = k + 1$ .

$$H_m(S^n - X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & \text{si } m = 0, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } m = n - l - 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Caso 5:  $k \neq l$  y  $n = l + 1$ .

$$H_m(S^n - X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2, & \text{si } m = 0, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } m = n - k - 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$