

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE YUCATÁN
FACULTAD DE MATEMÁTICAS



T-DUALIDAD EN K-TEORÍA
EQUIVARIANTE

TESIS

Presenta:

L.M. Gustavo Navarrete Novelo

Para obtener el título de:
Maestro en ciencias matemáticas

Asesor externo:

Dr. José María Cantarero López

Asesor interno:

Dr. José Matías Navarro Soza.

Octubre de 2022

Agradecimientos

Empiezo agradeciendo a mis padres que gracias a su apoyo fue posible obtener este logro en mi vida. Agradezco también a Paola por su ayuda y sugerencias en la escritura de este trabajo.

A mi asesor el Dr. José María Cantarero López cuya experiencia en el área me permitió obtener los conocimientos que hoy poseo. Le agradezco mucho su paciencia, su apoyo y los consejos que me brindó. El desarrollo y resultados de este trabajo fueron posibles gracias a él.

A mi asesor interno el Dr. José Matías Navarro Soza quien me apoyó y estuvo pendiente de la realización de este trabajo.

Al Dr. Noé Barcenas Torres por tomarse la molestia de revisar este trabajo y ser parte del sínodo de manera presencial.

Al CONACYT por la beca que me otorgó y con la que pude llevar a cabo mis estudios de maestría.

Resumen

La T-dualidad tiene sus orígenes en la física teórica, específicamente en la teoría de cuerdas. Nos dice que es posible tener una relación entre las teorías de tipo IIA y la de tipo IIB.

Una manera de modelar matemáticamente una parte de la T-dualidad es por medio de lo que se conoce como T-dualidad topológica. Esta consiste de cierta relación entre pares (E, h) y (\hat{E}, \hat{h}) en donde E, \hat{E} son haces S^1 -principales sobre un mismo espacio topológico y h, \hat{h} elementos del tercer grupo de cohomología de los espacios E, \hat{E} respectivamente. Para estos pares la T-dualidad también nos da un isomorfismo entre los grupos de K-teoría torcida $K^0(E, h) \cong K^1(\hat{E}, \hat{h})$ y $K^1(E, h) \cong K^0(\hat{E}, \hat{h})$.

En este trabajo analizamos este isomorfismo en el caso equivariante, es decir, nos preguntamos si la transformación de T-dualidad nos sigue dando un isomorfismo entre los grupos de K-teoría G -equivariante torcida $K_G^0(E, h) \cong K_G^1(\hat{E}, \hat{h})$ y $K_G^1(E, h) \cong K_G^0(\hat{E}, \hat{h})$. Respondemos la pregunta negativamente cuando $G = \mathbb{Z}/p$ con p primo y analizamos unos ejemplos cuando $G = \mathbb{Z}/4$ y $G = S^1$.

Índice general

1. Introducción	5
2. Preliminares	11
2.1. Hazes principales	11
2.1.1. El haz asociado	16
2.1.2. El haz esférico inducido por un haz vectorial	18
2.1.3. El haz proyectivo inducido por un haz vectorial	22
2.2. El pushforward en cohomología	25
2.3. La sucesión de Gysin	30
2.4. Cohomología equivariante	33
2.4.1. Isomorfismo de Thom equivariante	42
2.5. K-teoría torcida	44
2.5.1. El caso equivariante	47
2.5.2. Isomorfismo de Thom	49
2.5.3. La sucesión de Gysin y los mapeos push-forward	50
3. T-dualidad	55
3.1. Pares T-duales	55
3.2. La transformación de T-dualidad	70
3.3. T-admisibilidad	72
4. T-dualidad equivariante	86
4.1. El caso del grupo cíclico de orden primo	86
4.1.1. Existencia de una clase de Thom equivariante	100
4.2. El caso del grupo cíclico de orden 4	102
4.3. El caso del círculo	107
4.4. Una posible T-dualidad equivariante	114
4.5. La cohomología y K-teoría R	115
4.5.1. La cohomología R	116
4.5.2. La K-teoría R	119

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis se estudiará la T–dualidad en K–teoría desde un enfoque topológico, específicamente seguiremos el enfoque de Bunke y Schick [16], a diferencia del trabajo desarrollado por Bouwknegt, Evslin y Mathai [14] en donde se define T–dualidad con un enfoque más geométrico. Los objetos a estudiar son pares (E, h) en donde $\pi: E \rightarrow B$ es un haz S^1 –principal sobre un espacio B lo suficientemente bueno y $h \in H^3(E; \mathbb{Z})$. La T–dualidad nos dice que para cada par (E, h) sobre B existe otro par (\hat{E}, \hat{h}) sobre el mismo espacio B tal que se tiene un diagrama conmutativo conocido como *diagrama de T–dualidad*:

$$\begin{array}{ccc} & E \times_B \hat{E} & \\ p \swarrow & & \searrow \hat{p} \\ E & & \hat{E} \\ \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\ & B & \end{array}$$

en donde se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\pi_! h = c_1(\hat{E}), \quad \hat{\pi}_! \hat{h} = c_1(E), \quad c_1(E) \cup c_1(\hat{E}) = 0 \quad \text{y} \quad p^*(h) = \hat{p}^*(\hat{h}).$$

Aquí $c_1(-)$ es la primera clase de Chern de la cual mencionamos sus propiedades importantes en el apéndice del trabajo. Los morfismos $\pi_!, \hat{\pi}_!$ son los pushforwards en cohomología, también conocidos como la integración sobre la fibra de los haces, para estos objetos les dedicamos una sección completa en el Capítulo 1. La propiedad más importante que cumplen estos pares es que estos se identifican en la K–teoría torcida por medio de la transformación de T–dualidad

$$T = \hat{p}_! \circ u(h)^* \circ p^*: K^*(E, h) \rightarrow K^{*-1}(\hat{E}, \hat{h}), \quad \forall * = 0, 1.$$

Aquí $u^*(h)$ es un mapeo inducido por una homotopía y que hace un cambio de torcimientos $p^*(h) = \hat{p}^*(\hat{h})$ (el cual explicaremos con mas detalle en el Capítulo 3) y $\hat{p}_!$ es el pushforward en K-teoría al cual le dedicamos toda una sección en el Capítulo 1.

La idea básica de la teoría de cuerdas es que propone a la cuerda como un modelo para una partícula, a diferencia del modelo clásico del punto como partícula. La teoría de cuerdas está definida en cierto espacio-tiempo E al que llaman “universo” en donde todos los eventos toman lugar. Matemáticamente lo anterior consiste de una variedad diferenciable junto con una métrica Lorentziana. Existen diferentes tipos de teorías de cuerdas y es una de las T-dualidades (la primera que se encontró) la que nos da una relación entre la “tipo IIA” y la tipo “tipo IIB”. Algunos conceptos que aparecen en la teoría de cuerdas tipo IIA son: una 3-forma H con periodos enteros en el espacio-tiempo E , llamado H -flujo; las cuerdas que en estas teorías reciben el nombre de D -branas; otro concepto importante es el campo RR (Ramond-Ramond), que consiste de una forma diferenciable R sobre E de dimensión par. En la teoría tipo IIB aparecen los mismos conceptos pero la diferencia es que el campo R es una forma diferenciable de dimensión impar [26],[40].

Autores como Moore-Witten [40], [39] mencionan que en la teoría tipo IIA, en ausencia de un H -flujo, los campos RR están clasificados por $K^0(E)$ mientras que las D -branas están clasificadas por $K^1(E)$. Por otro lado, en la teoría tipo IIB ocurre exactamente lo contrario, los campos RR están clasificados por $K^1(E)$ y las D -branas por $K^0(E)$. En presencia de un H -flujo no trivial, Bouwknegt, Evslin y Mathai [14] mencionan que la anterior clasificación generaliza a los grupos de K-teoría torcida

$$K^0(E, H) \quad \text{y} \quad K^1(E, H).$$

De esta manera la T-dualidad nos dice como obtener un espacio-tiempo \hat{E} y un H -flujo \hat{H} que se consideran duales, así como también nos relaciona los campos RR y las D -branas de las teorías tipo IIA y IIB. En pocas palabras, la T-dualidad nos permite movernos de la teoría de cuerdas tipo IIA a la teoría tipo IIB y viceversa.

Otro tipo de T-dualidad la podemos encontrar en el trabajo de Doran, Méndez y Rosenberg [20], a diferencia del enfoque de Bunke y Schick en este artículo se trabaja con orientifolios y de esta manera las D -branas están clasificadas por la K-teoría Real en el sentido de Atiyah [4]. Doran Méndez y Rosenberg mencionan que esta KR-teoría parece ser más adecuada ya que es “universal” en el sentido de que las otras K-teorías se pueden construir a partir de la KR .

Este trabajo estudia la T-dualidad de Bunke y Schick desde el punto de vista matemático dejando a un lado la componente física, es decir, únicamente estamos interesados en la existencia de los isomorfismos en la K-teoría torcida.

Trabajos como el de A. Pande [41] estudian T–dualidad sobre espacios base B junto con una acción de S^1 como un modelo para un concepto físico teórico conocido como monopolo de Kaluza–Klein. Lo anterior nos motiva a estudiar espacios B junto con distintas acciones, en particular nos restringimos al estudio de Γ –espacios con $\Gamma = \mathbb{Z}/n, S^1$ y hablaremos sobre la posible T–dualidad en K–teoría equivariante que surge para estos espacios.

La K–teoría equivariante es una teoría de cohomología equivariante generalizada desarrollada principalmente por Segal en [42], posteriormente se desarrolla una generalización torcida junto con Atiyah en [7]. Esta teoría parece ser la más adecuada en el estudio de espacios B equipados con acciones de grupos desde el punto de vista de la T–dualidad. De esta manera uno puede preguntarse si existirá una T–dualidad para este tipo de objetos nuevos, es decir, ahora los objetos serán pares (E, h) con $\pi: E \rightarrow B$ un haz S^1 –principal G –equivariante y $h \in H_G^3(B; \mathbb{Z})$, los mapeos generalizan a mapeos equivariantes y las clases de Chern a clases de Chern equivariantes. Así podríamos preguntarnos si para los pares T–duales “equivariantes” (E, h) y (\hat{E}, \hat{h}) , la respectiva transformación de T–dualidad es un isomorfismo, es decir, por ejemplo si

$$T = \hat{p}_! \circ u(h)^* \circ p^*: K_{\mathbb{Z}/2}^*(E, h) \rightarrow K_{\mathbb{Z}/2}^{*-1}(\hat{E}, \hat{h})$$

es o no es un isomorfismo.

Uno de los resultados más importantes de la tesis es el siguiente teorema

Teorema. *En general la transformación de T–dualidad falla en ser un isomorfismo para $G = \mathbb{Z}/p$ con p primo, con la generalización directa anterior mencionada.*

Para ver esto damos un ejemplo concreto, consideramos el siguiente diagrama de T–dualidad

$$\begin{array}{ccc} & S^1 \times S_l^1 & \\ q \swarrow & & \searrow \hat{q} \\ S^1 & & S_l^1 \\ \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\ & B = \{*\} & \end{array}$$

en donde S^1 tiene acción trivial y S_l^1 (con $0 < l \leq p - 1$ fijo) es el círculo cuya acción de \mathbb{Z}/p está dada por

$$[k] \cdot z = \omega^k z \quad \text{en donde} \quad \omega = e^{2\pi li/p} \text{ y } [k] \in \mathbb{Z}/p.$$

De esta manera $(S^1, l), (S_l^1, 0)$ son pares T–duales “equivariantes” en donde

$$q^*: K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \rightarrow K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1 \times S_l^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

envía el 1 a $(p, 0)$, por lo tanto la transformación

$$T = \hat{q}_! \circ u(h)^* \circ q^* : K_{\mathbb{Z}/p}^*(S^1, 1) \rightarrow K_{\mathbb{Z}/p}^{*-1}(S^1)$$

no es un isomorfismo a pesar de que los grupos sí que son isomorfos.

De igual forma para la T–dualidad $\mathbb{Z}/4$ –equivariante consideramos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} & S_2^1 \times S_2^1 & \\ p \swarrow & & \searrow \hat{p} \\ S_2^1 & & S_2^1 \\ \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\ & B = \{*\} & \end{array}$$

en donde S_2^1 es el círculo cuya acción de $\mathbb{Z}/4$ está dada por

$$[k] \cdot z = (-1)^k z \quad [k] \in \mathbb{Z}/4.$$

A diferencia de la situación anterior la acción que consideramos ya no es libre, por lo tanto, utilizamos la sucesión espectral de Serre para calcular los grupos de cohomología de Borel $\mathbb{Z}/4$ –equivariantes involucrados.

Para S^1 consideramos el ejemplo:

$$\begin{array}{ccc} & S^1 \times \tilde{S}^1 & \\ p \swarrow & & \searrow \hat{p} \\ S^1 & & \tilde{S}^1 \\ \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\ & B = \{*\} & \end{array}$$

en donde \tilde{S}^1 es el círculo cuya acción de S^1 está dada por multiplicación compleja.

Una generalización distinta en el ámbito de acciones de $\mathbb{Z}/2$ se encuentra en [24]. En este artículo Kiyonori Gomi generaliza el isomorfismo de T–dualidad a un caso equivariante, sin embargo a diferencia de nuestro acercamiento, él utiliza haces S^1 –principales Reales en el sentido de Atiyah [4], a diferencia de los haces S^1 –principales $\mathbb{Z}/2$ –equivariantes que nosotros consideramos. Esta principal diferencia le permite encontrar una T–dualidad $\mathbb{Z}/2$ –equivariante de manera exitosa. A pesar de lo anterior, Gomi menciona en la Sección 5.7 de su artículo la siguiente conjetura: “Debe existir una T–dualidad equivariante en donde un haz S^1 –principal equivariante aparece como T–dual de otro haz S^1 –principal equivariante y únicamente está involucrada la cohomología equivariante de Borel” y

menciona que este resultado al menos se debe cumplir para $\mathbb{Z}/2$. Nuestro trabajo muestra que esta conjetura al menos generalizando directamente es falsa para \mathbb{Z}/p con p primo.

Por otro lado en [35] se presenta una versión de T–dualidad S^1 –equivariante, que a diferencia de los trabajos anteriores, se trabaja utilizando la cohomología de De Rham. Este resultado nos dice que para un S^1 –espacio B junto con una clase $h \in H^3(B, \mathbb{Z})$ es posible construir un par T–dual (E, \hat{h}) de manera que si denotamos por

$$B_{S^1} := ES^1 \times_{S^1} B \quad \text{y} \quad E_{S^1} := ES^1 \times_{S^1} E,$$

entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{j_E} & ES^1 \times E & & \\
 \downarrow p & \searrow i & \downarrow \text{Id} \times p & \searrow \hat{p} & \\
 B & \xrightarrow{j_B} & ES^1 \times B & & E_{S^1} \\
 \downarrow & \searrow \hat{\pi} & \downarrow \text{Id} & \searrow \pi & \downarrow \hat{\pi} \\
 B_{S^1} & \xrightarrow{\text{Id}} & B_{S^1} & &
 \end{array}$$

en donde se satisfacen las siguientes propiedades:

$$\pi_1(h) = c_1(E_{S^1}) = c_1^{S^1}(E), \quad \hat{\pi}_1(\hat{h}) = e_{S^1} \quad \text{y} \quad p^*(h) = i^*(\hat{h})$$

y además existe un isomorfismo de T–dualidad entre la cohomología torcida y la cohomología S^1 –equivariante torcida

$$H^*(B, h) \cong H_{S^1}^{*-1}(E, \hat{h}).$$

También se menciona que es posible dar un isomorfismo de T–dualidad para la K–teoría torcida y la K–teoría torcida equivariante de Borel utilizando el teorema de completación de Atiyah–Segal.

Otros trabajos relacionados con T–dualidad son las siguientes tesis [18] y [33] las cuales recomendamos leer.

Finalmente para concluir con el capítulo introductorio mencionamos la manera en que está estructurada esta tesis.

- El Capítulo 2 es un capítulo de definiciones y resultados importantes necesarios para entender la T–dualidad y el isomorfismo en K–teoría torcida. Empezamos dando las definiciones y resultados importantes sobre haces fibrados, haces G –principales y haces vectoriales G –equivariantes, de igual forma hablamos sobre la sucesión de Gysin en una de las secciones. Presentamos una introducción a las teorías de cohomología no equivariantes y

equivariantes en las que estaremos trabajando así como sus versiones torcidas. Finalmente dedicamos toda una sección para hablar sobre los mapeos push-forward en cohomología y en K-teoría. En el apéndice enunciamos teoremas y propiedades importantes sobre las clases de Chern.

- En el Capítulo 3 se presenta todo lo relacionado a la T-dualidad no equivariante. Definimos la noción de pares T-duales, definimos la transformación de T-dualidad y posteriormente analizamos el isomorfismo en T-dualidad en la K-teoría torcida no equivariante. En este capítulo nos basamos fuertemente en los artículos [14], [16] y [24] de donde tomamos las ideas y propiedades que demostramos con más detalle.
- En el Capítulo 4 analizamos la posible T-dualidad G -equivariante, específicamente para $G = \mathbb{Z}/p$ con p primo, $\mathbb{Z}/4$ y S^1 . Posteriormente motivados de las ideas de Kiyonori Gomi [24] definimos la cohomología y K-teoría R como teorías de cohomología generalizadas S^1 -equivariantes.

Capítulo 2

Preliminares

El contenido de este capítulo se incluye para que la tesis sea autocontenida y proviene de las referencias: [28], [32], [25] y [37] para la sección de haces principales y haces vectoriales, [13] y [29] para la sección del pushforward en cohomología y la sucesión de Gysin, [45] y [15] para la sección de cohomología equivariante, [31] para los haces principales equivariantes, [7], [23] y [27] para la K-teoría, la K-teoría torcida y el isomorfismo de Thom.

2.1. Haces principales

Dado que los haces G -principales son un caso particular de haces fibrados, empezaremos la sección definiendo un haz fibrado para espacios arcoconexos.

Definición 2.1.1. Un haz fibrado consiste de un mapeo sobreyectivo entre espacios topológicos $p: E \rightarrow B$ tal que es localmente trivial, es decir, para cada $x \in B$ existe una vecindad U_x para la cual existe un homeomorfismo Φ que completa el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_x) & \xrightarrow[\cong]{\Phi} & U_x \times F \\ & \searrow p & \swarrow pr_1 \\ & & U_x \end{array}$$

A F se le conoce como la fibra del haz fibrado, E el espacio total y B la base. Al mapeo Φ se le conoce como una trivialización local y usualmente nos referimos a (U_x, Φ) como una carta en donde el haz trivializa.

Sea $p: E \rightarrow B$ un haz fibrado con fibra F y sea $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ un atlas en donde el haz trivializa de manera que las trivializaciones están dadas como

$$\Phi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times F.$$

Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces podemos restringir

$$\Phi_\alpha, \Phi_\beta: p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F,$$

y si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $z \in F$, por el diagrama conmutativo anterior tenemos que

$$(\text{pr}_1 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(x, z) = (p \circ \Phi_\beta^{-1})(x, z) = \text{pr}_1(x, z) = x$$

por lo tanto

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(x, z) = (x, \sigma(x, z))$$

con $\sigma: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \rightarrow F$. Ahora bien, notemos que para $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ fijo tenemos una función $g_{\alpha\beta}(x): F \rightarrow F$ dada por

$$g_{\alpha\beta}(x)(z) := \sigma(x, z).$$

Notemos que $g_{\alpha\beta}(x)$ es un homeomorfismo ya que es igual a la composición de los siguientes homeomorfismos

$$g_{\alpha\beta}(x) = \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} \circ \iota_x$$

en donde $\iota_x: F \rightarrow \{x\} \times F$ es el homeomorfismo dado por

$$\iota_x(z) = (x, z).$$

Además la inversa está dada por

$$g_{\alpha\beta}(x)^{-1} = \iota_x^{-1} \circ \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} \circ \text{pr}_2^{-1} = \text{pr}_2 \circ \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} \circ \iota_x = g_{\beta\alpha}(x).$$

Decimos que las funciones $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Homeo}(F)$ son las **funciones de transición** asociadas al atlas $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$. Con esto podemos comprobar que las funciones de transición satisfacen las condiciones de **cociclo**:

1. $g_{\alpha\alpha}(x) = 1_F \quad \forall x \in U_\alpha$, porque

$$g_{\alpha\alpha}(x) = \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha^{-1} \circ \iota_x = 1_F$$

2. $g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \circ g_{\beta\gamma}(x) \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, ya que

$$\begin{aligned} g_{\alpha\gamma}(x) &= \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\gamma^{-1} \circ \iota_x \\ &= (\text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} \circ \iota_x) \circ (\text{pr}_2 \circ \Phi_\beta \circ \Phi_\gamma^{-1} \circ \iota_x) \\ &= g_{\alpha\beta}(x) \circ g_{\beta\gamma}(x). \end{aligned}$$

Aquellos haces en donde la fibra F está equipada con más estructura y las trivializaciones locales preservan esas estructuras, reciben el nombre de **haces estructurados**, un caso particular y de gran importancia para este trabajo de tesis son los haces G -**principales**. Otro ejemplo más conocido serían los **haces vectoriales**. Los haces vectoriales son bien conocidos en el área de geometría diferencial, quizá el ejemplo más representativo de un haz vectorial es el haz tangente de una variedad diferenciable.

Los haces vectoriales son haces estructurados en donde la fibra en cada punto tiene estructura de espacio vectorial de dimensión finita y las trivializaciones locales restringidas a cada fibra son isomorfismos lineales. Como sabemos que cada espacio vectorial de dimensión finita es isomorfo a K^n ($K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C}) entonces podemos suponer que las fibras del haz vectorial son de la forma K^n , de esta manera las funciones de transición tendrán imagen en $GL(n, K)$. Si la fibra del haz vectorial es un espacio vectorial complejo entonces decimos que el haz vectorial es un **haz vectorial complejo**, de igual forma llamamos **haz vectorial real** a un haz vectorial cuya fibra es un espacio vectorial real. Cuando hablamos del rango de un haz vectorial nos referimos a la dimensión como espacio vectorial de la fibra del haz.

Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial real o complejo. Una de las características importantes de los haces vectoriales es que siempre podemos hablar de la sección cero, esta sección es un mapeo $\zeta: B \rightarrow E$ que manda cada elemento x al 0 de $p^{-1}(x)$ visto como espacio vectorial, es decir

$$\zeta(x) = 0_x \quad 0_x \in E_x = p^{-1}(x)$$

Una propiedad importante que se cumple para los haces vectoriales con respecto a su tipo de homotopía es la siguiente:

Proposición 2.1.2. *Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial real o complejo, entonces $p: E \rightarrow B$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración. Vamos a fijarnos en el mapeo $f: K \times E \rightarrow E$ tal que localmente este mapeo es la multiplicación escalar en el espacio vectorial. Sea $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ un atlas de trivializaciones y definimos $f_\alpha: K \times p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow p^{-1}(U_\alpha)$ de manera que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K \times p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{f_\alpha} & p^{-1}(U_\alpha) \\ \text{Id} \times \Phi_\alpha \downarrow & & \downarrow \Phi_\alpha \\ K \times U_\alpha \times K^n & \longrightarrow & U_\alpha \times K^n \end{array}$$

en donde la flecha de abajo está dada por

$$(k, x, z) \mapsto (x, k \cdot z).$$

De esta manera tenemos que

$$f_\alpha(k, e) = \Phi_\alpha^{-1}(p(e), k \cdot \text{pr}_2 \Phi_\alpha(e)).$$

Para ver que f define un mapeo continuo en todo E basta probar que en las intersecciones coinciden las f_α , ya que E tiene la topología final respecto a los abiertos $p^{-1}(U_\alpha)$ y entonces $K \times E$ tiene la topología final respecto a los $K \times p^{-1}(U_\alpha)$. Sea $(k, e) \in (K \times p^{-1}(U_\alpha)) \cap (K \times p^{-1}(U_\beta))$, entonces

$$\begin{aligned} f_\alpha(k, e) &= \Phi_\alpha^{-1}(p(e), k \cdot \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha(e)) \\ &= \Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(p(e), k \cdot \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\beta(e)) \\ &= \Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}\left(p(e), k \cdot g_{\alpha\beta}(p(e))(\text{pr}_2 \circ \Phi_\beta(e))\right) \\ &= \Phi_\beta^{-1}\left(p(e), g_{\beta\alpha}(p(e))g_{\alpha\beta}(p(e))(k \cdot \text{pr}_2 \circ \Phi_\beta(e))\right) \\ &= \Phi_\beta^{-1}(p(e), k \cdot \text{pr}_2 \circ \Phi_\beta(e)) \\ &= f_\beta(k, e), \end{aligned}$$

así que $f: K \times E \rightarrow E$ está bien definida y es continua. Escribiremos

$$f(k, e) = k \cdot e.$$

Dado que tenemos lo siguiente:

$$p \circ \zeta(x) = p(0_x) = x = Id_X(x),$$

entonces tenemos un candidato a inversa homotópica para p . Definimos la homotopía $H: E \times I \rightarrow E$ dada por

$$H(e, t) = t \cdot e.$$

Esta homotopía satisface

$$H(e, 0) = 0 \cdot e = \zeta \circ p(e) \quad \text{y} \quad H(e, 1) = 1 \cdot e = Id_E(e),$$

así, podemos concluir que π es una equivalencia homotópica. \square

A diferencia de los haces vectoriales, los haces G -principales involucran un grupo topológico G fijo en cada fibra (suponiendo que la base del haz es arcocotexo). Más específicamente, es posible definir un haz G -principal de la siguiente manera

Definición 2.1.3. Sea G un grupo topológico, un haz G -principal $p: E \rightarrow B$ es un haz fibrado cuya fibra es G , pero que además satisface las siguientes propiedades:

1. E tiene una G -acción derecha libre para la cual $p(eg) = p(e)$.
2. Existe un atlas $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ de trivializaciones locales $\Phi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$, las cuales son G -equivariantes con respecto a la acción $(u, g) \cdot h = (u, gh)$.

La siguiente proposición nos muestra qué es lo que sucede con las funciones de transición para los haces G -principales.

Proposición 2.1.4. *Sea $p: E \rightarrow B$ un haz G -principal. Para un atlas de trivializaciones locales equivariantes $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$, las funciones de transición están dadas por $g_{\alpha\beta}(x) = l_g$ para algún $g \in G$, en donde*

$$l_g: G \rightarrow G$$

es multiplicación por la izquierda por g .

Demostración. Utilizando la G -acción derecha en $U_\alpha \times G$ dada por

$$(x, g) \cdot h = (x, gh),$$

y utilizando que $\text{pr}_2, \Phi_\alpha, \Phi_\beta$ son G -equivariantes, se tiene que

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(x)(h) &= (\text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(x, h) \\ &= (\text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})[(x, 1) \cdot h] \\ &= [(\text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(x, 1)] \cdot h \\ &= g_{\alpha\beta}(x)(1) \cdot h \end{aligned}$$

por lo tanto, haciendo $g = g_{\alpha\beta}(x)(1)$, entonces

$$g_{\alpha\beta}(x)(h) = l_g(h). \quad \square$$

Un morfismo entre los haces G -principales $p: E \rightarrow B$ y $p': E' \rightarrow B$ es un mapeo continuo y equivariante $f: E \rightarrow E'$ que hace conmutar el siguiente triángulo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B. \end{array}$$

Es un isomorfismo si existe otro morfismo de haces G -principales $f': E' \rightarrow E$ tal que ambas composiciones nos da la identidad. Un resultado interesante sobre los haces G -principales es el siguiente:

Proposición 2.1.5. *Cualquier morfismo $f: E \rightarrow E'$ de haces G -principales es un isomorfismo.*

2.1.1. El haz asociado

El haz asociado es un concepto que permite convertir un haz G -principal en otro tipo de haz fibrado, será de gran importancia más adelante cuando enunciemos la definición de pares duales en la sección de T-dualidad. En [28] se define de la siguiente manera:

Definición 2.1.6. Sea Y un espacio topológico con una G -acción izquierda y continua, sea $p: E \rightarrow B$ un haz G -principal. A partir de este haz podemos construir el haz fibrado asociado

$$\begin{aligned} \pi: E \times_G Y &\rightarrow B. \\ E \times_G Y &:= E \times Y / \sim \quad (e, y) \sim (eg, g^{-1}y), \end{aligned}$$

en donde π está dado por el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E \times Y & \xrightarrow{\text{pr}_1} & E & \xrightarrow{p} & B \\ q \downarrow & & \nearrow \pi & & \\ E \times_G Y & & & & \end{array}$$

y

$$q: E \times Y \rightarrow E \times_G Y.$$

es el mapeo cociente.

Explícitamente del diagrama sacamos que

$$\pi([e, y]) = p(e) \quad \forall [e, y] \in E \times_G Y,$$

el cual está bien definido ya que

$$\pi[eg, g^{-1}y] = p(eg) = p(e).$$

Proposición 2.1.7. Sea $p: E \rightarrow B$ un haz G -principal. El haz asociado $\pi: E \times_G Y \rightarrow B$ es un haz fibrado con fibra Y y posee un atlas de trivializaciones locales $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ cuyas funciones de transición son de la forma

$$\{l_g: Y \rightarrow Y \mid g \in G\}.$$

Demostración. Sea $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ un atlas de trivializaciones G -equivariantes para el haz G -principal $p: E \rightarrow B$, entonces

$$\Phi_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$$

de manera que con lo que hicimos en la sección anterior, las funciones de transición para este atlas son de la forma

$$\{l_g: G \rightarrow G \mid g \in G\}.$$

Ahora bien, notemos que

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \{[e, y] \in E \times_G Y \mid p(e) \in U_\alpha\} = p^{-1}(U_\alpha) \times_G Y$$

así que consideremos el mapeo $\Psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times Y$ dado por

$$\Psi_\alpha[e, y] = (p(e), \text{pr}_2 \Phi_\alpha(e) \cdot y).$$

El mapeo anterior está bien definido ya que

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha[eg, g^{-1}y] &= (p(eg), \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha(eg) \cdot g^{-1}y) \\ &= (p(e), \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha(e)g \cdot g^{-1}y) \\ &= (p(e), \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha(e) \cdot gg^{-1}y) \\ &= (p(e), \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha(e) \cdot y) \\ &= \Psi_\alpha[e, y], \end{aligned}$$

además es continua ya que el mapeo visto como $p^{-1}(U_\alpha) \times Y \rightarrow U_\alpha \times Y$

$$(e, y) \mapsto (p(e), \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha(e) \cdot y)$$

es continuo y como $p^{-1}(U_\alpha) \times_G Y$ tiene la topología cociente, entonces Ψ_α es continua. De igual manera se tiene que

$$\text{pr}_1 \Psi_\alpha[e, y] = p(e) = \pi[e, y].$$

La inversa de Ψ_α está dada por $\Psi'_\alpha: U_\alpha \times Y \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$

$$\Psi'_\alpha(x, y) = [\Phi_\alpha^{-1}(x, 1), y],$$

la cual está bien definida y también es continua. A continuación mostraremos que es la inversa de Ψ_α .

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha \circ \Psi'_\alpha(x, y) &= \Psi_\alpha([\Phi_\alpha^{-1}(x, 1), y]) \\ &= (p \circ \Phi_\alpha^{-1}(x, 1), \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\alpha^{-1}(x, 1) \cdot y) \\ &= (\text{pr}_1(x, 1), \text{pr}_2(x, 1) \cdot y) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \Psi'_\alpha \circ \Psi_\alpha[e, y] &= \Psi'_\alpha(p(e), \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha(e) \cdot y) \\ &= [\Phi_\alpha^{-1}(p(e), 1), \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha(e) \cdot y] \\ &= [\Phi_\alpha^{-1}(p(e), 1) \cdot \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha(e), y] \\ &= [\Phi_\alpha^{-1}(p(e), \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha(e)), y] \\ &= [\Phi_\alpha^{-1}(\text{pr}_1 \circ \Phi_\alpha(e), \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha(e)), y] \\ &= [\Phi_\alpha^{-1} \circ \Phi_\alpha(e), y] \\ &= [e, y]. \end{aligned}$$

Finalmente, calculamos las funciones de transición con respecto al atlas $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}$, sea $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ y $y \in Y$, entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\alpha\beta}(x)(y) &= \text{pr}_2 \circ \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}(x, y) \\
&= \text{pr}_2 \circ \Psi_\alpha([\Phi_\beta^{-1}(x, 1), y]) \\
&= \text{pr}_2(p \circ \Phi_\beta^{-1}(x, 1), \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x, 1) \cdot y) \\
&= \text{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(x, 1) \cdot y \\
&= g_{\alpha\beta}(x)(1) \cdot y
\end{aligned}$$

por lo que si $g = g_{\alpha\beta}(b)(1)$ entonces

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(b) = l_g: Y \rightarrow Y. \quad \square$$

2.1.2. El haz esférico inducido por un haz vectorial

Un haz esférico unitario se construye a partir de un haz vectorial (en esta tesis nos concentraremos en el caso de haces vectoriales complejos). Para poder hablar de una esfera, es necesario primero hablar antes de una noción de medida y un producto interno es lo que nos permite poder medir en este caso. Hatcher define en [25] un producto interno en haces vectoriales reales, nosotros trataremos el caso de los haces vectoriales complejos.

Definición 2.1.8. (Producto interno) Un producto interno en un haz vectorial complejo $\pi: V \rightarrow B$ es un mapeo $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \oplus E \rightarrow \mathbb{C}$ el cual es un producto interno en cada fibra, es decir, es una forma sesquilineal hermitiana y definida positiva.

El siguiente teorema bajo ciertas condiciones de la base del haz vectorial nos garantiza la existencia de productos internos.

Proposición 2.1.9. *Un producto interno existe para un haz vectorial $\pi: V \rightarrow B$ si B es compacto y Hausdorff o más generalmente paracompacto y Hausdorff.*

Demostración. Sea $\pi: V \rightarrow B$ un haz vectorial y consideremos un atlas de trivializaciones locales $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$. Dado que B es paracompacto y Hausdorff, podemos garantizar la existencia de una partición de la unidad $\{u_\alpha\}_{\alpha \in J}$ subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$. Notemos que tenemos un producto interno $q_\alpha: U_\alpha \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ inducido por el producto interno usual de \mathbb{C}^n

$$q_\alpha(b, z, w) = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \cdots + z_n \overline{w_n}.$$

De esta manera tenemos definidos localmente a los productos internos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \times \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$$

dados por

$$\langle e, e' \rangle_\alpha = q_\alpha \circ (\Phi_\alpha \oplus \Phi_\alpha)$$

en donde $\Phi_\alpha \oplus \Phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \times \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n)$ está dado por

$$(\Phi_\alpha \oplus \Phi_\alpha)(e, e') = (p(e), \text{pr}_2 \Phi_\alpha(e), \text{pr}_2 \Phi_\alpha(e')).$$

Entonces definimos el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \oplus E \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$\langle e, e' \rangle = \sum_{\alpha \in J} u_\alpha(p(e)) \langle e, e' \rangle_\alpha$$

el cual es continuo y su restricción a la fibra $p^{-1}(b)$ es

$$\langle e, e' \rangle = \sum_{i=1}^n u_{\alpha_i}(b) \langle e, e' \rangle_{\alpha_i} \quad \alpha_i \in J, u_{\alpha_i}(b) \neq 0 \quad ,$$

que es una forma bilineal hermitiana definida positiva. \square

Una vez garantizada la existencia de un producto interno en un haz vectorial V , la longitud de los vectores está definida, así que podemos considerar el subespacio $S(V)$.

Definición 2.1.10 (Haz esférico inducido por un haz vectorial). Sea $\pi: V \rightarrow B$ un haz vectorial complejo. Definimos el espacio total del haz *esférico* como

$$S(V) := \{v \in V_b \mid b \in B, |v| = 1\}$$

junto la proyección natural $\pi_S: S(V) \rightarrow B$.

Antes de probar que en efecto el haz esférico es un haz fibrado, consideremos el siguiente lema [32].

Lema 2.1.11. *Cualquier marco local para un haz vectorial induce trivializaciones locales del haz vectorial.*

Demostración. Sea $\pi: V \rightarrow B$ un haz vectorial de rango n y $\{\sigma_i\}$ un marco local para V sobre un abierto $U \subset B$. Definimos un mapeo $\Psi: U \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ dado por

$$\Psi(b, (z_1, \dots, z_n)) = \sum_{i=1}^n z_i \sigma_i(b).$$

Dado que $\{\sigma_i(b)\}$ forma una base para V_b entonces es claro que Ψ es biyectiva, además restringido a la fibra $\pi^{-1}(b)$ se tiene que Ψ es un isomorfismo ya que

$$\Psi(b, e_j) = \sigma_j(b)$$

y entonces manda bases en bases. Si probamos que Ψ es un homeomorfismo, entonces (U, Ψ^{-1}) es una trivialización local inducida por el marco local $\{\sigma_i\}$.

Notemos que como Ψ es biyectiva entonces es suficiente probar que es un homeomorfismo local. Dado $b_0 \in U$, podemos escoger una trivialización local (V, Φ) de manera que $b_0 \in V$ y además podemos suponer que $V \subset U$ (o de lo contrario tomamos la intersección y restringimos la trivialización). Dado que Φ es un homeomorfismo basta probar que

$$\Phi \circ \Psi|_{V \times \mathbb{C}^n} : V \times \mathbb{C}^n \rightarrow V \times \mathbb{C}^n$$

es un homeomorfismo para poder concluir que Ψ restringe a un homeomorfismo $\Psi|_{V \times \mathbb{C}^n} : V \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(V)$ como podemos ver en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} V \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\Psi|_{V \times \mathbb{C}^n}} & \pi^{-1}(V) & \xrightarrow{\Phi} & V \times \mathbb{C}^n \\ & \searrow \text{pr}_1 & \downarrow \pi & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & V & & \end{array}$$

Notemos que como $\Phi \circ \sigma_i|_V : V \rightarrow V \times \mathbb{C}^n$ es continua, entonces existen funciones $\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^n : V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\Phi \circ \sigma_i(b) = (b, (\sigma_i^1(b), \dots, \sigma_i^n(b))).$$

Luego en $V \times \mathbb{C}^n$ tenemos que

$$\Phi \circ \Psi(p, (z_1, \dots, z_n)) = \Phi \left(\sum_{i=1}^n z_i \sigma_i(p) \right) = \left(b, \sum_{i=1}^n z_i \sigma_i^1(p), \dots, \sum_{i=1}^n z_i \sigma_i^n(p) \right)$$

de donde se tiene que es continua. Para probar que $(\Phi \circ \Psi)^{-1}$ es continua, notemos que la matriz $(\sigma_i^j(p))$ es invertible para cada p ya que $(\sigma_i(p))$ es una base para V_p . Sea $(\tau_i^j(p))$ la matriz inversa. Dado que tomar la inversa es continua en $GL(n, \mathbb{C})$, las funciones τ_i^j son continuas, así que

$$(\Phi \circ \Psi)^{-1}(p, (w_1, \dots, w_n)) = \left(b, \sum_{i=1}^n w_i \tau_i^1(p), \dots, \sum_{i=1}^n w_i \tau_i^n(p) \right)$$

es continua. □

Procedemos a mostrar el teorema

Teorema 2.1.12. *El haz esférico $S(V)$ inducido por el haz vectorial complejo $\pi : V \rightarrow B$ de rango n es un haz fibrado con fibra S^{2n-1} .*

Demostración. Sea (U, Φ) una trivialización local para el haz vectorial $\pi: V \rightarrow B$, entonces tenemos el marco local $\{\sigma_i\}$ dado por

$$\sigma_i(p) := \Phi^{-1}(p, e_i).$$

Dado que por hipótesis B es paracompacto y Hausdorff, entonces existe un producto interno $\langle, \rangle: V \oplus V \rightarrow \mathbb{C}$. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt punto a punto para las secciones locales $\{\sigma_i\}$ utilizando el producto interno, obtenemos secciones locales $\{\sigma'_i: U \rightarrow V\}$ de manera que son ortonormales en cada fibra. Utilizando el lema anterior obtenemos una trivialización local (U, Ψ) con $\Psi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ tal que

$$\sigma'_i(b) = \Psi^{-1}(b, e_i).$$

Consideremos el mapeo

$$\Psi|_{S(V)}: \pi^{-1}(U) \cap S(V) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n.$$

Notemos que cualquier elemento $e \in \pi^{-1}(U)$ es de la forma $e = \sum_{i=1}^n z_i \sigma'_i(\pi(e))$, así que

$$\begin{aligned} e \in S(V) &\Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^n z_i \sigma'_i(\pi(e)) \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow \left\langle \sum_{i=1}^n z_i \sigma'_i(\pi(e)), \sum_{i=1}^n z_i \sigma'_i(\pi(e)) \right\rangle = 1 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i = \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow z = (z_1, \dots, z_n) \in S^{2n-1}, \end{aligned}$$

por lo tanto $\Psi|_{S(V)}(\pi^{-1}(U) \cap S(V)) = U \times S^{2n-1}$ ya que Ψ es biyectiva, entonces

$$\Psi|_{S(V)}: \pi^{-1}(U) \cap S(V) \rightarrow U \times S^{2n-1}$$

es una trivialización local cuya inversa es

$$\Psi^{-1}|_{S(V)}: U \times S^{2n-1} \rightarrow \pi^{-1}(U) \cap S(V). \quad \square$$

En el caso en que el haz vectorial complejo $\pi: V \rightarrow B$ es un haz lineal complejo, tenemos el haz esférico

$$S^1 \rightarrow S(V) \xrightarrow{\pi_S} B$$

pero aún más, dado que hemos construido un atlas de trivializaciones locales (U_α, Φ_α) a partir de trivializaciones locales de un haz vectorial, entonces tenemos que

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times S^1 \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times S^1$$

satisface que

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}(b, z) = (b, g_{\alpha\beta}(b) \cdot z)$$

en donde $g_{\alpha\beta}(b) \in GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$, así que como $g_{\alpha\beta}(b) \cdot z \in S^1$ entonces

$$1 = |g_{\alpha\beta}(b) \cdot z| = |g_{\alpha\beta}(b)| \cdot |z| = |g_{\alpha\beta}(b)|$$

por lo tanto $g_{\alpha\beta}(b) \in S^1, \forall b$. Podemos concluir que $\pi_S: S(V) \rightarrow B$ es un haz S^1 -principal.

En el caso general para un haz vectorial complejo de rango n , podemos definir una acción de S^1 sobre $S(V)$ dada como uno esperaría, si $e = \sum_{i=1}^n z_i \sigma_i(\pi(e))$ y $u \in S^1$ entonces

$$e \cdot u = \Phi^{-1}(\Phi(e) \cdot u) = \sum_{i=1}^n (z_i u) \sigma_i(\pi(e))$$

en donde la acción de S^1 sobre $U \times S^{2n-1}$ está dada por

$$(b, z) \cdot u = (b, zu).$$

Esta definición es independiente de la carta Φ ya que la función de transición $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ satisface

$$[g_{\alpha\beta}(b)(z)] \cdot u = g_{\alpha\beta}(b)(zu).$$

De la definición es claro que $\pi_S(e \cdot u) = \pi_S(e)$.

2.1.3. El haz proyectivo inducido por un haz vectorial

De manera análoga al haz esférico y al haz de discos, a partir de un haz vectorial podemos construir un haz fibrado cuyas fibras son espacios proyectivos. En esta tesis prestaremos más atención a los haces proyectivos cuyas fibras son espacios proyectivos complejos.

Definición 2.1.13. Sea $\pi: V \rightarrow B$ un haz vectorial complejo. Definimos el espacio total del haz proyectivo inducido como

$$P(V) := \{W \mid W \subset V_b, b \in B, \dim W = 1\}$$

junto con la proyección natural $\pi_P: P(V) \rightarrow B$

Notemos que una consecuencia inmediata de la definición es que

$$P(V)_b = (\pi_P)^{-1}(b) = P(V_b) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$$

Proposición 2.1.14. *Sea $\pi: V \rightarrow B$ un haz vectorial complejo de dimensión n . El haz proyectivo inducido $\pi_P: P(V) \rightarrow B$ es un haz fibrado cuya fibra en cada punto es homeomorfa a $\mathbb{C}P^{n-1}$.*

Ahora bien, nos gustaría calcular la cohomología con coeficientes enteros del espacio total $P(V)$, para eso nos podemos considerar el haz vectorial tautológico Γ sobre este espacio total,

$$\Gamma = \{(W, w) \mid W \subset V_b, b \in B, w \in W\}$$

junto con la proyección natural $q: \Gamma \rightarrow P(V)$. De esta manera se tiene que

$$\Gamma_b \rightarrow P(V)_b \cong \mathbb{C}P^{n-1}$$

es el haz tautológico usual sobre el proyectivo complejo (el cual usualmente se denota como $\gamma \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$). Con este nuevo haz en mente, podemos utilizar el siguiente teorema que relaciona la cohomología del espacio total de un haz fibrado con la cohomología de la base y la fibra.

Teorema 2.1.15 (Leray–Hirsch). *Sea $p: E \rightarrow B$ un haz fibrado con fibra F tal que para algún anillo conmutativo de coeficientes R se satisfacen las siguientes condiciones*

- a) $H^n(F; R)$ es un R -módulo libre finitamente generado para cada n .
- b) Existen clases $c_j \in H^{k_j}(E; R)$ cuya restricción $\iota^*(c_j)$ forman una base para $H^*(F; R)$ en cada fibra F , en donde $\iota: F \hookrightarrow E$ es la inclusión de la fibra.

Entonces el mapeo $\Phi: H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R) \rightarrow H^*(E; R)$, dado por

$$\sum_{ij} b_i \otimes \iota^*(c_j) \mapsto \sum_{ij} p^*(b_i) \cup c_j$$

es un isomorfismo de R -módulos.

Una demostración de este teorema la podemos encontrar en la sección 4.D sobre la cohomología de haces fibrados en [25]. La principal consecuencia del teorema es que podemos ver a la cohomología $H^*(E; R)$ como un $H^*(B; R)$ -módulo libre con base $\{c_j\}$, en donde la estructura de $H^*(B; R)$ -módulo está dada por

$$b \cdot c := p^*(b) \cup c \quad b \in H^*(B; R) \quad \text{y} \quad c \in H^*(E; R).$$

Regresando a nuestro haz fibrado $\pi_P: P(V) \rightarrow B$, notemos que se cumplen las hipótesis del teorema utilizando las clases de Chern del haz tautológico. Las clases características son una herramienta que relaciona los haces vectoriales con la cohomología del espacio base, de manera que se satisface una condición de naturalidad con respecto a pull-backs. Para el lector no familiarizado con estos conceptos, en el Apéndice A se pretende dar una breve introducción a las clases de Chern así como también a sus propiedades.

Notemos que las inclusiones de la fibra

$$\iota_b: P(V)_b \cong \mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow P(V) \quad b \in B$$

satisfacen

$$\iota_b^*(c_1(\Gamma)) = c_1(\gamma_b) = c_1(\gamma).$$

Por el teorema 14.4 de [37] sabemos que $c_1(\gamma)$ genera el anillo de cohomología $H^*(\mathbb{C}P^{n-1}; \mathbb{Z})$, entonces estamos bajo las hipótesis del teorema de Leray–Hirsch. Se sigue que cualquier elemento $a \in H^*(P(V); \mathbb{Z})$ se puede escribir como

$$a = \pi_P^*(b_0) + \pi_P^*(b_1)c_1(\gamma) + \cdots + \pi_P^*(b_{n-1})(c_1(\gamma))^{n-1} \quad b_i \in H^*(B; \mathbb{Z}).$$

Otra propiedad importante que relaciona al haz proyectivo inducido con el haz esférico unitario es el siguiente teorema:

Teorema 2.1.16. *Sea $\pi: V \rightarrow B$ un haz vectorial complejo, el mapeo*

$$r: S(V) \rightarrow S(V)/S^1 \cong P(V)$$

dado por

$$r(e) = [e]_{S^1}$$

define un haz S^1 -principal.

Por otro lado, notemos que se tiene un diagrama conmutativo que nos relaciona estos tres haces involucrados

$$\begin{array}{ccc} S(V) & \xrightarrow{r} & P(V) \\ & \searrow \pi_S & \downarrow \pi_P \\ & & B \end{array}$$

ya que estas proyecciones no mueven la fibra, es decir

$$\pi_P r(e) = \pi_P[e] = b = \pi_S(e)$$

2.2. El pushforward en cohomología

Usualmente pensamos a la cohomología como una sucesión de funtores contravariantes sobre una cierta categoría de espacios topológicos a la categoría de grupos abelianos. Los funtores contravariantes sobre esta categoría mandan funciones continuas a homomorfismos de grupos abelianos, con la particularidad de que se invierte el dominio y contradominio de la función, este tipo de asignación usualmente es conocida como el pullback asociado a una función. Cuando el functor hace este tipo de asignación se le conoce como contravariante, a diferencia de los funtores covariantes cuyos mapeos inducidos no cambian el dominio y contradominio de las funciones. Este tipo de asignación es conocida como pushforward.

La integración de formas diferenciables es una herramienta fundamental en el estudio de las variedades diferenciables, es a partir de esta herramienta que bajo ciertas circunstancias es posible definir un mapeo en “*dirección contraria*”. La circunstancia que más nos interesa en este trabajo es el caso de un haz fibrado $\pi: E \rightarrow B$, por lo que nos gustaría definir un mapeo adecuado

$$\pi_!: H^k(E) \rightarrow H^l(B).$$

Nota. Cuando no escribimos coeficientes para la cohomología/homología, uno usualmente se refiere a los coeficientes enteros, es decir,

$$H^n(B) = H^n(B; \mathbb{Z}) \quad \text{y} \quad H_n(B) = H_n(B; \mathbb{Z}).$$

Pensamos primero en la cohomología de De Rham en la categoría de variedades diferenciables. Recomendamos [32] y [13] en donde se muestra una definición y propiedades que satisface la cohomología de De Rham, es en esta última referencia en donde desarrollan un pushforward asociado al mapeo π , también conocido como la integración a lo largo de la fibra. El nombre se debe a lo siguiente: Consideremos el haz vectorial real trivial $\pi: E \rightarrow B$ diferenciable de rango n , entonces

$$E = B \times \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad \pi = \text{pr}_1,$$

sean x_1, \dots, x_n las coordenadas en la fibra \mathbb{R}^n , tenemos que cualquier forma diferenciable es una combinación lineal de dos tipos de formas.

1. Las formas que contienen como factor a la n -forma $dx_1 \cdots dx_n$.

$$\eta_1 = (\pi^* \omega) f(b, x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

con ω una forma en B .

2. La formas que no contienen como factor a la n -forma $dx_1 \cdots dx_n$.

$$\eta_2 = (\pi^* \omega) f(b, x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \cdots dx_{i_r}, \quad r < n$$

con ω una forma en B .

En ambos casos la función f tiene soporte compacto para cada $b \in B$ fijo. De esta manera se define la integración a lo largo de fibra $\pi_!$ con las siguientes asignaciones

$$\pi_!(\eta) = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(b, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \right) \omega & \text{si } \eta = \eta_1 \\ 0 & \text{si } \eta = \eta_2 \end{cases}$$

y se extiende por linealidad. Para cualquier haz vectorial $\pi: E \rightarrow B$ de rango n se utiliza la trivialidad local para extender la definición anterior. Posteriormente se muestra que este mapeo $\pi_!$ conmuta con la derivada exterior para así obtener un mapeo en la cohomología de DeRham

$$\pi_!: H^k(E; \mathbb{R}) \rightarrow H^{k-n}(B; \mathbb{R}).$$

Este mapeo satisface las siguientes propiedades:

Teorema 2.2.1. *La integración a lo largo de la fibra satisface las siguientes propiedades:*

- a) *Sea $\pi: E \rightarrow B$ un haz vectorial orientado de rango n , consideremos $\eta \in \Omega_{cv}(E)$ (una forma en E con soporte compacto a lo largo de la fibra) y $\omega \in \Omega(B)$. Entonces*

$$\pi_!(\pi^*\omega \wedge \eta) = \omega \wedge \pi_!\eta.$$

- b) *Supongamos además que B es una variedad orientada, $\eta \in \Omega_{cv}^k(E)$ y $\omega \in \Omega_c^{\dim E + n - k}(B)$. Con la orientación local producto en E se tiene que*

$$\int_E (\pi^*\omega) \wedge \eta = \int_B \omega \wedge \pi_!(\eta).$$

También mencionamos el teorema de la dualidad de Poincaré para variedades orientadas en su versión para formas diferenciables (el cual podemos encontrar también en [13]), este nos dice que la asignación

$$P: H^k(B) \rightarrow \text{Hom}(H^{\dim B - k}(B), \mathbb{R})$$

dada por

$$P(\beta)(\omega) = \int_B \beta \wedge \omega$$

es un isomorfismo.

Proposición 2.2.2. *Sea $\pi: V \rightarrow B$ un haz vectorial de rango n , con B una variedad diferenciable compacta y orientable, consideremos ω una forma sobre B y η una forma sobre E , la siguiente propiedad de la integración a lo largo de la fibra*

$$\int_B \omega \wedge \pi_!(\eta) = \int_E \pi^*\omega \wedge \eta$$

es una propiedad que la caracteriza de manera única.

Demostración. Supongamos que existe otro mapeo de integración $\pi'_!$ de grado $-n$ tal que satisface la propiedad anterior, entonces tenemos que

$$\int_B \omega \wedge \pi_!(\eta) = \int_E \pi^* \omega \wedge \eta = \int_B \omega \wedge \pi'_!(\eta) \quad \forall \omega, \eta$$

por lo tanto

$$\int_B \pi_!(\eta) \wedge \omega = \int_B \pi'_!(\eta) \wedge \omega.$$

Así que

$$P(\pi_!(\eta))(\omega) = P(\pi'_!(\eta))(\omega) \quad \forall \omega$$

luego

$$P(\pi_!(\eta)) = P(\pi'_!(\eta)).$$

Pero como P es un isomorfismo entonces

$$\pi_!(\eta) = \pi'_!(\eta) \quad \forall \eta$$

de donde concluimos que

$$\pi_! = \pi'_! \quad \square$$

Ahora bien, si uno quiere transportar estas ideas a la cohomología singular, primero uno tiene que pensar en la integración. Por [37] sabemos que la integración sobre variedades cerradas y orientadas está relacionada con un emparejamiento $\langle \cdot, \cdot \rangle: H^k(B) \times H_k(B) \rightarrow \mathbb{Z}$, el cual está dado por

$$\langle b, c \rangle = h(b)(c)$$

en donde

$$h: H^k(B) \rightarrow \text{Hom}(H_k(B), \mathbb{Z})$$

es el mapeo que aparece en el teorema de coeficientes universales para cohomología. En el caso en que la cohomología y la homología no coincidan en dimensión, el emparejamiento se extiende haciendo que en esos casos sea igual a 0. Utilizando el emparejamiento anterior, la integración de un elemento $a \in H^{\dim B}(B)$ sobre la variedad B está dada por

$$\langle b, [B] \rangle = h(b)([B])$$

en donde $[B] \in H_{\dim B}(B)$ es la clase fundamental en homología.

En las referencias [44] y [46], encontramos que el pushforward de un mapeo $f: X \rightarrow Y$ con X, Y variedades orientadas, se define para cohomología singular utilizando la dualidad de Poincaré que relaciona la cohomología singular con la homología singular y el pushforward en homología

$$f_! = P.D_Y^{-1} \circ f_* \circ P.D_X,$$

de esta manera obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^k(X) & \xrightarrow{f_!} & H^{k-\dim X+\dim Y}(Y) \\ P.D_X \downarrow & & \downarrow P.D_Y \\ H_{\dim X-k}(X) & \xrightarrow{f_*} & H_{\dim X-k}(Y). \end{array}$$

Analicemos el caso en que $f = \pi: E \rightarrow B$ es un haz fibrado con fibra F , en donde B y F son variedades orientadas y E tiene la orientación local producto, afirmamos que se tiene la siguiente igualdad

$$\langle b \cup \pi_!(e), [B] \rangle = \langle \pi^*(b) \cup e, [E] \rangle$$

que se traduce en

$$h(b \cup \pi_!(e))[B] = h(\pi^*(b) \cup e)([E]).$$

En efecto, utilizando la relación entre el producto cup y cap tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^k(B) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_k(B), \mathbb{Z}) \\ -\cup \pi_!(e) \downarrow & & \downarrow (\pi_!(e) \cap -)^* \\ H^{k+l}(B) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_{k+l}(B), \mathbb{Z}) \end{array}$$

por lo que tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} h(b \cup \pi_!(e))[B] &= h(b)(\pi_!(e) \cap [B]) = h(b)(P.D_B \circ \pi_!(e)) \\ &= h(b)(\pi_* \circ P.D_E(e)) = h(b)(\pi_*(e \cap [E])). \end{aligned}$$

Utilizando la naturalidad del teorema de coeficientes universales para cohomología se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^k(B) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_k(B), \mathbb{Z}) \\ \pi^* \downarrow & & \downarrow (\pi_*)^* \\ H^k(E) & \xrightarrow{h} & \text{Hom}(H_k(E), \mathbb{Z}) \end{array}$$

de donde se tiene la siguiente igualdad

$$h(b)(\pi_*(e \cap [E])) = h(\pi^*(b))(e \cap [E]) = h(\pi^*(b) \cap e)([E]).$$

A diferencia de lo que sucede en la cohomología de DeRham esta propiedad en general no determina de manera única al mapeo $\pi_!$ ya que los grupos de homología

podrían tener torsión, de manera que h no es un isomorfismo, sin embargo si uno trabaja en los casos en que h es un isomorfismo (si el coeficiente de la cohomología es un campo o \mathbb{Z} y todos los grupos de cohomología son libres) entonces la igualdad anterior determina de manera única al pushforward.

Examinemos el siguiente ejemplo: Sea

$$\hat{p} = \text{pr}_2: T = S^1 \times \hat{S}^1 \rightarrow \hat{S}^1$$

entonces \hat{p} es un haz fibrado trivial con fibra S^1 . Utilizando el teorema de Künneth para cohomología sabemos que

$$\begin{aligned} H^0(T) &\cong H^0(S^1) \otimes H^0(\hat{S}^1) = \mathbb{Z}(1 \otimes \hat{1}) \\ H^1(T) &\cong H^1(S^1) \otimes H^0(\hat{S}^1) \oplus H^0(S^1) \otimes H^1(\hat{S}^1) = \mathbb{Z}(\theta \otimes \hat{1}) \oplus \mathbb{Z}(1 \otimes \theta) \\ H^2(T) &\cong H^1(S^1) \otimes H^1(\hat{S}^1) = \mathbb{Z}(\theta \otimes \hat{\theta}) \end{aligned}$$

y que además el isomorfismo de Künneth entre los anillos de cohomología

$$\times: H^*(S^1) \otimes H^*(\hat{S}^1) \rightarrow H^*(T)$$

está dado por

$$a \times b = \text{pr}_1^*(a) \cup \text{pr}_2^*(b).$$

Afirmamos que

$$\hat{p}_!(a \otimes b) = \langle a, [S^1] \rangle b \quad a \in H^*(S^1), b \in H^*(\hat{S}^1).$$

Dado que los grupos de homología involucrados son libres de torsión basta ver que esta definición satisface la propiedad que define al pushforward

$$\langle b \cup \hat{p}_!(e), [\hat{S}^1] \rangle = \langle \hat{p}^*(b) \cup e, [T] \rangle.$$

Basta ver que se cumple la igualdad anterior para cada generador aditivo e . Tenemos los siguientes casos

- $\hat{p}_!: H^2(T) \rightarrow H^1(\hat{S}^1)$, entonces $b \in H^0(\hat{S}^1)$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle b \cup \hat{p}_!(e), [\hat{S}^1] \rangle &= \langle n\hat{p}_!(\theta \otimes \hat{\theta}), [\hat{S}^1] \rangle = n \\ \langle \hat{p}^*(b) \cup e, [T] \rangle &= \langle \hat{p}^*(n) \cup (\theta \otimes \hat{\theta}), [T] \rangle = \langle n(\theta \otimes \hat{\theta}), [T] \rangle = n \end{aligned}$$

- $\hat{p}_!: H^1(T) \rightarrow H^0(\hat{S}^1)$, entonces $b \in H^1(\hat{S}^1)$, además en esta situación tenemos dos generadores. Primero si $e = 1 \otimes \theta$

$$\begin{aligned} \langle b \cup \hat{p}_!(e), [\hat{S}^1] \rangle &= \langle (n\theta) \cup \hat{p}_!(1 \otimes \hat{\theta}), [\hat{S}^1] \rangle = \langle (n\theta) \cup 0, [\hat{S}^1] \rangle = 0 \\ \langle \hat{p}^*(b) \cup e, [T] \rangle &= \langle \hat{p}^*(n\theta) \cup (1 \otimes \hat{\theta}), [T] \rangle = \langle n(1 \otimes \hat{\theta}) \cup (1 \otimes \hat{\theta}), [T] \rangle = 0. \end{aligned}$$

Y si $e = \theta \otimes \hat{1}$

$$\begin{aligned}\langle (n\hat{\theta}) \cup \hat{p}_!(\theta \otimes \hat{1}), [\hat{S}^1] \rangle &= \langle n\hat{\theta} \cup \hat{1}, [\hat{S}^1] \rangle = \langle n\hat{\theta}, [\hat{S}^1] \rangle = n \\ \langle \hat{p}^*(n\hat{\theta}) \cup \theta \otimes \hat{1}, [T] \rangle &= \langle n(\hat{\theta} \otimes 1) \cup (\theta \otimes \hat{1}), [T] \rangle = \langle n(\theta \otimes \hat{\theta}), [T] \rangle = n.\end{aligned}$$

Dado que para cualquier otra dimensión de la cohomología $\hat{p}_! = 0$ y en los generadores los mapeos coinciden, entonces concluimos que

$$\hat{p}_!(a \otimes b) = \langle a, [S^1] \rangle b \quad a \in H^*(S^1), b \in H^*(\hat{S}^1).$$

es tal que

$$\hat{p}_! = P.D_{\hat{S}^1}^{-1} \circ \hat{p}_* \circ P.D_T.$$

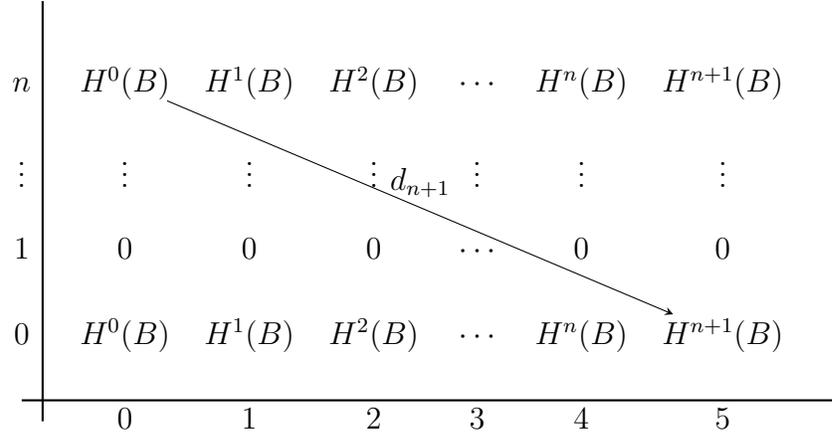
2.3. La sucesión de Gysin

La sucesión de Gysin es una herramienta que utilizaremos a menudo para poder calcular el pushforward en cohomología. Es una sucesión exacta larga en cohomología asociada a un haz fibrado $\pi: E \rightarrow B$ cuya fibra es una esfera S^n y en donde se satisface que $\pi_1(B)$ actúa de manera trivial sobre $H^*(S^n)$. Los mapeos involucrados son π^* , $\pi_!$ y el producto cup con cierto elemento $c \in H^{n+1}(B)$. Para demostrar la siguiente proposición utilizaremos sucesiones espectrales.

Proposición 2.3.1. *Sea $\pi: E \rightarrow B$ un haz fibrado con fibra S^n en donde B es arcoconexo y $\pi_1(B)$ actúa de manera trivial sobre $H^*(S^n)$. Entonces existe $c \in H^{n+1}(B)$ tal que el producto $c \cup (-)$ es parte de una sucesión exacta larga en cohomología de la forma*

$$\dots \longrightarrow H^k(B) \xrightarrow{\pi^*} H^k(E) \xrightarrow{\pi_!} H^{k-n}(B) \xrightarrow{c \cup (-)} H^{k+1}(B) \longrightarrow \dots$$

Demostración. Dado que $\pi_1(B)$ actúa de manera trivial sobre $H^*(S^n)$ entonces los coeficientes de la sucesión espectral asociada al haz fibrado $\pi: E \rightarrow B$ son no torcidos. Así que utilizando que la cohomología de S^n no se anula únicamente en dimensiones 0 y n , entonces $E_2^{p,q} = E_{n+1}^{p,q}$ está dada por



Sea $x \in H^0(B) \cong E_{n+1}^{0,n}$ un generador y definimos

$$c := d_{n+1}(x).$$

Dado que cualquier elemento en $E_{n+1}^{*,n}$ es de la forma $x \cdot b$ para $b \in E_{n+1}^{*,0} \cong H^*(B)$ entonces utilizando la propiedad de derivación de la diferencial d_{n+1} , obtenemos que

$$d_{n+1}(x \cdot b) = d_{n+1}(x) \cdot b + (-1)^n x \cdot d_{n+1}(b) = d_{n+1}(x) \cdot b = c \cup b.$$

Esto prueba que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^k(B) & \xrightarrow{c \cup (-)} & H^{k+n+1}(B) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ E_{n+1}^{k,n} & \xrightarrow{d_{n+1}} & E_{n+1}^{k+n+1,0}. \end{array}$$

Notemos que las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(d_{n+1}) \longrightarrow E_2^{p,n} \xrightarrow{d_{n+1}} E_2^{p+n+1,0} \longrightarrow \text{Coker}(d_{n+1}) \longrightarrow 0$$

dan lugar a las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow E_\infty^{p,n} \longrightarrow E_2^{p,n} \xrightarrow{d_{n+1}} E_2^{p+n+1,0} \longrightarrow E_\infty^{p+n+1,0} \longrightarrow 0.$$

Por otro lado, de la filtración y la convergencia de la sucesión espectral se tienen las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow E_\infty^{k,0} \longrightarrow H^k(E) \longrightarrow E_\infty^{k-n,n} \longrightarrow 0.$$

Pegando estas sucesiones exactas cortas obtenemos la sucesión exacta larga

$$\dots \longrightarrow H^k(B) \longrightarrow H^k(E) \longrightarrow H^{k-n}(B) \xrightarrow{c\cup(-)} H^{k+1}(B) \longrightarrow \dots,$$

Se tiene que el mapeo $H^k(B) \rightarrow H^k(E)$ es la composición de los mapeos

$$E_2^{p+n+1,0} \xrightarrow{r} E_\infty^{p+n+1} \xrightarrow{j} H^{p+n+1}(E)$$

en donde r es la proyección y j la inclusión, así que podemos concluir que es el mapeo $\pi^*: H^k(B) \rightarrow H^k(E)$. Para ver que la composición

$$H^k(E) \longrightarrow E_\infty^{k-n,n} \longrightarrow E_2^{k-n,n}$$

es igual al mapeo $\pi_!$ dejamos como referencia [13]. \square

Dado un haz vectorial complejo $\pi: V \rightarrow B$ de rango n , podemos considerar el haz esférico $\pi_S: S(V) \rightarrow B$, de manera que obtenemos un haz fibrado cuya fibra es S^{2n-1} . Para poder aplicar la proposición anterior basta ver que $\pi_1(B)$ actúa de manera trivial sobre $H^*(S^{2n-1})$ y para probar esto necesitamos utilizar el hecho de que los haces vectoriales complejos son orientados.

Proposición 2.3.2. *Sea $\pi: V \rightarrow B$ un haz vectorial complejo de rango n , entonces el haz esférico $\pi_S: S(V) \rightarrow B$ satisface que $\pi_1(B)$ actúa de manera trivial sobre la cohomología de la fibra, es decir, sobre $H^*(S^{2n-1})$.*

Demostración. Notemos que para un pullback de un haz fibrado la acción del grupo fundamental de la base se relaciona de la siguiente manera como podemos observar en el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} F \times \{0\} & \hookrightarrow & E & \longrightarrow & E' \\ \downarrow & \nearrow H_\alpha & \downarrow & \nearrow H'_{f\alpha} & \downarrow \\ F \times I & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

de esta manera

$$(H_\alpha)_1: F \rightarrow F$$

es igual a

$$(H'_{f\alpha})_1: F \rightarrow F.$$

Ahora bien, como $\pi: V \rightarrow B$ es un haz vectorial real orientado, entonces tenemos el siguiente pullback

$$\begin{array}{ccc}
 S^{2n-1} & \xrightarrow{\text{Id}} & S^{2n-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 S(V) & \longrightarrow & ESO_{2n} \times_{SO_{2n}} S^{2n-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B & \longrightarrow & BSO_{2n}.
 \end{array}$$

Como BSO_{2n} es simplemente conexo, entonces por el argumento anterior de los pullbacks y la acción, podemos concluir que $\pi_1(B)$ actúa de manera trivial sobre $H^*(S^{2n-1})$. \square

Nota. En el caso en que tenemos un haz esférico de un haz vectorial complejo $\pi_S: S(V) \rightarrow B$, a la clase de Euler $c \in H^{2n}(B)$ la denotaremos como clase de Chern $c_n(S(V))$.

El teorema anterior nos permite afirmar que existe una sucesión de Gysin equivariante en el siguiente sentido:

Supongamos que tenemos un haz vectorial complejo G -equivariante $\pi: V \rightarrow B$ entonces probamos que $p: EG \times_G V \rightarrow EG \times_G B$ es un haz vectorial complejo del mismo rango. Por lo tanto existe una sucesión de Gysin con respecto a la cohomología de Borel G -equivariante

$$\dots \longrightarrow H_G^k(B) \xrightarrow{\pi^*} H_G^k(S(V)) \xrightarrow{\pi_!} H_G^{k-n}(B) \xrightarrow{c_1^G(S(V))} H_G^{k+1}(B) \longrightarrow \dots$$

2.4. Cohomología equivariante

La cohomología y K-teoría equivariante surgen como una generalización de las teorías respectivas no equivariantes para espacios que llevan consigo una acción de un grupo topológico G . Dichos espacios reciben el nombre de G -espacios (en esta tesis cuando nos refiramos a G -espacios supondremos que la acción del espacio es izquierda, a menos que se especifique lo contrario).

En la literatura podemos mencionar varios trabajos en donde se desarrolla la teoría de cohomología equivariante, [15] desarrolla su teoría con el objetivo de estudiar clases de homotopía de funciones equivariantes entre G -espacios y como herramienta surge una noción de teoría de cohomología G -equivariante, su teoría se desarrolla restringiendo a los casos en que G es un grupo finito. Quizá la referencia más importante en este ámbito es [36] en donde podemos encontrar una generalización importante a las teorías de cohomología en su caso equivariante así

como también con teoremas clásicos de homotopía equivariante. En [5] existe un primer acercamiento entre la cohomología equivariante singular y la teoría de De Rham equivariante. Recientemente surgió una referencia de Loring Tu, en donde se desarrolla la cohomología equivariante y finaliza con una versión del teorema de De Rham equivariante [45].

La idea de estas teorías de cohomología es ser una extensión en el siguiente sentido: Si G es el grupo trivial entonces obtenemos la teoría de cohomología no equivariante respectiva. Otra idea importante es que estas teorías equivariantes nos capturen la acción y de cierta manera puedan distinguir espacios que son iguales pero que tienen distintas acciones. Requerimos que el espacio junto con la acción de G se pueda codificar a tal punto de que se pierda lo menos posible la información de la acción en el proceso, con esta idea en mente surge la siguiente definición:

Definición 2.4.1. Sea G un grupo topológico y X un G -espacio. Definimos la construcción de Borel de X como el espacio

$$X_G = EG \times_G X.$$

Utilizando la definición anterior, podemos definir la cohomología equivariante de un G -espacio.

Definición 2.4.2. Sea G grupo topológico y X un G -espacio, definimos la cohomología G -equivariante de Borel entera como la cohomología entera usual de la construcción de Borel

$$H_G^n(X; \mathbb{Z}) = H^n(X_G; \mathbb{Z}).$$

Es posible definir la cohomología relativa en el caso en que $A \subseteq X$ es invariante bajo la G -acción. Como es de esperarse, la cohomología equivariante de Borel satisface propiedades análogas al caso no equivariante [2], [36].

Proposición 2.4.3. *Sea G un grupo compacto de Lie, la cohomología equivariante de Borel consiste de una sucesión de funtores H_G^n de la categoría de G -CW-pares a la categoría de grupos abelianos que satisface las siguientes propiedades:*

1. H_G^n es G -invariante homotópico, es decir,

$$H_G^n(f_0) = H_G^n(f_1)$$

si $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ son funciones G -homótopas.

2. Si (X, A) es un G -CW-par en la categoría de G -CW-complejos, entonces existe una sucesión exacta larga y natural de grupos abelianos

$$\cdots \rightarrow H_G^n(X, A) \rightarrow H_G^n(X) \rightarrow H_G^n(A) \rightarrow H_G^{n+1}(X, A) \rightarrow \cdots$$

3. Si $X = \coprod_{\alpha} X_{\alpha}$ con X_{α} un G -CW-complejo y $\iota_{\alpha}: X_{\alpha} \hookrightarrow X$ son las inclusiones, entonces el mapeo producto

$$\prod_{\alpha} \iota_{\alpha}^*: H_G^n(X) \rightarrow \prod_{\alpha} H_G^n(X_{\alpha})$$

es un isomorfismo para cada n .

4. Si X se obtiene de X_1 pegando X_2 mediante una G -función celular $\varphi: X_0 \rightarrow X_1$ en donde X_0 es un subcomplejo de X_2 , entonces existe una sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris

$$\cdots \rightarrow H_G^{n-1}(X_0) \rightarrow H_G^n(X) \rightarrow H_G^n(X_1) \oplus H_G^n(X_2) \rightarrow H_G^n(X_0) \rightarrow \cdots$$

Ahora bien, dado un grupo topológico G y un G -espacio X , consideremos el haz G -principal universal

$$\pi: EG \rightarrow BG.$$

Notemos que podemos ver a la construcción de Borel X_G como el espacio total del haz asociado al haz universal anterior

$$p: X_G = EG \times_G X \rightarrow BG$$

de manera que la fibra del haz será X , es decir, que podemos considerar la inclusión de la fibra

$$\iota: X \hookrightarrow X_G.$$

Esta inclusión induce un homomorfismo en cohomología

$$\iota^*: H^n(X_G) \rightarrow H^n(X)$$

por lo tanto tenemos un mapeo que nos relaciona la cohomología equivariante con la no equivariante

$$\iota^*: H_G^n(X) \rightarrow H^*(X).$$

Decimos que una clase en $H^*(X)$ admite una **extensión equivariante** si está en la imagen del homomorfismo anterior.

Definición 2.4.4. Sean X, Y dos G -espacios, decimos que $f: X \rightarrow Y$ es un G -mapeo equivariante si

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x) \quad \forall g \in G.$$

La anterior definición nos permite definir la noción de haces vectoriales que tienen mayor estructura en el espacio total y en la base, de manera que estos dos espacios estén relacionados mediante la proyección del haz vectorial.

Definición 2.4.5. Un haz vectorial $\pi: V \rightarrow X$ se dice G -equivariante si V y X son G -espacios y $\pi: V \rightarrow X$ es un G -mapeo tal que para toda $g \in G$ y todo $x \in X$ el mapeo

$$l_g: V_x \rightarrow V_{g \cdot x}$$

es un mapeo lineal.

Nota. De ahora en adelante cuando digamos que $\pi: V \rightarrow X$ es un haz vectorial G -equivariante, nos referiremos a un haz vectorial complejo G -equivariante a menos que se indique lo contrario.

Un primer resultado importante para los haces vectoriales G -equivariantes es lo siguiente:

Proposición 2.4.6. Sea $\pi: V \rightarrow X$ un haz vectorial G -equivariante y consideremos $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ un atlas de trivializaciones locales, denotemos por

$$l_g: V \rightarrow V \quad \text{y} \quad l_g: X \rightarrow X$$

a la multiplicación izquierda inducida por la G -acción. Para cada $g \in G$ fija y (U_α, Φ_α) una carta del atlas, existe una carta $(W_{\alpha\beta}, \Phi_\alpha)$ y una función $\rho_{\alpha\beta}^g: W_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ de manera que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(W_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{l_g} & \pi^{-1}(Z_{\alpha\beta}) \\ \Phi_\alpha \downarrow & & \downarrow \Phi_\beta \\ W_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\tilde{l}_g} & Z_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \end{array}$$

en donde $Z_{\alpha\beta} \subset U_\alpha$ es un abierto y $\tilde{l}_g: W_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \rightarrow Z_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n$ está dada como

$$\tilde{l}_g(x, z) = (g \cdot x, \rho_{\alpha\beta}^g(x)z)$$

y además

$$g_{\alpha\gamma}(g \cdot x) = \rho_{\alpha\beta}^g(x) \rho_{\beta\gamma}^{g^{-1}}(x) \quad \forall x \in l_g^{-1}(U_\alpha \cap U_\gamma)$$

Demostración. Dado que tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{l_g} & V \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{l_g} & X \end{array}$$

podemos tomarnos el abierto $W_{\alpha\beta} = l_g^{-1}(U_\alpha) \cap U_\beta$, en donde U_β es un abierto del atlas tal que la intersección es no vacía, de manera que

$$l_g(W_{\alpha\beta}) = U_\alpha \cap l_g(U_\beta) =: Z_{\alpha\beta}.$$

Por lo tanto se satisface lo siguiente

$$l_g: \pi^{-1}(W_{\alpha\beta}) \rightarrow \pi^{-1}(Z_{\alpha\beta}),$$

además las cartas $(W_{\alpha\beta}, \Phi_\alpha)$ y $(Z_{\alpha\beta}, \Phi_\beta)$ nos permiten tener un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(W_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{l_g} & \pi^{-1}(Z_{\alpha\beta}) \\ \Phi_\beta \downarrow & & \downarrow \Phi_\alpha \\ W_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\tilde{l}_g} & Z_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n. \end{array}$$

Notemos que

$$\text{pr}_1 \tilde{l}_g = \text{pr}_1 \Phi_\alpha l_g \Phi_\beta^{-1} = \pi l_g \Phi_\beta^{-1} = \tilde{l}_g \pi \Phi_\beta^{-1} = \tilde{l}_g \text{pr}_1$$

por lo tanto

$$\tilde{l}_g(x, z) = (g \cdot x, \sigma(x, z))$$

en donde $\sigma: W_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Dado que l_g es un homeomorfismo tal que restringido a cada fibra es un isomorfismo, entonces \tilde{l}_g es homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos. Por lo tanto para cada $x \in W_{\alpha\beta}$ fijo, tenemos que

$$\rho_{\alpha\beta}^g(x): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

definido como

$$\rho_{\alpha\beta}^g(x)(z) = \sigma(x, z)$$

es un isomorfismo, además se tiene que $\rho_{\alpha\beta}^g(x)$ es homeomorfismo ya que es la composición de los homeomorfismos

$$\rho_{\alpha\beta}^g(x) = \text{pr}_2 l'_g \iota_x = \text{pr}_2 \Phi_\alpha l_g \Phi_\beta^{-1} \iota_x$$

en donde $\iota_x: \mathbb{C}^n \rightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^n$ está dado por

$$\iota_x(z) = (x, z).$$

Así tenemos definida una función $\rho_{\alpha\beta}^g: W_{\alpha\beta} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, esta función también es continua porque su adjunta $(\rho_{\alpha\beta}^g)^\perp: W_{\alpha\beta} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ está dada por

$$(\rho_{\alpha\beta}^g)^\perp(x, z) = \rho_{\alpha\beta}^g(x)(z) = \sigma(x, z)$$

la cual es continua y como \mathbb{C}^n es localmente compacto y Hausdorff, entonces esto implica que $\rho_{\alpha\beta}^g$ es continua. Finalmente supongamos que $x \in l_g^{-1}(U_\alpha \cap U_\gamma)$ y

$z \in \mathbb{C}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha\beta}^g(x)(z) &= \text{pr}_2 \Phi_\alpha l_g \Phi_\beta^{-1}(x, z) \\
&= \text{pr}_2 \Phi_\alpha \Phi_\gamma^{-1} \Phi_\gamma l_g \Phi_\beta^{-1}(x, z) \\
&= \text{pr}_2 \Phi_\alpha \Phi_\gamma^{-1}(g \cdot x, \rho_{\gamma\beta}^g(x)(z)) \\
&= \text{pr}_2(g \cdot x, g_{\alpha\gamma}(g \cdot x) \rho_{\gamma\beta}^g(x)(z)) \\
&= g_{\alpha\gamma}(g \cdot x) \rho_{\gamma\beta}^g(x)(z)
\end{aligned}$$

así

$$\rho_{\alpha\beta}^g(x) = g_{\alpha\gamma}(g \cdot x) \rho_{\gamma\beta}^g(x)$$

lo cual implica

$$g_{\alpha\gamma}(g \cdot x) = \rho_{\alpha\beta}^g(x) \rho_{\gamma\beta}^g(x)^{-1}.$$

Es claro que

$$\rho_{\gamma\beta}^g(x)^{-1} = \rho_{\beta\gamma}^{g^{-1}}(x)$$

concluimos entonces

$$g_{\alpha\gamma}(g \cdot x) = \rho_{\alpha\beta}^g(x) \rho_{\beta\gamma}^{g^{-1}}(x) \quad \forall x \in l_g^{-1}(U_\alpha \cap U_\gamma). \quad \square$$

De igual forma podemos definir haces principales G -equivariantes.

Definición 2.4.7. Un haz Γ -principal $p: E \rightarrow X$ se dice G -equivariante si E y X son G -espacios izquierdos, $p: E \rightarrow X$ es un G -mapeo y la acción izquierda de G en E conmuta con la acción derecha de Γ en E , es decir, para toda $a \in \Gamma$ y $g \in G$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{l_g} & E \\
r_a \downarrow & & \downarrow r_a \\
E & \xrightarrow{l_g} & E
\end{array}$$

Mencionamos la siguiente proposición que relaciona estos dos tipos de haces G -equivariantes:

Proposición 2.4.8. Si $p: E \rightarrow X$ es un haz S^1 -principal G -equivariante entonces el haz asociado

$$q: E \times_{S^1} \mathbb{C} \rightarrow X$$

es un haz vectorial complejo G -equivariante, en donde estamos dotando a \mathbb{C} de la acción de multiplicación compleja.

Existe una situación en donde la clase de cohomología en $H^n(X)$ automáticamente tiene una extensión equivariante. Supongamos que $\pi: V \rightarrow X$ es un haz vectorial G -equivariante de rango n , entonces podemos construirnos un nuevo haz

$$\pi_G: V_G \rightarrow X_G$$

dado por

$$\pi_G([e, v]) = [e, \pi(v)].$$

Notemos que este mapeo está bien definido ya que

$$\pi_G([eg, g^{-1}v]) = [eg, \pi(g^{-1}v)] = [eg, g^{-1}\pi(v)] = [e, \pi(v)].$$

Proposición 2.4.9. *El haz $\pi_G: V_G \rightarrow X_G$ es un haz vectorial de rango n .*

Demostración. Sea $p: EG \rightarrow BG$ el haz G -principal universal, consideremos $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha^X)\}$, $\{(U_\alpha, \tilde{\Phi}_\alpha^V)\}$, $\{(W_\beta, \Psi_\beta)\}$ los atlas de trivializaciones para el haz asociado $p_X: X_G \rightarrow BG$, el haz asociado $p_V: V_G \rightarrow BG$ y el haz vectorial $\pi: V \rightarrow X$ respectivamente, por lo tanto tenemos los mapeos

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha^V: p_V^{-1}(U_\alpha) &= p^{-1}(U_\alpha) \times_G V \rightarrow U_\alpha \times V \\ \Phi_\alpha^X: p_X^{-1}(U_\alpha) &= p^{-1}(U_\alpha) \times_G X \rightarrow U_\alpha \times X \\ \Psi_\beta: \pi^{-1}(W_\beta) &\rightarrow W_\beta \times \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Notemos que

$$p_X \pi_G([e, v]) = p_X[e, \pi(v)] = p(e) = p_V([e, v])$$

por lo que se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V_G & \xrightarrow{\pi_G} & X_G \\ & \searrow p_V & \swarrow p_X \\ & & BG. \end{array}$$

Dado que p_V y p_X son haces fibrados con fibra V y X respectivamente, localmente la función π_G es de la forma

$$\widehat{\pi}_G: U_\alpha \times V \rightarrow U_\alpha \times X$$

y como $\pi: V \rightarrow X$ es un haz vectorial, entonces la idea es utilizar que podemos llegar a

$$\widehat{\pi}_G: U_\alpha \times W_\beta \times \mathbb{C}^n \rightarrow U_\alpha \times W_\beta.$$

Supongamos que hemos hecho más pequeñas las cubiertas $\{U_\alpha\}$ y $\{W_\beta\}$ de manera que W_β es G -invariante y que además podemos considerar la siguiente composición

$$\begin{array}{ccccc}
 p^{-1}(U_\alpha) \times_G \pi^{-1}(W_\beta) & \xrightarrow{\Phi_\alpha^V} & U_\alpha \times \pi^{-1}(W_\beta) & \xrightarrow{\text{Id} \times \Psi_\beta} & U_\alpha \times W_\beta \times \mathbb{C}^n \\
 & \searrow \text{---} \Phi_{\alpha\beta} \text{---} & & & \downarrow (\Phi_\alpha^X)^{-1} \times \text{Id} \\
 & & & & (p^{-1}(U_\alpha) \times_G W_\beta) \times \mathbb{C}^n.
 \end{array}$$

Entonces la trivialización local

$$\Phi_{\alpha\beta}: p^{-1}(U_\alpha) \times_G \pi^{-1}(W_\beta) \rightarrow (\alpha^{-1}(U_\alpha) \times_G W_\beta) \times \mathbb{C}^n.$$

será el homeomorfismo dado por la composición de homeomorfismos

$$\Phi_{\alpha\beta} = [(\Phi_\alpha^X)^{-1} \times \text{Id}] \circ (\text{Id} \times \Psi_\beta) \circ \Phi_\alpha^V.$$

Una fórmula explícita para este mapeo es la siguiente

$$\Phi_{\alpha\beta}[e, v] = \left((\Phi_\alpha^X)^{-1}(p(e), \pi \text{pr}_2 \Phi_\alpha^V[e, v]), \text{pr}_2 \Psi_\beta \text{pr}_2 \Phi_\alpha^V[e, v] \right).$$

La inversa de la trivialización está dada por

$$\Phi_{\alpha\beta}^{-1} = (\Phi_\alpha^V)^{-1} \circ (\text{Id} \times \Psi_\beta^{-1}) \circ (\Phi_\alpha^X \times \text{Id}),$$

por lo tanto una fórmula explícita para este mapeo es el siguiente

$$\Phi_{\alpha\beta}^{-1}([e, x], z) = (\Phi_\alpha^V)^{-1} \left(p(e), \Psi_\beta^{-1}(\text{pr}_2 \Phi_\alpha^X[e, x], z) \right).$$

Si

$$[e, x] \in (p^{-1}(U_\alpha) \times_G W_\beta) \cap (p^{-1}(U_{\alpha'}) \times_G W_{\beta'}) = p^{-1}(U_\alpha \cap U_{\alpha'}) \times_G (W_\beta \cap W_{\beta'})$$

entonces la función de transición para estas trivializaciones locales están dadas por

$$\begin{aligned}
 g_{\alpha\alpha'\beta\beta'} &= \text{pr}_2 \Phi_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha'\beta'}^{-1}([e, x], z) \\
 &= \text{pr}_2 [(\Phi_\alpha^X)^{-1} \times \text{Id}] \circ (\text{Id} \times \Psi_\beta) \circ \Phi_\alpha^V \circ (\Phi_\alpha^V)^{-1} \circ (\text{Id} \times \Psi_{\beta'}^{-1}) \circ (\Phi_{\alpha'}^X \times \text{Id}) \\
 &= \left[\text{pr}_2 [(\Phi_\alpha^X)^{-1} \times \text{Id}] \circ (\text{Id} \times \Psi_\beta) \circ \Phi_\alpha^V \right] (\Phi_{\alpha'}^V)^{-1}(p(e), \Psi_{\beta'}^{-1}(\text{pr}_2 \Phi_{\alpha'}^X[e, x], z)) \\
 &= \text{pr}_2 \Psi_\beta \text{pr}_2 \Phi_\alpha^V (\Phi_{\alpha'}^V)^{-1}(p(e), \Psi_{\beta'}^{-1}(\text{pr}_2 \Phi_{\alpha'}^X[e, x], z)) \\
 &= \text{pr}_2 \Psi_\beta g_{\alpha\alpha'}^V(p(e)) (\Psi_{\beta'}^{-1}(\text{pr}_2 \Phi_{\alpha'}^X[e, x], z)) \\
 &= \text{pr}_2 \Psi_\beta l_g \Psi_{\beta'}^{-1}(\text{pr}_2 \Phi_{\alpha'}^X[e, x], z) \\
 &= \text{pr}_2 \Psi_\beta \Psi_{\beta''}^{-1} \Psi_{\beta''} l_g \Psi_{\beta'}^{-1}(\text{pr}_2 \Phi_{\alpha'}^X[e, x], z) \\
 &= g_{\beta\beta''} (l_g \text{pr}_2 \Phi_{\alpha'}^X[e, x]) \rho_{\beta''\beta'}^g(\text{pr}_2 \Phi_{\alpha'}^X[e, x])(z)
 \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $g_{\alpha\alpha'\beta\beta}([e, x]) \in GL(n, \mathbb{C})$. □

Sea $b_0 \in BG$ un elemento fijo, entonces hacemos las identificaciones

$$V \cong \{b_0\} \times V \quad \text{y} \quad X \cong \{b_0\} \times X.$$

Queremos mostrar que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\iota} & V_G \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi_G \\ X & \xrightarrow{j} & X_G \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow p_V \\ \searrow p_X \end{array} \quad BG$$

Sea $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ un atlas de trivializaciones locales para el haz G -principal universal $p: EG \rightarrow BG$, utilizando las trivializaciones locales anteriores obtenemos que

$$\iota(b_0, v) = (\Phi_\alpha^V)^{-1}(b_0, v) = [\Phi_\alpha^{-1}(b_0, 1), v]$$

y

$$j(b_0, x) = (\Phi_\alpha^X)^{-1}(b_0, x) = [\Phi_\alpha^{-1}(b_0, 1), x].$$

Por lo tanto

$$\pi_G \circ \iota(b_0, v) = \pi_G[\Phi_\alpha^{-1}(b_0, 1), v] = [\Phi_\alpha^{-1}(b_0, 1), \pi(v)]$$

y

$$j \circ \pi(b_0, v) = j(b_0, \pi(v)) = [\Phi_\alpha^{-1}(b_0, 1), \pi(v)]$$

de donde se sigue que el diagrama conmuta.

Corolario 2.4.10. *Sea $\pi: V \rightarrow X$ un haz vectorial G -equivariante, si $j: X \hookrightarrow X_G$ es la inclusión de la fibra, entonces hay un isomorfismo de haces vectoriales*

$$j^*(V_G) \cong V.$$

Demostración. Utilizamos la propiedad universal del pull-back de un haz. \square

Notemos que la definición de que una clase admita una extensión equivariante está relacionada con un pull-back de la inclusión. Es natural preguntarse ¿qué pasa con las clases características? En particular, dado que nuestro trabajo se concentra en el estudio de los haces vectoriales complejos, nos concentraremos en las clases de Chern.

Definición 2.4.11. Sea $\pi: V \rightarrow X$ un haz vectorial G -equivariante, la i -ésima clase de Chern G -equivariante c^G se define como

$$c_i^G(V) := c_i(V_G) \in H_G^{2i}(X).$$

Una consecuencia directa de la definición de las clases de Chern equivariantes es la siguiente: Dado que

$$j^*(V_G) \cong V$$

entonces podemos utilizar la naturalidad de las clases de Chern no equivariantes, por lo tanto

$$c(V) = c(j^*(V_G)) = j^*(c(V_G)) = j^*(c^G(V)).$$

Como consecuencia obtenemos que para los haces vectoriales G -equivariantes, la i -ésima clase de Chern

$$c_i: \text{Vect}_G^{\mathbb{C}}(X) \rightarrow H^{2i}(X)$$

siempre tiene como extensión equivariante a

$$c_i^G: \text{Vect}_G^{\mathbb{C}}(X) \rightarrow H_G^{2i}(X).$$

2.4.1. Isomorfismo de Thom equivariante

Para la cohomología no equivariante, mencionamos el teorema clásico enunciado en [37] para haces vectoriales reales.

Teorema 2.4.12. *Sea $\pi: V \rightarrow X$ un haz vectorial real. Existe una y solo una clase de cohomología $u \in H^n(D(V), S(V); \mathbb{Z}/2)$ tal que para cada fibra V_x , la restricción*

$$u \in H^n(D(V_x), S(V_x); \mathbb{Z}/2)$$

es la única clase diferente de cero. Además la correspondencia $h \mapsto h \cup u$ define un isomorfismo

$$H^k(V; \mathbb{Z}/2) \cong H^{k+n}(D(V), S(V); \mathbb{Z}/2) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

en donde $D(V), S(V)$ son el haz de disco y el haz esférico unitario con respecto a una métrica dada en V .

Notemos que este isomorfismo utiliza coeficientes en $\mathbb{Z}/2$. Si uno quiere hablar de un isomorfismo de Thom para coeficientes enteros se tiene que hablar de haces vectoriales orientados para garantizar la existencia de la clase u en cohomología.

La cohomología torcida $H^n(X; M)$ satisface axiomas semejantes a los axiomas de Eilenberg–Steenrod, esta teoría extiende los coeficientes de la cohomología singular de grupos abelianos a $\mathbb{Z}\pi_1(X, x_0)$ -módulos M (para simplificar denotaremos $\pi = \pi_1(X, x_0)$). Una motivación de utilizar cohomología torcida (también conocida como con coeficientes locales) es que existe una versión más general del isomorfismo de Thom para haces vectoriales no orientados que involucra coeficientes

locales. Sea X un CW-complejo, los $\mathbb{Z}\pi$ -módulos de la forma $M = \mathbb{Z}$, resultan estar clasificados por elementos de $H^1(X; \mathbb{Z}/2)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \{\text{Clases de iso. de } \mathbb{Z}\pi\text{-módulos de la forma } M = \mathbb{Z}\} \cong \text{Prin}_{\text{Aut}(\mathbb{Z})}(X) \\ & \cong [X, B\text{Aut}(\mathbb{Z})] \cong [X, K(\text{Aut}(\mathbb{Z}), 1)] \cong H^1(X; \text{Aut}(\mathbb{Z})) \cong H^1(X; \mathbb{Z}/2). \end{aligned}$$

Por lo tanto podríamos extender la definición de cohomología torcida por elementos de $H^1(X; \mathbb{Z}/2)$ siguiendo estas identificaciones, es decir, si $h \in H^1(X; \mathbb{Z}/2)$ corresponde con la clase de isomorfismo de un $\mathbb{Z}\pi$ -módulo $[M]$ de la forma $M = \mathbb{Z}$ entonces definimos

$$H^{h+n}(X) := H^n(X; M).$$

Toda la teoría de coeficientes locales se puede extender a la cohomología equivariante, esto se debe a que la definición de la cohomología equivariante es sobre la construcción de Borel, así que esta extensión es de manera natural. La principal diferencia es que ahora tomamos $\mathbb{Z}\pi$ -módulos con π el grupo fundamental de la construcción de Borel, de esta manera los torcimientos (módulos) están en correspondencia biyectiva con elementos de $H_G^1(X; \mathbb{Z}/2)$.

Sea G un grupo compacto de Lie, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.4.13. *La cohomología $H_G^1(X; \mathbb{Z}/2)$ clasifica a los haces vectoriales lineales reales G -equivariantes mediante $w_1^G(-)$, la primera clase de Stiefel-Whitney G -equivariante.*

Nota. Denotaremos por

$$\text{Lin}(X) \quad \text{y} \quad \text{Lin}_G(X)$$

al conjunto de clases de isomorfismo de haces lineales reales sobre X y al conjunto de clases de isomorfismo de haces lineales reales G -equivariantes respectivamente.

De esta manera, los haces reales lineales G -equivariantes $L \rightarrow X$ pueden ser considerados como torcimientos para la cohomología $H_G^n(X)$ haciendo las identificaciones

$$\begin{aligned} \text{Lin}_G(X) & \cong H_G^1(X; \mathbb{Z}/2) \\ & \cong \{\text{Clases de iso. de } \mathbb{Z}\pi\text{-módulos de la forma } M = \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

en donde $\text{Lin}_G(X)$ es el conjunto de clases de isomorfismo de haces lineales reales G -equivariantes sobre X . Específicamente a $L \in \text{Lin}_G(X)$ le corresponde $M = \mathbb{Z}$ con la acción dada por

$$w_1^G(L) \in H_G^1(X; \mathbb{Z}/2) \cong H^1(X_G; \mathbb{Z}/2) \cong \text{Hom}(\pi_1(X_G), \text{Aut}(\mathbb{Z})).$$

Así definimos

$$H_G^{L+n}(X) := H_G^{w_1^G(L)+n}(X).$$

En [24] se tiene la siguiente versión del isomorfismo de Thom:

Teorema 2.4.14. *Sea $\pi: V \rightarrow X$ un haz vectorial real G -equivariante de rango r y $L \rightarrow X$ un haz lineal real G -equivariante, entonces existe un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{Z}$*

$$H_G^{L+n}(X) \cong H_G^{\pi^*(L \otimes \det V) + n + r}(D(V), S(V))$$

en donde $D(V), S(V)$ son el haz de disco y el haz esférico unitario, respectivamente asociados a una métrica G -invariante dada en V .

Una prueba de este teorema en su versión general puede encontrarse en [19], así como también mencionamos [43].

2.5. K-teoría torcida

La K-teoría es una teoría de cohomología generalizada que satisface los axiomas de Eilenberg–Steenrod, sin embargo aquella que está más ligada al concepto de T-dualidad es su extensión, la K-teoría torcida. El isomorfismo de T-dualidad que discutiremos mas adelante nos proporciona un isomorfismo entre K-teorías torcidas de pares T-duales.

Empezamos mencionando una manera en la que podemos pensar a la K-teoría, la cual nos ayudará a comprender la definición de K-teoría torcida. Tenemos la siguiente definición:

Definición 2.5.1 (Operador de Fredholm). Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert complejo separable y de dimensión infinita. Un operador lineal continuo $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es un operador de Fredholm si los subespacios $\text{Ker}(T)$ y $\text{Coker}(T)$ son de dimensión finita. Denotaremos por $\text{Fred}(\mathcal{H})$ al espacio de los operadores de Fredholm sobre \mathcal{H} con la topología asociada a la norma de operadores.

De esta manera para un CW-complejo X , podemos pensar a la K-teoría como:

$$K^{-n}(X) = [X, \Omega^n \text{Fred}(\mathcal{H})], \quad \forall n \geq 0,$$

en donde $\Omega \text{Fred}(\mathcal{H})$ es el espacio de lazos asociado al espacio de los operadores de Fredholm. Como $\Omega^2 \text{Fred}(\mathcal{H}) \simeq \text{Fred}(\mathcal{H})$ entonces la definición se extiende a grados positivos. Para la K-teoría reducida tenemos una descripción parecida

$$\tilde{K}^{-n}(X) = [X, \Omega^n \text{Fred}(\mathcal{H})_*].$$

Con esta definición se extiende la definición a CW-pares (X, A) haciendo

$$K^{-n}(X, A) = \tilde{K}^{-n}(X/A).$$

Cuando se habla de K-teoría torcida, uno piensa como referencia a [7], sin embargo en el trabajo de Carstens [18] podemos observar un acercamiento más detallado con relación a la T-dualidad.

Antes de pasar a la definición de K-teoría torcida, recordemos que el espacio de operadores unitarios proyectivos es $PU(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/U(1)$, en donde $U(\mathcal{H})$ es el espacio de los operadores unitarios de un espacio de Hilbert \mathcal{H} complejo separable y de dimensión infinita. Además tenemos que

$$PU(\mathcal{H}) \text{ es un } K(\mathbb{Z}, 2).$$

En efecto, sabemos que $U(1) = S^1$ es un modelo de un $K(\mathbb{Z}, 1)$. Por el teorema de Kuiper [30] podemos afirmar que $U(\mathcal{H})$ es contráctil. Consideremos la acción

$$U(1) \times U(\mathcal{H}) \rightarrow U(\mathcal{H})$$

dada por la multiplicación compleja de operadores lineales continuos, notemos que para $z \in S^1$ y $T \in U(\mathcal{H})$ se tiene que

$$(zT)^*(zT) = (z\bar{z})T^*T = 1$$

y también

$$(zT)(zT)^* = (z\bar{z})TT^* = 1$$

así que la acción está bien definida. Además esta acción claramente es libre. Por lo tanto podemos concluir que $PU(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/U(1)$ es un $BU(1) = K(\mathbb{Z}, 2)$.

Los torcimientos en la K-teoría torcida están clasificados por elementos de $H^3(X; \mathbb{Z})$. A este elemento es posible asociarle un haz $PU(\mathcal{H})$ -principal (en donde \mathcal{H} es un espacio de Hilbert complejo separable y de dimensión infinita), utilizando las siguientes biyecciones:

$$H^3(X; \mathbb{Z}) \cong [X, K(\mathbb{Z}, 3)] \cong [X, BK(\mathbb{Z}, 2)] \cong [X, BPU(\mathcal{H})] \cong \text{Prin}_{PU(\mathcal{H})}(X).$$

Definimos una acción

$$U(\mathcal{H}) \times \text{Fred}(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Fred}(\mathcal{H})$$

dada por

$$g \cdot T = g \circ T \circ g^{-1}.$$

Como g es un isomorfismo, esta acción está bien definida. Ahora si $z \in U(1)$ entonces

$$(zg) \cdot T = (zg) \circ T \circ (zg)^{-1} = g \circ T \circ g^{-1},$$

por lo tanto tenemos una acción de $PU(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/U(1)$ sobre $\text{Fred}(\mathcal{H})$. La anterior acción también induce una acción en $\Omega^n \text{Fred}(\mathcal{H})$. Sea P un haz $PU(\mathcal{H})$ -principal, consideremos el siguiente pullback tomando la función clasificante f_P del haz $PU(\mathcal{H})$ -principal:

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & EPU(\mathcal{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f_P} & BPU(\mathcal{H}). \end{array}$$

Podemos tomar el haz asociado para construir nuevos haces, de manera que el diagrama anterior se convierte en el diagrama

$$\begin{array}{ccc} P \times_{PU(\mathcal{H})} \Omega^n \text{Fred}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & EPU(\mathcal{H}) \times_{PU(\mathcal{H})} \Omega^n \text{Fred}(\mathcal{H}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F_P} & BPU(\mathcal{H}). \end{array}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \text{Fred}^{(0)}(P) &:= P \times_{PU(\mathcal{H})} \text{Fred}(\mathcal{H}) \rightarrow X \\ \text{Fred}^{(-1)}(P) &:= P \times_{PU(\mathcal{H})} \Omega \text{Fred}(\mathcal{H}) \rightarrow X \end{aligned}$$

por lo que tenemos la siguiente definición:

Definición 2.5.2. Definimos los grupos de K-teoría torcida de X con torcimiento P un haz $PU(\mathcal{H})$ -principal como

$$\begin{aligned} K^0(X, P) &:= \Gamma[X, \text{Fred}^{(0)}(P)] \\ K^{-1}(X, P) &:= \Gamma[X, \text{Fred}^{(-1)}(P)], \end{aligned}$$

en donde con $\Gamma[-, -]$ nos referimos al conjunto de clases de homotopía de secciones del haz.

Los demás grupos de K-teoría torcida están definidos gracias a que se tiene el siguiente resultado de [6]:

$$\Omega^2 \text{Fred}(\mathcal{H}) \simeq_{PU(\mathcal{H})} \text{Fred}(\mathcal{H}),$$

es decir

$$K^{-n}(X, P) = \Gamma[X, P \times_{PU(\mathcal{H})} \Omega^n \text{Fred}(\mathcal{H})] \cong \Gamma[X, P \times_{PU(\mathcal{H})} \Omega^k \text{Fred}(\mathcal{H})]$$

en donde

$$k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Algunas de las propiedades importantes que satisface la K-teoría torcida [7], [23] son las siguientes:

Teorema 2.5.3. *La K-teoría torcida satisface:*

1. Si P es el haz $PU(\mathcal{H})$ -principal trivial entonces $K^\bullet(X, P) \cong K^\bullet(X)$.
2. $K^\bullet(X, P)$ es un modulo sobre $K^\bullet(X)$.

3. Existe un producto cup

$$K^p(X, P) \otimes K^q(X, P') \rightarrow K^{p+q}(X, P \otimes P').$$

4. Si $f: Y \rightarrow X$ es un mapeo continuo y P es un haz $PU(\mathcal{H})$ -principal sobre X , entonces tenemos el pull-back

$$f^*: K^\bullet(X, P) \rightarrow K^\bullet(Y, f^*P).$$

5. (Mapeo de Gysin) Sea $f: Y \rightarrow X$ un mapeo diferenciable entre variedades diferenciables K -orientado y P un haz $PU(\mathcal{H})$ -principal sobre X entonces existe un homomorfismo

$$f_!: K^\bullet(Y, f^*P) \rightarrow K^{\bullet+d}(X, P)$$

con $d = \dim(Y) - \dim(X)$.

6. Un isomorfismo entre haces $PU(\mathcal{H})$ -principales $u: P \rightarrow P'$ induce un isomorfismo $u_*: K^0(X, P) \rightarrow K^0(X, P')$.

En una sección posterior hablaremos del mapeo push-forward para la K -teoría no torcida. Para la definición del pushforward en la K -teoría torcida mencionamos como referencia el trabajo de Carey y Wang [17].

2.5.1. El caso equivariante

La K -teoría torcida equivariante se define de una manera parecida a la no equivariante, sin embargo existen ciertas modificaciones que comentaremos a continuación, para esta sección nos basamos en [12]. Empezamos con la siguiente definición:

Definición 2.5.4. Se dice que un G -espacio X es propio si la función

$$G \times X \rightarrow X \times X \quad (g, x) \mapsto (gx, x)$$

es una función propia entre espacios topológicos, es decir, esta función satisface que las preimágenes de compactos son compactos. Además requerimos que la función $G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx$ sea cerrada.

Nos restringimos a G -espacios izquierdos propios X en donde X es una variedad diferenciable de manera que el grupo compacto de Lie G actúa diferenciablemente.

Definición 2.5.5. Un haz $PU(\mathcal{H})$ -principal G -equivariante $P \rightarrow X$ se dice que es estable si $\forall x \in X$ existe una G -vecindad U de x y un subespacio G_x -invariante S que es G_x -contráctil de manera que U es homeomorfa de manera equivariante a $S \times_{G_x} G$ con la acción

$$G_x \times (S \times G) \rightarrow S \times G, \quad h \cdot (s, g) = (hs, gh^{-1}),$$

junto con una trivialización local

$$\Phi: P|_U \xrightarrow{\cong} (PU(\mathcal{H}) \times S) \times_{G_x} G$$

en donde la acción del grupo de isotropía

$$G_x \times [(PU(\mathcal{H}) \times S) \times G] \rightarrow (PU(\mathcal{H}) \times U) \times G$$

está dada por

$$h \cdot [(T, s), g] = [(f_x(h)T, hs), gh^{-1}]$$

con $f_x: G_x \rightarrow PU(\mathcal{H})$ un homomorfismo estable fijo.

Para un haz $PU(\mathcal{H})$ -principal G -equivariante estable, dotamos al haz asociado

$$\text{Fred}^{(-n)}(P) = P \times_{PU(\mathcal{H})} \Omega^n \text{Fred}(\mathcal{H})$$

con la G -acción dada por

$$g \cdot [e, T] := [ge, T].$$

La prueba de la periodicidad de Bott se adapta a cuando un grupo de Lie compacto G actúa sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} que contiene cada representación irreducible de G un número infinito de veces. Tomando operadores de Fredholm equivariantes $\text{Fred}(\mathcal{H})^K$ obtenemos la equivalencia homotópica

$$\Omega^2 \text{Fred}(\mathcal{H})^K \simeq_{PU(\mathcal{H})} \text{Fred}(\mathcal{H})^K$$

para todo subgrupo cerrado K de G . Así que una vez más se cumple la periodicidad de Bott y se define la K -teoría torcida G -equivariante del G -espacio X con torcimientos los haces $PU(\mathcal{H})$ -principales G -equivariantes estables sobre X como

$$K^{-n}(X, P) := \Gamma_G[X, \text{Fred}^{(-n)}(P)]_G,$$

es decir, lo definimos como *clases de homotopía G -equivariantes de secciones G -equivariantes* del haz $\text{Fred}^{(-n)}(P)$.

Otras referencias sobre la K -teoría torcida G -equivariante son [11], [1] así como también el artículo clásico de Atiyah y Segal [7]. Una clasificación de los haces $PU(\mathcal{H})$ -principales estables sobre X por elementos de $H_G^3(X; \mathbb{Z})$ podemos encontrarla en [34], [11] y [7].

A continuación enunciamos las propiedades importantes que satisface la K -teoría torcida G -equivariante

Teorema 2.5.6. *La K-teoría G-equivariante torcida consiste de funtores contravariantes $K_G^n(-, -, -)$ en la categoría de tripletas (X, A, τ) de G-espacios y torcimientos $T_G(X)$ tal que se satisfacen las siguientes propiedades:*

- (Axioma de homotopía) *Para una homotopía $(H, h): (X \times I, pr_1^* \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ tenemos que $(H_0, h_0)^* = (H_1, h_1)^*$, es decir, se tiene un diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} K_G^n(Y, \tau_Y) & \xrightarrow{H_0^*} & K_G^n(X, H_0^*(\tau_Y)) \\ H_1^* \downarrow & & \downarrow h_0^* \\ K_G^n(X, H_1^*(\tau_Y)) & \xrightarrow{h_1^*} & K_G^n(X, \tau_X). \end{array}$$

- *Existe una sucesión exacta larga natural*

$$\cdots \rightarrow K_G^n(X, A, \tau) \rightarrow K_G^n(X, \tau) \rightarrow K_G^n(A, \tau) \rightarrow K_G^{n+1}(X, A, \tau) \rightarrow \cdots$$

- *Si $Z \subset A$ es un subespacio invariante tal que $\overline{Z} \subset \text{Int}(A)$ entonces la restricción*

$$K_G^n(X, A, \tau) \rightarrow K_G^n(X - Z, A - Z, \tau)$$

es un isomorfismo.

- *Si $(X, A, \tau) = \coprod_{\alpha \in J} (X_\alpha, A_\alpha, \tau_\alpha)$ entonces el mapeo natural*

$$K_G^n(X, A, \tau) = \prod_{\alpha \in J} K_G^n(X_\alpha, A_\alpha, \tau_\alpha)$$

es un isomorfismo.

Una demostración de estas propiedades la podemos encontrar en [23].

2.5.2. Isomorfismo de Thom

En el caso de la K-teoría equivariante torcida también podemos hablar del isomorfismo de Thom, sin embargo a diferencia del que uno tiene para cohomología equivariante con coeficientes locales, el isomorfismo de Thom en K-teoría equivariante torcida posee unas ligeras modificaciones. Esto se debe a que la K-teoría equivariante torcida tiene una construcción distinta a la cohomología equivariante, no únicamente estamos considerando la K-teoría sobre la construcción de Borel, sino que estamos tomando la construcción de Grothendieck asociada a las clases de isomorfismo de haces equivariantes.

En [10] podemos encontrar una versión del isomorfismo de Thom para la K-teoría equivariante torcida, sin embargo como nosotros requerimos que aparezcan

el haz esférico unitario y el haz de discos, entonces como referencia mencionamos [23], en donde mencionan la existencia del isomorfismo de Thom para teorías de cohomología en general y específicamente la K–teoría para grupoides. Para más detalles de lo mencionado en este artículo de Freed, Hopkins y Teleman tenemos la primera parte de la tesis [47]. Juntando estos dos trabajos, tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.5.7. *Sea $\pi: V \rightarrow X$ un haz vectorial real G –equivariante de rango r y $\tau \in T_G(X)$ un torcimiento, entonces tenemos un isomorfismo para cada $n \in \mathbb{Z}$*

$$K_G^{\tau+n}(X) \cong K_{S^1}^{\pi^*(\tau+\rho(V))+n+r}(D(V), S(V))$$

en donde $D(V), S(V)$ son el haz de discos y el haz esférico unitario respectivamente asociado a una métrica G –invariante dada en V y $\rho(V)$ es un torcimiento cuya clase de isomorfismo está clasificada por

$$(w_1^G(V), W_3^G(V)) \in H_G^1(X; \mathbb{Z}/2) \times H_G^3(X; \mathbb{Z}).$$

2.5.3. La sucesión de Gysin y los mapeos push–forward

Definición 2.5.8. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclidiano, el álgebra de Clifford de V está definido como

$$Cl(V) := T(V)/I(V)$$

en donde $T(V) = \sum_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ es el álgebra tensorial de V e $I(V)$ es el ideal generado por $v \otimes v + \|v\|^2, \forall v \in V$. Definimos el álgebra de Clifford compleja de V como

$$\mathbb{C}l := Cl(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Definición 2.5.9. Sea $V \rightarrow X$ un haz vectorial real. Un espinor para V es una tripleta (q, S_V, c) , en donde

1. q es una métrica en V .
2. $S_V \rightarrow X$ es un haz vectorial complejo hermitiano.
3. $c: V \rightarrow \text{End}(S_V)$ es un mapeo de haces vectoriales \mathbb{R} –lineal tal que
 - a) $c(\xi) = -c(\xi)^*$ y $c(\xi)^2 = -q(v, v)^2 \cdot 1, \forall \xi \in V$,
 - b) $(S_V)_x$ es un $\mathbb{C}l(V_x, q_x)$ –módulo irreducible, $\forall x \in X$
 - c) Si V es de rango par, entonces S_V es \mathbb{Z}_2 –graduado y $c(\xi)$ es un operador impar para toda $\xi \in V$, es decir, $S_V = S_V^0 \oplus S_V^1$ y

$$c(\xi)(S_V^0) \subseteq S_V^1 \text{ y } c(\xi)(S_V^1) \subseteq S_V^0 \quad \forall \xi \in V.$$

Para comparar espinores introducimos la noción de concordancia:

Definición 2.5.10. Supongamos que $S_0 = (q_0, S_0, c_0)$ y $S_1 = (q_1, S_1, c_1)$ son espinores del haz vectorial $V \rightarrow X$. Decimos que S_0 y S_1 son concordantes si existe un haz vectorial $W \rightarrow X \times I$ equipado con un espinor S tal que

$$W|_{X \times \{0\}} \cong V \text{ con } S|_{X \times \{0\}} \cong S_0 \text{ y } W|_{X \times \{1\}} \cong V \text{ con } S|_{X \times \{1\}} \cong S_1.$$

De esta manera definimos

Definición 2.5.11 (K-orientación). Sea $V \rightarrow X$ un haz vectorial real. Una K-orientación para V es una elección de una clase de concordancia de espinores sobre V . Una variedad diferenciable se dice K-orientable si TM admite una K-orientación.

Ejemplo: Una estructura casi compleja en un haz vectorial real $V \rightarrow X$ es un endomorfismo $J: V \rightarrow V$ tal que

$$J^2 = -1.$$

Usando J podemos definir la multiplicación escalar compleja en las fibras de V como

$$(x + iy) \cdot \xi := x\xi + yJ(\xi) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \xi \in V.$$

Este tipo de haces están canónicamente K-orientados, tomamos

$$S_V = \Lambda_{\mathbb{C}}^* V$$

el álgebra exterior compleja de V y tomamos $c: V \rightarrow \text{End}(S_V)$ como

$$c(\xi) = \lambda_{\xi} - \lambda_{\xi}^*$$

en donde

$$\lambda_{\xi}(\omega) = \xi \wedge \omega$$

$$\lambda_{\xi}^*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} q(\omega_j, \xi) \omega_1 \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_j \wedge \cdots \wedge \omega_n.$$

Teorema 2.5.12 (Lema 2 de 3 para K-orientaciones). *Supongamos que*

$$0 \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow W \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de haces vectoriales sobre X . Si cualesquiera dos de los haces son K-orientados, entonces el tercero recibe una K-orientación canónica.

Demostración. Dado que cualquier sucesión exacta corta de haces vectoriales escinde, podemos suponer que $U = V \oplus W$. También podemos asumir que todos los haces son de rango par ya que existe una correspondencia biyectiva entre las K-orientaciones de un haz vectorial V y las K-orientaciones de $V \oplus (X \times \mathbb{R})$, de esta manera los espinores son $\mathbb{Z}/2$ -graduados.

Si (S_V, c_V) y (S_W, c_W) son K-orientaciones de V y W respectivamente entonces podemos dotar a U por la K-orientación (S_U, c_U) dada por

$$S_V \hat{\otimes} S_W,$$

en donde $\hat{\otimes}$ es el producto tensorial $\mathbb{Z}/2$ -graduado y $c_U: V \oplus W \rightarrow \text{End}(S_U)$ está dado por

$$c_U(\xi, \eta) = c_V(\xi) \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} c_W(\eta).$$

Ahora bien, supongamos que (S_U, c_U) y (S_W, c_W) son K-orientaciones de U y W respectivamente. Denotemos por $\text{Hom}_{\text{Cl}(W)}^g(S_W, S_U)$ al haz de mapeos entre los haces complejos que conmutan de manera graduada con respecto a la acción de $\text{Cl}(W)$. El haz $\text{Cl}(W)$ actúa sobre $\text{Hom}_{\text{Cl}(W)}^g(S_W, S_U)$ por composición, y dado que el mapeo de evaluación

$$\text{Hom}_{\text{Cl}(W)}^g(S_W, S_U) \hat{\otimes} S_W \rightarrow S_{V \oplus W}$$

es una equivalencia cuando S_W es irreducible, se sigue que

$$S_V := \text{Hom}_{\text{Cl}(W)}^g(S_W, S_U)$$

es un espinor para V .

A continuación mostraremos que dos diferentes elecciones para la escisión $W \rightarrow U$ nos dan lugar a la misma K-orientación. Si T y T' son dos escisiones $W \rightarrow U$, entonces ambas inducen un automorfismo de $V \oplus W$ dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & T + T' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que tenemos el camino $\alpha: I \rightarrow SO(n)$ de la matriz anterior a la matriz identidad dado por

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 & t(T + T') \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

esto prueba que las correspondientes K-orientaciones son concordantes. \square

Sea $\pi: V \rightarrow X$ un haz vectorial K-orientado tal que $\dim(V) = d$. Considerando el haz trivial de dimensión d sobre X , claramente tenemos la sucesión exacta corta de haces vectoriales

$$0 \rightarrow V \rightarrow V \oplus (X \times \mathbb{R}^d) \rightarrow X \times \mathbb{R}^d \rightarrow 0.$$

Dado que los haces triviales son K -orientados, entonces por el Lema 2 de 3 para K -orientaciones, se sigue que el haz $V \oplus (X \times \mathbb{R}^d)$ es un haz K -orientado sobre X . Recordemos que la suma directa de haces la podemos pensar como el siguiente pullback

$$\begin{array}{ccc} V \oplus (X \times \mathbb{R}^d) & \longrightarrow & X \times \mathbb{R}^d \\ q \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{\pi} & X. \end{array}$$

Como $V \oplus (X \times \mathbb{R}^d)$ es el pullback de un haz trivial entonces es un haz trivial sobre V , es decir,

$$V \oplus (X \times \mathbb{R}^d) \cong V \times \mathbb{R}^d.$$

Sea $S_{V \times \mathbb{R}^d}$ el haz espinor, como la dimensión del haz es $2d$ entonces

$$S_{V \times \mathbb{R}^d} = S_{V \times \mathbb{R}^d}^0 \oplus S_{V \times \mathbb{R}^d}^1$$

es $\mathbb{Z}/2$ -graduado. Tenemos un complejo sobre $V \times \mathbb{R}^d$ dado por

$$\lambda^V: 0 \rightarrow q^* \pi^* S_{V \times \mathbb{R}^d}^0 \xrightarrow{c} q^* \pi^* S_{V \times \mathbb{R}^d}^1 \rightarrow 0.$$

Como

$$q^* \pi^*(S_{V \times \mathbb{R}^d}^0) \subset (V \times \mathbb{R}^d) \times S_{V \times \mathbb{R}^d}^0$$

entonces c está dado por

$$c(v, \eta) = (v, c_{V \times \mathbb{R}^d}(\eta)(v)).$$

Uno puede mostrar que el soporte de este complejo es exactamente la imagen de la sección cero de $\pi: V \rightarrow X$ que es homeomorfa a X . De esta manera λ^V induce una clase en $K^0(V \times \mathbb{R}^d) \cong K^{-\dim(V)}(V)$ cuando X es compacto. Si a $\eta \in K^0(X)$ le asociamos un complejo con soporte compacto sobre X , entonces el producto $\pi^*(\eta) \otimes \lambda^V$ tiene soporte compacto y por lo tanto

$$\pi^*(\eta) \otimes \lambda^V \in K^{-\dim(V)}(X)$$

Utilizando el producto en la K -teoría tenemos definido un mapeo

$$\lambda_*^V: K^*(X) \rightarrow K^{*- \dim(V)}(V).$$

Teorema 2.5.13 (Isomorfismo de Thom). *Para cualquier haz vectorial K -orientado V sobre X una variedad diferenciable, el homomorfismo*

$$\lambda_*^V: K^*(X) \rightarrow K^{*- \dim(V)}(V)$$

es un isomorfismo.

Una vez obtenido el isomorfismo de Thom, es posible definir lo que se conoce como la sucesión de Gysin. Antes de ver el resultado principal demostraremos el siguiente teorema

Teorema 2.5.14. *Sea $\pi: V \rightarrow X$ un haz vectorial complejo S^1 -equivariante, entonces el haz de disco unitario $p: D(V) \rightarrow X$ es una equivalencia homotópica.*

Nota. En ocasiones, denotaremos

$$K_G^{\tau+n}(X) := K_G^n(X, \tau) \quad \tau \in T_G(X).$$

Inspirados en el trabajo de Milnor y Stasheff, [37] obtenemos el siguiente teorema

Teorema 2.5.15. (Sucesión de Gysin) *Sea $\pi: V \rightarrow X$ un haz vectorial complejo G -equivariante de rango r y $\tau \in T_G(X)$ un torcimiento, entonces tenemos asociada una sucesión exacta larga en K -teoría G -equivariante:*

$$\rightarrow K_G^{\tau-\rho(V)+n-2r}(X) \rightarrow K_G^{\tau+n}(X) \xrightarrow{p^*} K_G^{\pi^*\tau+n}(S(V)) \xrightarrow{p!} K_G^{\tau-\rho(V)+n-2r+1}(X) \rightarrow$$

Definición 2.5.16. Dado $\pi: V \rightarrow X$ un haz vectorial complejo, definimos el push-forward del mapeo $p: S(V) \rightarrow X$ como el mapeo $p!$ que aparece en la sucesión de Gysin.

Capítulo 3

T–dualidad

Existen al menos dos modelos de T–dualidad en la literatura, en primer lugar mencionamos el trabajo de Bouwknegt, Evslin y Mathai [14] en donde se define T–dualidad en términos de la cohomología de De Rham. Por otro lado mencionamos el trabajo de Bunke y Schick [16] con un punto de vista más topológico, el cual será el enfoque de T–dualidad en este trabajo.

3.1. Pares T–duales

Empezaremos definiendo la noción de pares.

Definición 3.1.1. Un par (E, h) sobre un espacio topológico B consiste de un haz S^1 –principal $\pi: E \rightarrow B$ y un elemento $h \in H^3(E; \mathbb{Z})$.

A continuación definimos la noción de T–dualidad para pares

Definición 3.1.2 (Pares T–duales). Decimos que los pares (E, h) y (\hat{E}, \hat{h}) sobre B son T–duales si

$$c_1(E) = \hat{\pi}_! \hat{h}, \quad c_1(\hat{E}) = \pi_! h, \quad c_1(E) \cup c_1(\hat{E}) = 0 \quad \text{y} \quad p^* h = \hat{p}^* \hat{h},$$

en donde

$$\begin{array}{ccc}
 & E \times_B \hat{E} & \\
 p \swarrow & & \searrow \hat{p} \\
 E & & \hat{E} \\
 \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\
 & B &
 \end{array}$$

y

$$E \times_B \hat{E} := \{(x, y) \in E \times \hat{E} \mid \pi(x) = \hat{\pi}(y)\}$$

Ahora bien, consideremos dos pares (E, h) , (\hat{E}, \hat{h}) sobre B . Podemos construir los haces asociados

$$E \times_{S^1} \mathbb{C} \quad \text{y} \quad \hat{E} \times_{S^1} \mathbb{C}$$

y así tenemos dos haces vectoriales lineales complejos

$$\pi': L := E \times_{S^1} \mathbb{C} \rightarrow B \quad \text{y} \quad \hat{\pi}': \hat{L} := \hat{E} \times_{S^1} \mathbb{C} \rightarrow B,$$

con los que podemos formar un nuevo haz vectorial

$$V := L \oplus \hat{L} = (E \times_{S^1} \mathbb{C}) \oplus (\hat{E} \times_{S^1} \mathbb{C}).$$

Consideremos las métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{L}}$ sobre los haces vectoriales L y \hat{L} respectivamente inducidas por las trivializaciones locales. Nos fijaremos en la métrica sobre V definida de la siguiente manera:

$$\langle l + \hat{l}, l' + \hat{l}' \rangle_V := \langle l, l' \rangle_L + \langle \hat{l}, \hat{l}' \rangle_{\hat{L}}.$$

De esta manera podemos pensar en el haz esférico $S(V)$ cuyas fibras consisten de esferas de dimensión tres, denotaremos este haz por $\pi_S: S(V) \rightarrow B$. En particular, tenemos un pushforward para cohomología

$$(\pi_S)_!: H^3(S(V); \mathbb{Z}) \rightarrow H^0(B; \mathbb{Z}).$$

Definición 3.1.3. Una clase $\text{Th} \in H^3(S(V); \mathbb{Z})$ se llama clase de Thom si satisface la propiedad

$$(\pi_S)_! \text{Th} = 1.$$

Consideremos ahora las inclusiones $i: E \rightarrow S(V)$ y $\hat{i}: \hat{E} \rightarrow S(V)$ de los haces S^1 -principales en el haz S^3 -principal. Una expresión para estas inclusiones está dada por

$$i(e) = ([e, 1], [\hat{e}_0, 0]) \quad \text{para algún } \hat{e}_0 \in \hat{E}$$

y

$$\hat{i}(e) = ([e_0, 0], [\hat{e}, 1]) \quad \text{para algún } e_0 \in E.$$

Notemos que i no depende de la elección de \hat{e}_0 ya que como la acción derecha en \hat{E} es transitiva en las fibras, si escogemos otro \hat{e}'_0 entonces existe $u \in S^1$ tal que

$$\hat{e}'_0 = \hat{e}_0 \cdot u$$

por lo tanto

$$[\hat{e}'_0, 0] = [\hat{e}_0 \cdot u, 0] = [\hat{e}_0, u \cdot 0] = [\hat{e}_0, 0].$$

Análogamente la expresión de \hat{i} no depende de la elección de e_0 . Ahora bien, nos gustaría ver que $i(e) \in S(V)$, en efecto, sea $\{(U_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ un atlas para el haz

$\pi: E \rightarrow B$ y sea $\{(V_\alpha, \Psi_\alpha)\}$ un atlas para el haz $\hat{\pi}: \hat{E} \rightarrow B$, así que existe una carta (V_α, Ψ_α) de manera que $\hat{e}_0 \in \hat{\pi}^{-1}(V_\alpha)$, por lo tanto la expresión local de i está dada por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & V \\ \Phi_\alpha \downarrow & & \downarrow \Phi'_\alpha \oplus \Psi'_\alpha \\ (U_\alpha \cap V_\alpha) \times S^1 & \xrightarrow{\bar{i}} & (U_\alpha \cap V_\alpha) \times S^3 \end{array}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{i}(b, z) &= ((\Phi'_\alpha \oplus \Psi'_\alpha) \iota \Phi_\alpha^{-1})(b, z) = (\Phi'_\alpha \oplus \Psi'_\alpha)([\Phi_\alpha^{-1}(b, z), 1], [\hat{e}_0, 0]) \\ &= (b, z \cdot 1, \text{pr}_2 \Psi_\alpha(\hat{e}_0) \cdot 0) \\ &= (b, z, 0). \end{aligned}$$

De manera análoga vemos que

$$\hat{\bar{i}}(b, z) = (b, 0, z).$$

Como primer resultado, tenemos el siguiente lema

Lema 3.1.4. *El siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopía*

$$\begin{array}{ccccc} & & E \times_B \hat{E} & & \\ & p \swarrow & & \searrow \hat{p} & \\ E & \xrightarrow{i} & S(V) & \xleftarrow{\hat{i}} & \hat{E} \end{array}$$

es decir, $i \circ p \simeq \hat{i} \circ \hat{p}$.

Demostración. Definimos el mapeo $H: (E \times_B \hat{E}) \times I \rightarrow S(V)$ dado por

$$H(e, \hat{e}, t) = \left(\left[e, \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right], \left[\hat{e}, \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] \right)$$

el cual es continuo por ser composición de funciones continuas. Esta homotopía satisface

$$H(e, \hat{e}, 0) = ([e, 1], [\hat{e}, 0]) = i \circ p(e, \hat{e})$$

y

$$H(e, \hat{e}, 1) = ([e, 0], [\hat{e}, 1]) = \hat{i} \circ \hat{p}(e, \hat{e}) \quad \square$$

La inclusión i induce dos secciones s, \hat{s} sobre el haz proyectivo $\pi_P: P(V) \rightarrow B$. La sección s está dada por

$$s(b) = [[e, 1], [\hat{e}_0, 0]] \quad e \in \pi^{-1}(b)$$

en donde escogemos cualquier elemento $e \in \pi^{-1}(b)$. La elección no depende del elemento de la fibra ya que si $e' \in \pi^{-1}(b)$ entonces como $\pi: E \rightarrow B$ es un haz S^1 -principal, la acción derecha en e es transitiva en cada fibra, de donde obtenemos que $e' = eu$ con $u \in S^1$, así que

$$[[e', 1], [\hat{e}_0, 0]] = [[eu, 1], [\hat{e}_0, 0]] = [[(e, 1), [\hat{e}_0, 0]] \cdot u] = [[e, 1], [\hat{e}_0, 0]].$$

De igual forma \hat{i} induce una sección

$$\hat{s}(b) = [[e_0, 0], [\hat{e}, 1]] \quad \hat{e} \in \pi^{-1}(b).$$

A partir de estos mapeos es claro que obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\iota} & S(V) & \xleftarrow{\hat{i}} & \hat{E} \\ \pi \downarrow & & \downarrow r & & \downarrow \hat{\pi} \\ B & \xrightarrow{s} & P(V) & \xleftarrow{\hat{s}} & B \end{array}$$

en donde además tenemos que las columnas son haces S^1 -principales.

Del teorema de Leray–Hirsch en el primer capítulo vimos que $H^*(P(V))$ es un $H^*(X)$ -módulo, aún más, utilizando la definición de las clases de Chern de Grothendieck (ver Apéndice A) obtenemos que la clase de Chern $\tilde{c} := c_1(S(V)) = c_1(\Gamma) \in H^2(P(V))$ (en donde $\Gamma \rightarrow P(V)$ es el haz tautológico) satisface

$$-(-\tilde{c})^2 = c_1(V) \cdot (-\tilde{c}) + c_2(V)$$

de donde obtenemos

$$0 = \tilde{c}^2 - c_1(V)\tilde{c} + c_2(V).$$

Gracias al diagrama conmutativo tenemos las siguientes igualdades

$$s^*(\tilde{c}) = c_1(E) \quad \text{y} \quad \hat{s}^*(\tilde{c}) = c_1(\hat{E}).$$

Finalmente, el teorema de Leray–Hirsch nos facilita el siguiente cálculo

$$(\pi_P)_!(\tilde{c}) = (\pi_P)_!(1 \otimes c_1(\gamma)) = \langle c_1(\gamma), [\mathbb{C}P^1] \rangle = h(c_1(\gamma))([\mathbb{C}P^1]) = -1$$

en donde $h: H^2(\mathbb{C}P^1) \rightarrow \text{Hom}(H_2(\mathbb{C}P^1), \mathbb{Z})$ es el mapeo del teorema de coeficientes universales para cohomología, $\gamma \rightarrow B$ es el haz tautológico sobre la fibra y $[\mathbb{C}P^1]$ es la clase fundamental de orientación de $\mathbb{C}P^1$. La última igualdad se debe a que estamos utilizando la orientación utilizada en [37].

Lema 3.1.5. Sean $\pi: E \rightarrow B$ y $\hat{\pi}: \hat{E} \rightarrow B$ haces S^1 -principales sobre B tales que $c_1(E) \cup c_1(\hat{E}) = 0$, consideremos $V := (E \times_{S^1} \mathbb{C}) \oplus (\hat{E} \times_{S^1} \mathbb{C}) \rightarrow B$ el haz vectorial como antes

a) Existe una clase $Th \in H^3(S(V))$ tal que

$$r_!(Th) = -\tilde{c} + \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E}))$$

b) Si Th y Th' son clases que satisfacen la condición del inciso a), entonces $Th' - Th = \pi_S^*\eta$ para algún $\eta \in H^3(B)$.

c) Si Th satisface a), entonces Th es una clase de Thom tal que

$$\pi_!(i^*Th) = c_1(\hat{E}), \quad \hat{\pi}_!(\hat{i}^*Th) = c_1(E) \quad \text{y} \quad p^*i^*(Th) = \hat{p}^*\hat{i}^*(Th)$$

Demostración. Para el inciso a), primero utilicemos la propiedad de la clase total de Chern con respecto a suma de haces

$$c(V) = c(E \oplus \hat{E}) = c(E) \cup c(\hat{E})$$

lo cual nos dice que

$$1 + c_1(V) + c_2(V) = (1 + c_1(E))(1 + c_1(\hat{E})) = 1 + c_1(E) + c_1(\hat{E}) + c_1(E) \cup c_1(\hat{E}).$$

Por lo tanto

$$c_1(V) = c_1(E) + c_1(\hat{E}) \quad \text{y} \quad c_2(V) = c_1(E) \cup c_1(\hat{E}).$$

Por hipótesis tenemos que $c_2(V) = c_1(E) \cup c_1(\hat{E}) = 0$, así que se tiene la igualdad

$$0 = \tilde{c}^2 - c_1(V)\tilde{c} + c_2(V) = \tilde{c}^2 - c_1(V)\tilde{c} = \tilde{c}^2 - (c_1(E) + c_1(\hat{E}))\tilde{c}.$$

Utilizando la estructura de $H^*(X)$ -módulo de $H^*(P(V))$ se tiene que

$$\tilde{c}(\tilde{c} - \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E}))) = \tilde{c}^2 - \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E}))\tilde{c} = 0$$

así que por la sucesión de Gysin para el haz $r: S(V) \rightarrow P(V)$ existe $Th \in H^3(S(V))$ tal que

$$r_!(Th) = -\tilde{c} + \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E})).$$

Para el inciso b), supongamos que $Th' \in H^3(S(V))$ satisface

$$r_!(Th') = -\tilde{c} + \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E}))$$

entonces

$$r_!(Th' - Th) = 0.$$

Por lo tanto, una vez más de la sucesión de Gysin para $r: S(V) \rightarrow P(V)$ existe $\tilde{\eta} \in H^3(P(V))$ con

$$\text{Th}' - \text{Th} = r^* \tilde{\eta}$$

pero como $H^*(P(V))$ es un módulo libre, entonces

$$\tilde{\eta} = \pi_P^*(\eta) + \pi_P^*(b) \cup \tilde{c}, \quad \eta \in H^3(B), \quad b \in H^1(B).$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \pi_S^* \eta &= r^* \pi_P^* \eta \\ &= r^*(\tilde{\eta} - \pi_P^*(b) \cup \tilde{c}) \\ &= r^*(\tilde{\eta}) - r^*(\pi_P^*(b)) \cup r^*(\tilde{c}) \\ &= r^*(\tilde{\eta}) = \text{Th}' - \text{Th} \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado que $r^*(\tilde{c}) = 0$ ya que $r^*(c_1(S(V))) = c_1(r^*S(V))$ y $r^*S(V) \cong S(V) \times_B S(V)$ es trivial por tener a la sección diagonal

$$\Delta: S(V) \rightarrow S(V) \times_B S(V).$$

Finalmente, para el inciso c) primero veamos que Th es una clase de Thom, en efecto

$$\begin{aligned} (\pi_S)_! \text{Th} &= (\pi_P)_! r_! \text{Th} \\ &= (\pi_P)_! (-\tilde{c} + \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E}))) \\ &= -(\pi_P)_!(\tilde{c}) = -(-1) = 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando la naturalidad de la sucesión de Gysin para el diagrama anterior se tiene el siguiente diagrama con cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H^3(P(V)) & \xrightarrow{r^*} & H^3(S(V)) & \xrightarrow{r_!} & H^2(P(V)) & \xrightarrow{\tilde{c} \cup} & H^4(P(V)) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow s^* & & \downarrow i^* & & \downarrow s^* & & \downarrow s^* & & \\ \dots & \longrightarrow & H^3(B) & \xrightarrow{\pi^*} & H^3(E) & \xrightarrow{\pi_!} & H^2(B) & \xrightarrow{c_1(E) \cup} & H^4(B) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

así que

$$\begin{aligned} \pi_! i^*(\text{Th}) &= s^* r_!(\text{Th}) = s^*(-\tilde{c} + \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E}))) \\ &= -s^* \tilde{c} + s^* \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E})) \\ &= -c_1(E) + c_1(E) + c_1(\hat{E}) \\ &= c_1(\hat{E}). \end{aligned}$$

De manera similar se tiene que

$$\hat{\pi}_1 \hat{i}^*(\text{Th}) = \hat{s}^* r_1(\text{Th}) = c_1(\hat{E}).$$

Del lema anterior se tiene

$$p^* i^*(\text{Th}) = \hat{p}^* \hat{i}^*(\text{Th}) \quad \square$$

El lema anterior nos ayuda a para probar uno de los teoremas principales de esta sección.

Teorema 3.1.6 (Existencia de pares T-duales). *Sea (E, h) un par sobre B , entonces existe otro par (\hat{E}, \hat{h}) sobre B tal que (E, h) y (\hat{E}, \hat{h}) son pares T-duales.*

Demostración. Dado el par (E, h) , consideremos la clase $\pi_1 h \in H^2(B)$, así que por la clasificación de los haces S^1 -principales sobre B podemos afirmar que existe un haz S^1 -principal $\hat{\pi}: \hat{E} \rightarrow B$ tal que

$$c_1(\hat{E}) = \pi_1 h.$$

Por la sucesión de Gysin para $\pi: E \rightarrow B$ tenemos que $c_1(E) \cup c_1(\hat{E}) = 0$ así que por el lema anterior obtenemos una clase de Thom $\text{Th}' \in H^3(S(V))$ tal que

$$r_1 \text{Th}' = -\tilde{c} + \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E})).$$

Notemos que

$$\pi_1(i^*(\text{Th}') - h) = c_1(\hat{E}) - c_1(\hat{E}) = 0$$

así que existe $a \in H^3(B)$ tal que $i^*(\text{Th}') - h = \pi^* a$. Definimos la clase de Thom

$$\text{Th} := \text{Th}' - \pi_S^* a,$$

además Th satisface

$$\begin{aligned} r_1 \text{Th} &= r_1(\text{Th}') - r_1 \pi_S^* a = r_1 \text{Th}' - r_1(r^* \pi_P^* a) \\ &= -\tilde{c} + \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E})) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} i^* \text{Th} &= i^* \text{Th}' - i^* \pi_S^* a \\ &= i^* \text{Th}' - \pi^* a \\ &= h \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & S(V) \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi_S \\ & & B. \end{array}$$

Por el inciso c) del lema podemos concluir que los pares (E, h) y $(\hat{E}, \hat{h} := \hat{i}^* \text{Th})$ son T-duales. \square

Siguiendo la demostración del teorema anterior hemos probado además el siguiente lema

Lema 3.1.7. *Sea (E, h) un par sobre B y $\hat{\pi}: \hat{E} \rightarrow B$ un haz S^1 -principal tal que $c_1(\hat{E}) = \pi_! h$, entonces existe una clase de Thom $Th \in H^3(S(V))$ tal que*

$$r_! Th = -\tilde{c} + \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E})) \quad \text{y} \quad i^* Th = h.$$

Para la demostración del siguiente lema, tomamos como referencia el lema 5.3 de [24] y el lema 4.4 de [8].

Lema 3.1.8. *Sean $\pi: E \rightarrow B$ y $\hat{\pi}: \hat{E} \rightarrow B$ haces S^1 -principales. Para cualquier $\mu \in H^3(\hat{E})$ tal que $\hat{\pi}_! \mu = 0$ y $\hat{p}^* \mu = 0$, existe $\alpha \in H^1(B)$ tal que*

$$\mu = \hat{\pi}^*(c_1(E) \cup \alpha).$$

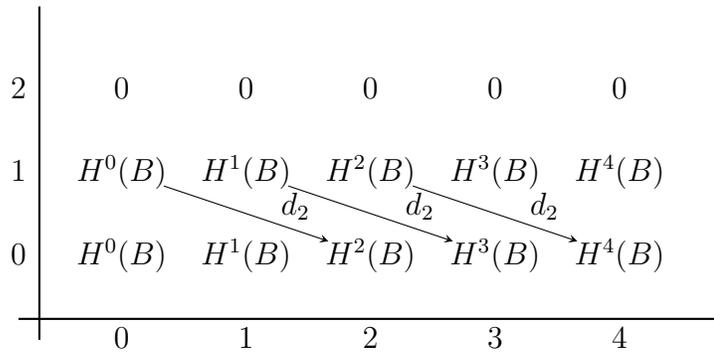
Demostración. Consideremos el diagrama pull-back

$$\begin{array}{ccc} & E \times_B \hat{E} & \\ p \swarrow & \downarrow q & \searrow \hat{p} \\ E & & \hat{E} \\ \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\ & B & \end{array}$$

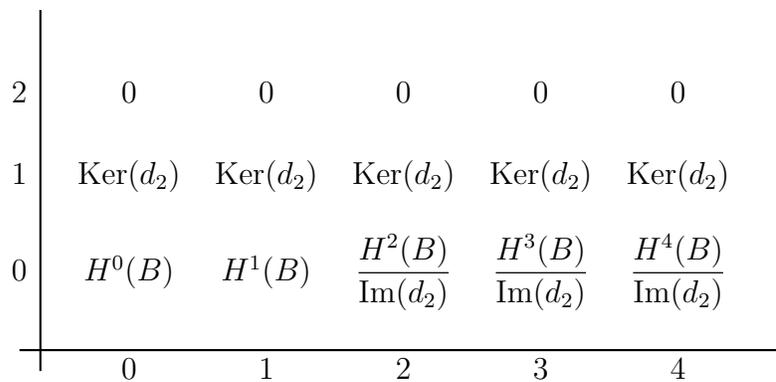
Notemos que $q: E \times_B \hat{E} \rightarrow B$ es un haz fibrado con fibra $S^1 \times S^1$ de manera que $\pi_1(B)$ actúa trivialmente sobre $H^*(S^1 \times S^1)$ ya que $\pi_1(B)$ actúa trivialmente sobre cada S^1 de los haces S^1 -principales $\pi: E \rightarrow B$ y $\hat{\pi}: \hat{E} \rightarrow B$ (ver la sección de la sucesión de Gysin para cohomología). De esta manera nos fijaremos en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \hat{S}^1 & \xrightarrow{\hat{i}} & S^1 \times \hat{S}^1 & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \hat{S}^1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E \times_B \hat{E} & \xrightarrow{\text{Id}} & E \times_B \hat{E} & \xrightarrow{\hat{p}} & \hat{E} \\ \hat{p} \downarrow & & \downarrow q & & \downarrow \hat{\pi} \\ \hat{E} & \xrightarrow{\hat{\pi}} & B & \xrightarrow{\text{Id}} & B. \end{array}$$

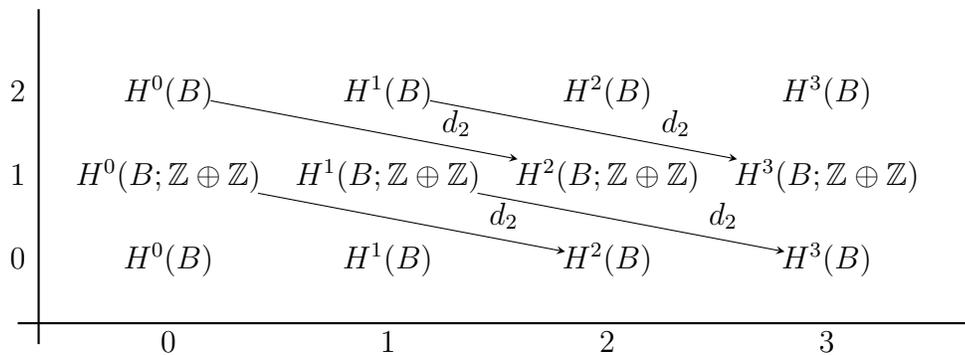
Este diagrama induce mapeos entre las siguientes sucesiones espectrales



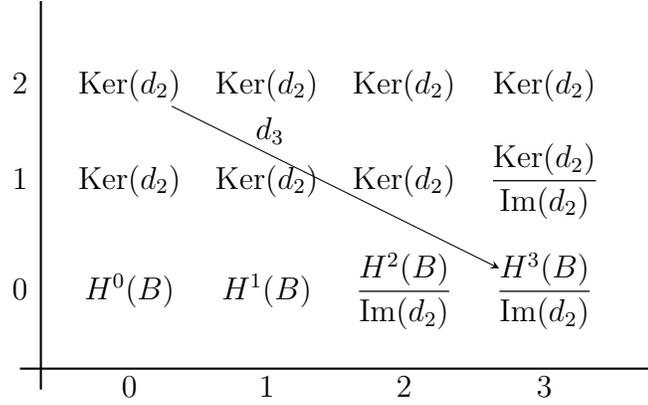
$E_2(\hat{\pi})$



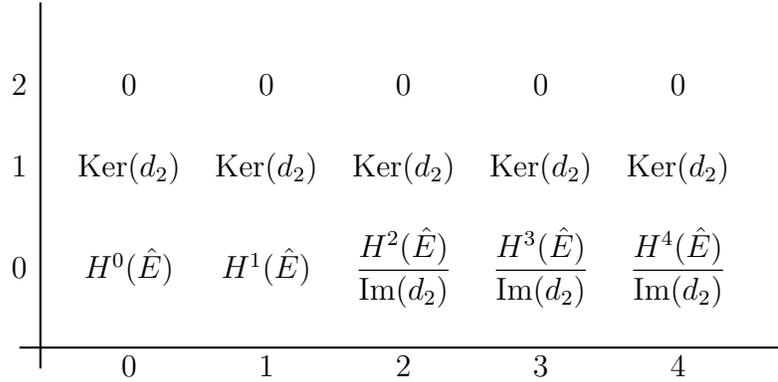
$E_3(\hat{\pi}) = E_\infty(\hat{\pi})$



$E_2(q)$



$$E_3(q) = E_\infty(q) \quad E_4^{3,0}(q) = \frac{H^3(B)/\text{Im}(d_2)}{\text{Im}(d_3)}$$



$$E_3(\hat{p}) = E_\infty(\hat{p})$$

Por la segunda columna del cuadrado conmutativo y utilizando la naturalidad de la sucesión espectral, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E_3^{3,0}(\hat{\pi}) & \xrightarrow{\hat{\pi}^\bullet} & H^3(\hat{E}) \\
 (\text{Id}, \text{pr}_1)^* \downarrow & & \downarrow \hat{p}^* \\
 E_3^{3,0}(q) & \xrightarrow{q^\bullet} & H^3(E \times_B \hat{E})
 \end{array}$$

así que como $\hat{\pi}(\mu) = 0$ entonces por la sucesión de Gysin tenemos que existe $\nu \in H^3(B)$ tal que $\hat{\pi}^*(\nu) = \mu$, es decir que

$$\hat{\pi}^\bullet([\nu]) = \mu$$

Como por hipótesis también $\hat{p}^*(\mu) = 0$, entonces utilizando el diagrama conmutativo se tiene

$$0 = \hat{p}^*(\mu) = \hat{\pi}^\bullet([\nu]) = q^\bullet([\nu])$$

como q^\bullet es inyectiva, entonces

$$\nu = d_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in E_2^{1,1}(q) = H^1(B; \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \cong H^1(B) \oplus H^1(B).$$

Por la primera columna del diagrama tenemos el mapeo

$$(\hat{\pi}, \hat{i})^*: E_2^{3,0}(q) \rightarrow E_2^{3,0}(\hat{p})$$

el cual conmuta con las diferenciales por la naturalidad de la sucesión espectral, de aquí obtenemos que

$$\hat{\pi}^*(\nu) = (\hat{\pi}, \hat{i})^* d_2(\alpha_1, \alpha_2) = d_2(\hat{\pi}, \hat{i})^*(\alpha_1, \alpha_2) = d_2(\hat{\pi}^* \alpha_2).$$

Dado que la sucesión espectral $E_r^{p,q}(\hat{p})$ induce la sucesión de Gysin para el haz S^1 -principal $\hat{p}: E \times_B \hat{E} \rightarrow \hat{E}$, entonces

$$\mu = \hat{\pi}^*(\nu) = \hat{\pi}^* c_1(E) \cup (\hat{\pi}^* \alpha_2) = \hat{\pi}^*(c_1(E) \cup \alpha_2) \quad \alpha_2 \in H^1(B). \quad \square$$

El lema anterior nos permite demostrar lo siguiente

Lema 3.1.9. Sean (E, h) y (\hat{E}, \hat{h}) pares T -duals sobre B . Existe una clase de Thom $Th \in H^3(S(V))$ tal que

$$r_1 Th = -\tilde{c} + \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E})), \quad i^* Th = h \quad y \quad \hat{i}^* Th = \hat{h}.$$

Demostración. Como (E, h) y (\hat{E}, \hat{h}) son pares T -duals tenemos que

$$c_1(\hat{E}) = \pi_! h,$$

entonces por el lema anterior sabemos que existe una clase de Thom $Th' \in H^3(S(V))$ tal que

$$r_1(Th') = -\tilde{c} + \pi_P^*(c_1(E) + c_1(\hat{E})) \quad y \quad i^* Th' = h.$$

Como $(\hat{E}, \hat{i}^* Th')$ también es T -dual a (E, h) entonces tenemos que

$$\hat{\pi}_!(\hat{i}^* Th' - \hat{h}) = c_1(E) - c_1(E) = 0 \quad y \quad \hat{p}^*(\hat{i}^* Th' - \hat{h}) = p^* h - p^* h = 0$$

así que por el lema anterior obtenemos que

$$\hat{i}^* Th' - \hat{h} = \hat{\pi}(c_1(E) \cup \alpha) \quad \alpha \in H^1(B).$$

Hacemos

$$Th := Th' - \pi_S^*(c_1(E) \cup \alpha),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} r_!(Th) &= r_!(Th') - r_!(\pi_S^*(c_1(E) \cup \alpha)) = r_!(Th') - r_!(r^*\pi_P^*(c_1(E) \cup \alpha)) = r_!(Th'), \\ i^*Th &= i^*Th' - i^*(\pi_S^*(c_1(E) \cup \alpha)) = h - \pi^*(c_1(E) \cup \alpha) = h \end{aligned}$$

y

$$\hat{i}^*Th = \hat{i}^*Th' - \hat{i}^*(\pi_S^*(c_1(E) \cup \alpha)) = \hat{i}^*Th' - \hat{\pi}^*(c_1(E) \cup \alpha) = \hat{h}. \quad \square$$

Es posible definir una noción de isomorfismo entre pares. Hay que tener en mente que existe una noción de isomorfismo entre haces principales, lo que falta es pedir que la clase h se preserve en cierto sentido. Con esta idea viene la siguiente definición

Definición 3.1.10. Un isomorfismo de pares $\Phi: (E, h) \rightarrow (E', h')$ sobre B es un isomorfismo de haces S^1 -principales

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & E' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & B & \end{array}$$

tal que $h = \Phi^*h'$.

Uno podría preguntarse si existe alguna relación entre la T-dualidad de pares y su clase de isomorfismo, el siguiente teorema nos da la respuesta

Teorema 3.1.11. Sea (E, h) un par sobre el espacio B .

- La clase de isomorfismo de un par (\hat{E}, \hat{h}) T-dual a (E, h) es única.
- La clase de isomorfismo de un par (\hat{E}, \hat{h}) T-dual a (E, h) depende únicamente de la clase de isomorfismo de (E, h) .

Demostración. Para el inciso a) supongamos (\hat{E}, \hat{h}) y (\hat{E}', \hat{h}') son pares T-duales a (E, h) , tenemos que ver que $(\hat{E}, \hat{h}) \cong (\hat{E}', \hat{h}')$. Por la definición de pares T-duales tenemos que

$$c_1(\hat{E}) = \pi_!h = c_1(\hat{E}')$$

por lo tanto $\hat{E} \cong \hat{E}'$ como haces S^1 -principales, de esta manera podemos suponer que $\hat{E}' = \hat{E}$. Tenemos que mostrar que existe un automorfismo de haces S^1 -principales

$$\begin{array}{ccc} \hat{E} & \xrightarrow{\Phi} & \hat{E} \\ & \searrow \hat{\pi} & \swarrow \hat{\pi} \\ & B & \end{array}$$

tal que

$$\Phi^*(\hat{h}) = \hat{h}'.$$

Cualquier automorfismo Φ está determinado por la multiplicación por un mapeo $g: B \rightarrow S^1$. Podemos factorizar Φ como la composición

$$\hat{E} \xrightarrow{(\text{Id}, \hat{\pi})} \hat{E} \times B \xrightarrow{\text{Id} \times g} \hat{E} \times S^1 \xrightarrow{m} \hat{E}$$

en donde

$$m(e, z) = e \cdot z.$$

Notemos que se tiene el siguiente pullback

$$\begin{array}{ccc} \hat{E} \times S^1 & \xrightarrow{m} & \hat{E} \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \hat{\pi} \\ \hat{E} & \xrightarrow{\hat{\pi}} & B. \end{array}$$

Por el teorema de Künneth tenemos que

$$H^3(\hat{E} \times S^1) \cong H^3(\hat{E}) \oplus [H^2(\hat{E}) \otimes H^1(S^1)]$$

por lo tanto

$$m^*(\hat{h}) = \text{pr}_1^*(a) + \text{pr}_1^*(b) \cup \text{pr}_2^*(\theta)$$

en donde $a \in H^3(\hat{E})$, $b \in H^2(\hat{E})$ y $\theta \in H^1(S^1)$ es el generador canónico. Por la naturalidad del push-forward se tiene que

$$\text{pr}_{1!} m^* = \hat{\pi}^* \hat{\pi}_!$$

así que

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^* \hat{\pi}_!(\hat{h}) &= \text{pr}_{1!} m^*(\hat{h}) = \text{pr}_{1!} [\text{pr}_1^*(a) + \text{pr}_1^*(b) \cup \text{pr}_2^*(\theta)] \\ &= 0 + b \cup \text{pr}_{1!} \text{pr}_2^*(\theta) \\ &= b \cup \langle \theta, [S^1] \rangle \\ &= b \end{aligned}$$

por otro lado, si denotamos por $\iota_1: \hat{E} \rightarrow \hat{E} \times S^1$ a

$$\iota_1(e) = (e, 1)$$

entonces tenemos los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} & \hat{E} \times S^1 & & \hat{E} \times S^1 & & \hat{E} \times S^1 \\ & \nearrow \iota_1 & & \nearrow \iota_1 & & \nearrow \iota_1 \\ \hat{E} & \xrightarrow{\text{Id}} & \hat{E} & \xrightarrow{\text{Id}} & \hat{E} & \xrightarrow{c_1} & S^1 \\ & \searrow m & & \searrow \text{pr}_1 & & \searrow \text{pr}_2 \end{array}$$

de manera que

$$\begin{aligned}\hat{h} &= \iota_1^* m^*(\hat{h}) = \iota_1^* \text{pr}_1^*(a) + \iota_1^* \text{pr}_1^*(\hat{\pi}^* \pi_1(\hat{h})) \cup \iota_1^* \text{pr}_2^*(\theta) \\ &= a + \iota_1^* \text{pr}_1^*(\hat{\pi}^* \pi_1(\hat{h})) \cup 0 \\ &= a\end{aligned}$$

Hemos obtenido que

$$m^*(\hat{h}) = \text{pr}_1^*(\hat{h}) + \text{pr}_1^*(\hat{\pi}^* \pi_1(\hat{h})) \cup \text{pr}_2^*(\theta).$$

Como $\hat{\pi}(\hat{h} - \hat{h}') = 0$ y $\hat{p}(\hat{h} - \hat{h}') = 0$ entonces por un lema anterior tenemos que

$$\hat{h} - \hat{h}' = \hat{\pi}^*(c_1(E) \cup \alpha) \quad \alpha \in H^1(B).$$

Como tenemos la biyección $[B, S^1] = [B, K(\mathbb{Z}, 1)] \cong H^1(B; \mathbb{Z})$ dada por

$$[g] \mapsto g^*(\theta) \in H^1(B; \mathbb{Z})$$

entonces tomamos $g: B \rightarrow S^1$ que corresponda a $-\alpha \in H^1(B)$. Usando que $\hat{\pi}_1(\hat{h}) = c_1(E)$, y por la naturalidad del teorema de Künneth tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}(\text{Id} \times g)^* m^*(\hat{h}) &= \text{pr}_1^*(\hat{h}) + \text{pr}_1^*[\hat{\pi}^*(c_1(E))] \cup \text{pr}_2^*(-\alpha) \\ &= \text{pr}_1^*(\hat{h}) - \text{pr}_1^*[\hat{\pi}^*(c_1(E))] \cup \text{pr}_2^*(\alpha)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Phi^*(\hat{h}) &= (\text{Id}, \hat{\pi})^*(\text{Id} \times g)^* m^*(\hat{h}) = \hat{h} - \hat{\pi}^*(c_1(E)) \cup \hat{\pi}^*(\alpha) \\ &= \hat{h} - \hat{\pi}^*(c_1(E) \cup \alpha) \\ &= \hat{h}'.\end{aligned}$$

Para el inciso b) supongamos que $(E, h), (\hat{E}, \hat{h})$ son pares T-duales, que $(E', h'), (\hat{E}', \hat{h}')$ también son pares T-duales y que $(E, h) \cong (E', h')$. Sea

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\Phi} & E \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi \\ & & B \end{array}$$

un isomorfismo de haces S^1 -principales tal que $\Phi^* h = h'$. Notemos que $\Phi: E' \rightarrow E$ induce un isomorfismo entre los haces esféricos

$$\Phi_S: S(L_{E'} \oplus L_{\hat{E}}) \rightarrow S(L_E \oplus L_{\hat{E}})$$

dado por

$$\Phi_S([e', z], [\hat{e}, w]) = ([\Phi(e'), z], [\hat{e}, w]).$$

Por lo tanto tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \hat{E} & \\ \hat{i}' \swarrow & & \searrow \hat{i} \\ S(L_{E'} \oplus L_{\hat{E}}) & \xrightarrow{\Phi_S} & S(L_E \oplus L_{\hat{E}}), \end{array}$$

en efecto, tenemos que

$$\Phi_S \hat{i}'(\hat{e}) = ([\Phi_S(e'), 0], [\hat{e}, 1]) = \hat{i}(\hat{e})$$

porque $\hat{i}(\hat{e})$ es independiente de la elección de un elemento e en la fibra $\pi^{-1}(\hat{\pi}(\hat{e}))$. Por el Lema 3.1.9 tenemos que existe $Th \in H^3(S(L_E \oplus L_{\hat{E}}))$ tal que

$$i^*(Th) = h \quad \text{y} \quad \hat{i}^*(Th) = \hat{h}.$$

Definimos

$$Th' := \Phi_S^*(Th),$$

notemos que

$$(\hat{i}')^*(Th') = (\hat{i}')^* \Phi_S^*(Th) = \hat{i}^*(Th) = \hat{h}.$$

Dado que los pares (E', h') , (\hat{E}', \hat{h}') son T-duales, si mostramos que los pares (E', h') , (\hat{E}, \hat{h}) también son T-duales, entonces podemos concluir por el inciso a) que $(\hat{E}, \hat{h}) \cong (\hat{E}', \hat{h}')$. En efecto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo en donde los cuadrados son pull-backs:

$$\begin{array}{ccccc} & E' \times_B \hat{E} & \xrightarrow{(\Phi, \text{Id})} & E \times_B \hat{E} & \\ \tilde{p}' \swarrow & & & & \searrow \tilde{p} \\ E' & & \Phi & & E \\ & \searrow \hat{p}' & & \swarrow p & \\ & \hat{E} & & E & \\ \pi' \swarrow & & \hat{\text{Id}} & & \searrow \pi \\ & B & \xrightarrow{\text{Id}} & B & \\ & & & & \hat{\pi} \end{array}$$

así tenemos que

$$\begin{aligned} \pi'_1(h') &= \pi'_1(\Phi^*(h)) = \pi_1(h) = c_1(\hat{E}) \quad \text{y} \quad \hat{\pi}_1(\hat{h}) = c_1(E) = c_1(E'), \\ c_1(E') \cup c_1(\hat{E}) &= c_1(E) \cup c_1(\hat{E}) = 0 \end{aligned}$$

y

$$(\tilde{p}')^* h' = (\tilde{p}')^* \Phi^* h = (\Phi, \text{Id})^* p^* h = (\Phi, \text{Id})^* \hat{p}^* \hat{h} = (\hat{p}')^* (\hat{h}).$$

Concluimos que (E', h') , (\hat{E}, \hat{h}) son pares T-duales y que $(\hat{E}, \hat{h}) \cong (\hat{E}', \hat{h}')$. \square

3.2. La transformación de T–dualidad

Ahora explicaremos acerca de la transformación de T–dualidad, la cual nos proporciona un isomorfismo entre las K–teorías torcidas de los pares duales.

Denotemos por $T(X)$ al conjunto de haces $PU(\mathcal{H})$ –principales sobre X para un espacio de Hilbert complejo, separable y de dimensión infinita \mathcal{H} . Consideremos ahora dos pares T–duales (E, h) y (\hat{E}, \hat{h}) sobre B y una clase de Thom $\text{Th} \in H^3(S(V); \mathbb{Z})$, escogemos un haz $K \in T(S(V))$ tal que

$$c(K) = \text{Th}$$

en donde c es la transformación natural de la sección de K–teoría torcida que surge de la biyección entre elementos del tercer grupo de cohomología y clases de isomorfismo de haces. Por lo tanto tenemos dos nuevos haces principales

$$P := i^*(K) \in T(E) \quad \text{y} \quad \hat{P} := \hat{i}^*(K) \in T(\hat{E})$$

Se tiene entonces que

$$c(P) = c(i^*(K)) = i^*(c(K)) = h \quad \text{y} \quad c(\hat{P}) = c(\hat{i}^*(K)) = \hat{i}^*(c(K)) = \hat{h}$$

Consideramos el haz $q: E \times_B \hat{E} \rightarrow B$ construido a partir de los haces $\pi: E \rightarrow B$ y $\hat{\pi}: \hat{E} \rightarrow B$ de donde tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & E \times_B \hat{E} & \\ p \swarrow & \downarrow q & \searrow \hat{p} \\ E & & \hat{E} \\ \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\ & B & \end{array}$$

Notemos que la homotopía $h: (S^1 \times S^1) \times I \rightarrow S^3$ dada por

$$h(z, \hat{z}, t) = (\sqrt{1-t^2}z, t\hat{z})$$

induce la homotopía $H: (E \times_B \hat{E}) \times I \rightarrow S(V)$ de $i \circ p$ a $\hat{i} \circ \hat{p}$.

A continuación explicaremos el mapeo $u(h)$ inducido por una homotopía y que nos va a permitir relacionar los torcimientos P y \hat{P} . Supongamos que $h: Y \times I \rightarrow X$ es una homotopía entre $f_0, f_1: Y \rightarrow X$, luego

$$f_k = h \circ i_k \quad k = 0, 1$$

en donde $i_k: Y \rightarrow Y \times I$ está dado por $i_k(y) = (y, k)$. Definamos $F: Y \times I \rightarrow X \times I$ dado por

$$F(y, t) = (h(y, t), t).$$

Consideremos $Q \in T(X)$ y consideremos los pullbacks $(f_0 \times \text{Id}_I)^* \text{pr}_1^*(Q)$ y $F^* \text{pr}_1^*(Q)$ ambos en $T(Y \times I)$, notemos que

$$(f_0 \times \text{Id}_I)^* \text{pr}_1^*(Q) \cong (\text{pr}_1 \circ (f_0 \times \text{Id}_I))^*(Q) = f_0^*(Q)$$

en donde $f'_0: Y \times I \rightarrow X$ está dado por

$$f'_0(y, t) = f_0(y).$$

Por otro lado, se tiene que

$$F^* \text{pr}_1^*(Q) \cong (\text{pr}_1 \circ F)^*(Q) = h^*(Q)$$

pero h y f'_0 son homótopas ya que $H: (Y \times I) \times I \rightarrow X$ dada por

$$H(y, t, s) = h(y, st)$$

satisface que

$$H(y, t, 0) = h(y, 0) = f_0(y) = f'_0(y, t) \quad \text{y} \quad H(y, t, 1) = h(y, t).$$

Así que H es una homotopía entre f'_0 y h , por lo tanto

$$(f_0 \times \text{Id}_I)^* \text{pr}_1^*(Q) \cong F^* \text{pr}_1^*(Q).$$

Definimos $v: (f_0 \times \text{Id}_I)^* \text{pr}_1^*(Q) \rightarrow F^* \text{pr}_1^*(Q)$ como el único isomorfismo tal que la composición de los isomorfismos siguientes es la identidad

$$f_0^*(Q) \cong i_0^*(f_0 \times \text{Id}_I)^* \text{pr}_1^*(Q) \stackrel{i_0^*(v)}{\cong} i_0^* F^* \text{pr}_1^*(Q) \cong f_0^*(Q),$$

podemos garantizar la existencia de este isomorfismo $v(h)$ gracias a la estructura de $H^2(-)$ -torsor que tiene $\text{Hom}(H_1, H_2)$ para cualesquiera $H_1, H_2 \in T(-)$ y que además esta estructura de torsor es compatible con los pullbacks. Finalmente definimos

$$u(h): f_0^*(Q) \cong i_1^*(f_0 \times \text{Id}_I)^* \text{pr}_1^*(Q) \stackrel{i_1^*(v)}{\cong} i_1^* F^* \text{pr}_1^*(Q) \cong f_1^*(Q).$$

En el caso de la homotopía $h: E \times_B \hat{E} \times I \rightarrow S(V)$ entre $i \circ p$ y $\hat{i} \circ p$ tenemos entonces el isomorfismo inducido entre torcimientos

$$u(h): \hat{p}^*(\hat{P}) = \hat{p}^* \hat{i}^*(K) \cong (\hat{i} \circ \hat{p})^* K \stackrel{u(h)}{\cong} (i \circ p)^*(K) \cong p^* i^*(K) = p^*(P)$$

Definición 3.2.1. Definimos la transformación de T-dualidad

$$T := \hat{p}_! \circ u(h)^* \circ p^*: K^*(E, P) \rightarrow K^{*-1}(\hat{E}, \hat{P}).$$

Todavía más general, se puede definir una transformación de T-dualidad para el caso de teorías de cohomología torcidas generalizadas \mathfrak{h} en el sentido de [16] (enuncian los axiomas y propiedades que una teoría torcida debe cumplir), en donde $T(X)$ serían los torcimientos de la teoría y en la definición de la transformación se intercambiaría la K por \mathfrak{h} .

3.3. T–admisibilidad

Una teoría de cohomología torcida generalizada T–admisibile guarda una estrecha relación con la transformación de T–dualidad. A continuación veremos a detalle esta relación.

Sea $S \subset \mathbb{C}^2$ la esfera unitaria y consideremos las dos esferas de dimensión uno $S^1, \hat{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Consideremos los encajes $i: S^1 \rightarrow S$, $i(z) = (z, 0)$ y $\hat{i}: \hat{S}^1 \rightarrow S$, $\hat{i}(\hat{z}) = (0, \hat{z})$. Sea $T := S^1 \times \hat{S}^1$ el toro y $p: T \rightarrow S^1$, $\hat{p}: T \rightarrow \hat{S}^1$ las respectivas proyecciones.

Sea $K \in T(S)$ un torcimiento tal que $c(K) \cap [S] = 1$ y definimos

$$P := i^*(K) \quad \text{y} \quad \hat{P} := \hat{i}^*(K)$$

La homotopía $h: T \times I \rightarrow S$ de la función $i \circ p$ a la función $\hat{i} \circ \hat{p}$ dada por

$$h(z, \hat{z}, t) := (\sqrt{1-t^2}z, t\hat{z})$$

induce un isomorfismo canónico

$$u(h): \hat{p}^*(\hat{P}) = \hat{p}^* \circ \hat{i}^*(K) \cong (\hat{i} \circ \hat{p})^* K \stackrel{u(h)}{\cong} (i \circ p)^*(K) \cong p^* \circ i^*(K) = p^*(P).$$

Si \mathfrak{h} es una teoría de cohomología torcida generalizada entonces

Definición 3.3.1. Decimos que una teoría de cohomología torcida generalizada es T–admisibile si

$$\hat{p}_! \circ u(h)^* \circ p^*: \mathfrak{h}(S^1, P) \rightarrow \mathfrak{h}(\hat{S}^1, \hat{P})$$

es un isomorfismo.

En este trabajo nos interesa el caso en que la teoría de cohomología torcida \mathfrak{h} es la K–teoría torcida, en este caso tenemos las siguientes propiedades sobre los torcimientos:

Proposición 3.3.2. a) *Existe una transformación natural*

$$c: T(-) \rightarrow H^3(-; \mathbb{Z}),$$

entre torcimientos y el tercer grupo de cohomología de manera que la transformación clasifica las clases de isomorfismo de torcimientos.

b) *Sea $P \in T(B)$, se tiene una biyección natural $\nu: \text{Aut}(P) \rightarrow H^2(B; \mathbb{Z})$ que mapea composiciones a sumas.*

c) Sea $\tilde{K} \in T(\Sigma B_+)$, en donde $\Sigma B_+ := B \times I / (B \times \{0\} \cup B \times \{1\})$ es la suspensión reducida. Para la homotopía $h: B \times I \rightarrow \Sigma B_+$ dada por $h(b, t) = [b, t]$ notemos que

$$h_0 = h_1 = C: B \mapsto * \hookrightarrow \Sigma B_+, \quad * = B \times \{0\} \cup B \times \{1\},$$

el morfismo inducido $u(h): C^* \tilde{K} \rightarrow C^* \tilde{K} \in \text{Aut}(C^* \tilde{K})$ satisface que

$$\nu(u(h)) = \text{Susp}(c(\tilde{K}))$$

en donde $\text{Susp}: H^3(\Sigma B_+) \rightarrow H^2(B)$ es el isomorfismo de suspensión.

Antes de probar el teorema de T-admisibilidad para la K-teoría probaremos el siguiente lema:

Lema 3.3.3. Para la homotopía $h: T \times I \rightarrow S$ dada por

$$h(z, \hat{z}, t) = (\sqrt{1-t^2}z, t\hat{z})$$

el morfismo

$$u(h): \theta_T \cong \hat{p}^* \hat{i}^*(K) \rightarrow p^* i^*(K) \cong \theta_T \in \text{Aut}(\theta_T)$$

satisface que

$$\nu(u(h)) \in H^2(T) \cong \mathbb{Z}$$

es un generador.

Demostración. Notemos que

$$\Sigma T_+ \cong S^3 / (S^1 \cup \hat{S}^1).$$

En efecto, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} T \times I & \xrightarrow{h} & S^3 & \xrightarrow{q} & S^3 / (S^1 \cup \hat{S}^1) \\ \downarrow & & & \nearrow \tilde{h} & \\ \Sigma T_+ & & & & \end{array}$$

en donde la flecha punteada existe porque el mapeo $q \circ h$ es constante en cada clase de equivalencia, es decir, se cumple

$$q \circ h(z, \hat{z}, 0) = [z, 0], \quad q \circ h(z, \hat{z}, 1) = [0, \hat{z}] \quad \text{y} \quad [z, 0] = [0, \hat{z}] \in S^3 / (S^1 \cup \hat{S}^1).$$

Nos gustaría construir $r: S^3 / (S^1 \cup \hat{S}^1) \rightarrow \Sigma T_+$ que sea la inversa de \tilde{h} . Consideremos

$$r[z, w] = \begin{cases} \left[\begin{array}{l} z \\ \frac{w}{|w|}, |w| \end{array} \right] & z \neq 0 \text{ y } w \neq 0 \\ [z, 0, 0] & w = 0 \\ [0, w, 1] & z = 0 \end{cases}$$

notemos que si $z \neq 0$ y $w \neq 0$

$$\begin{aligned} (\tilde{h} \circ r)[z, w] &= \tilde{h} \left[\frac{z}{|z|}, \frac{w}{|w|}, |w| \right] \\ &= \left[\sqrt{1 - |w|^2} \left(\frac{z}{|z|} \right), |w| \left(\frac{w}{|w|} \right) \right] \\ &= \left[|z| \left(\frac{z}{|z|} \right), w \right] \\ &= [z, w]. \end{aligned}$$

Si $w = 0$

$$(\tilde{h} \circ r)[z, 0] = \tilde{h}[z, 0, 0] = [z, 0],$$

mientras que si $z = 0$

$$(\tilde{h} \circ r)(0, w) = \tilde{h}[0, w, 1] = [0, w].$$

De igual forma si $t \in (0, 1)$ entonces

$$(r \circ \tilde{h})[z, \hat{z}, t] = r[\sqrt{1 - t^2}z, t\hat{z}] = \left[\frac{\sqrt{1 - t^2}z}{\sqrt{1 - t^2}}, \frac{t\hat{z}}{t} \right] = [z, w].$$

Si $t = 0$, entonces

$$(r \circ \tilde{h})[z, \hat{z}, 0] = r[z, 0] = [z, 0, 0] = [z, \hat{z}, 0]$$

mientras que si $t = 1$, entonces

$$(r \circ \tilde{h})[z, \hat{z}, 1] = r[0, \hat{z}] = [0, \hat{z}, 1] = [z, \hat{z}, 1].$$

Por otro lado, de la sucesión exacta larga del par se tiene que

$$0 = H^2(S^1 \amalg \hat{S}^1) \xrightarrow{\delta} H^3(S^3/(S^1 \cup \hat{S}^1)) \xrightarrow{q^*} H^3(S^3) \xrightarrow{\iota^*} H^3(S^1 \amalg \hat{S}^1) = 0$$

así que q^* es un isomorfismo. Luego la composición

$$H^3(\Sigma T_+) \xrightarrow{r^*} H^3(S^3/(S^1 \cup \hat{S}^1)) \xrightarrow{q^*} H^3(S^3)$$

es un isomorfismo. Sea $\tilde{K} \in T(\Sigma T_+)$ tal que

$$q^* r^* \tilde{K} = K$$

en donde K era un torcimiento tal que

$$\langle c([K]), [S^3] \rangle = 1.$$

Consideremos la siguiente homotopía

$$\begin{array}{ccc} T \times I & \xrightarrow{h} & S^3 \xrightarrow{q} S^3 / (S^1 \times \hat{S}^1) \\ & \searrow_{r \circ q \circ h} & \downarrow r \\ & & \Sigma T_+. \end{array}$$

Esta homotopía satisface

$$\begin{aligned} r \circ q \circ h(z, \hat{z}, t) &= r \circ q(\sqrt{1-t^2}z, t\hat{z}) \\ &= r[\sqrt{1-t^2}z, t\hat{z}] \\ &= [z, \hat{z}, t] \end{aligned}$$

Por la Proposición 3.3.2 inciso c) tenemos que

$$\nu(u(r \circ q \circ h)) = \text{Susp}(c(\tilde{K})).$$

Finalmente, dado que

$$(r q h \iota_0)^* \tilde{K} = (r q i p)^* \tilde{K} \stackrel{\text{can}}{\cong} p^* i^* q^* r^* \tilde{K} = p^* i^*(K) \cong \theta_T$$

y

$$(r q h \iota_1)^* \tilde{K} = (r q \hat{i} \hat{p})^* \tilde{K} \stackrel{\text{can}}{\cong} \hat{p}^* \hat{i}^* q^* r^* \tilde{K} = \hat{p}^* \hat{i}^*(K) \cong \theta_T$$

entonces podemos concluir que $\nu(u(h))$ es un generador de $H^2(T) \cong \mathbb{Z}$ □

Teorema 3.3.4. *La K -teoría torcida es T -admisibile.*

Demostración. Dado que las clases de isomorfismo de torcimientos en $T(S^1)$ están en correspondencia biyectiva con elementos de $H^3(S^1) = 0$ entonces

$$c([P]) \in H^3(S^1) = 0 \quad \text{y} \quad c([\hat{P}]) \in H^3(\hat{S}^1) = 0$$

de donde obtenemos que existe una única clase de isomorfismo de torcimientos, por lo tanto

$$K^n(S^1, P) \cong K^n(S^1, \theta_{S^1}) \cong K^n(S^1) \quad \text{y} \quad K^n(\hat{S}^1, \hat{P}) \cong K^n(\hat{S}^1, \theta_{\hat{S}^1}) \cong K^n(\hat{S}^1).$$

También tenemos que

$$p^*(P) \cong p^*(\theta_{S^1}) \cong \theta_T \quad \text{y} \quad \hat{p}^*(\hat{P}) \cong \hat{p}^*(\theta_{\hat{S}^1}) \cong \theta_T,$$

entonces el isomorfismo de torcimientos inducido por la homotopía h

$$u(h): \hat{p}^*(\hat{P}) \rightarrow p^*(P)$$

es tal que

$$u(h) \in \text{Aut}(\theta_T),$$

de esta manera $u(h)$ debe corresponder con la clase de un haz vectorial lineal $[L]$ sobre T (véase [7]) de manera que el mapeo inducido en K-teoría

$$u(h)^*: K^n(T, \hat{p}^*(\hat{P})) \rightarrow K^n(T, p^*(P))$$

es el producto tensorial con la clase $[L]$, es decir, está dado por el mapeo

$$- \otimes [L]: K^n(T, \hat{p}^*(\hat{P})) \rightarrow K^n(T, p^*(P)),$$

(véase la Proposición 3.4 de [23] o [7]). Por lo tanto tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} K^n(S^1, P) & \xrightarrow{p^*} & K^n(T, p^*(P)) & \xrightarrow{u(h)^*} & K^n(T, \hat{p}^*(\hat{P})) & \xrightarrow{\hat{p}_1} & K^{n-1}(\hat{S}^1, \hat{P}) \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ K^n(S^1) & \xrightarrow{p^*} & K^n(T) & \xrightarrow{-\otimes[L]} & K^n(T) & \xrightarrow{\hat{p}_1} & K^{n-1}(\hat{S}^1). \end{array}$$

Pero aún más, por el lema anterior $L \rightarrow T$ es un haz lineal complejo tal que $c_1(L) \in H^2(T) = \mathbb{Z}$ es un generador. No es necesario saber exactamente cuál es para demostrar que la transformación de T-dualidad es un isomorfismo. Sin embargo, en [14] se menciona exactamente cuál de los dos generadores le corresponde. Primero calcularemos el mapeo dado por $- \otimes [L]: K^n(T) \rightarrow K^n(T)$, en este caso tenemos otro diagrama conmutativo utilizando el caracter de Chern

$$\begin{array}{ccc} K^*(T) & \xrightarrow{-\otimes[L]} & K^*(T) \\ \text{ch} \downarrow & & \downarrow \text{ch} \\ H^*(T; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\cup_{\text{ch}[L]}} & H^*(T; \mathbb{Q}) \end{array}$$

en donde la flecha de abajo se tiene porque el caracter de Chern separa productos tensoriales de clases de isomorfismo de haces vectoriales

$$\text{ch}([E] \otimes [F]) = \text{ch}[E] \cup \text{ch}[F].$$

Dado que el haz vectorial L sobre T es lineal, entonces su caracter de Chern es igual a

$$\text{ch}[L] = e^{c_1(L)} = 1 + c_1(L).$$

Sean θ y $\hat{\theta}$ generadores de $H^1(S^1; \mathbb{Q})$ y $H^1(\hat{S}^1; \mathbb{Q})$. Por el teorema de Künneth para cohomología se sigue que $\theta \otimes \hat{\theta}$ es un generador de $H^2(T; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$, por lo tanto escogemos θ y $\hat{\theta}$ de manera que

$$c_1(L) = \theta \otimes \hat{\theta}.$$

De esta manera tenemos los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
(1 \otimes \hat{1}) \cup \text{ch}[L] &= (1 \otimes \hat{1}) \cup (1 + \theta \otimes \hat{\theta}) = 1 \otimes \hat{1} + \theta \otimes \hat{\theta}, \\
(1 \otimes \hat{\theta}) \cup \text{ch}[L] &= (1 \otimes \hat{\theta}) \cup (1 + \theta \otimes \hat{\theta}) = 1 \otimes \hat{\theta}, \\
(\theta \otimes \hat{1}) \cup \text{ch}[L] &= (\theta \otimes \hat{1}) \cup (1 + \theta \otimes \hat{\theta}) = \theta \otimes \hat{1}, \\
(\theta \otimes \hat{\theta}) \cup \text{ch}[L] &= (\theta \otimes \hat{\theta}) \cup (1 + \theta \otimes \hat{\theta}) = \theta \otimes \hat{\theta}.
\end{aligned}$$

Nos gustaría probar que el caracter de Chern es un isomorfismo en el toro, pero primero veamos que es un isomorfismo en S^1 . En efecto, sea

$$\text{ch}: K^0(S^1) \rightarrow H^{\text{ev}}(S^1; \mathbb{Q}).$$

Notemos que $K^0(S^1)$ está generado por el haz trivial $[S^1 \times \mathbb{C}]$, de manera que

$$\text{ch}([S \times \mathbb{C}]) = e^{c_1([S^1 \times \mathbb{C}])} = e^0 = 1$$

por lo tanto es un isomorfismo en dimensión 0. Ahora sea

$$\text{ch}: K^{-1}(S^1) \rightarrow H^{\text{odd}}(S^1; \mathbb{Q}),$$

notemos que por definición del caracter de Chern en dimensión -1 primero utilizamos la definición de la K-teoría en dimensión -1 :

$$K^{-1}(S^1) = \tilde{K}^0(\Sigma S^1_+) = \tilde{K}^0(S^2) \cong \mathbb{Z}(H - 1).$$

De esta manera se tiene

$$\text{ch}: \tilde{K}^0(S^2) \rightarrow \tilde{H}^{\text{ev}}(S^2; \mathbb{Q}) \cong^{\text{susp}} H^{\text{odd}}(S^1; \mathbb{Q})$$

por lo tanto

$$\text{ch}(H - 1) = e^{c_1(H)} - e^{c_1(1)} = 1 + c_1(H) - 1 = c_1(H) \in \tilde{H}^2(S^2; \mathbb{Z}) \subset \tilde{H}^2(S^2; \mathbb{Q}),$$

como $c_1(H)$ es un generador, entonces al tomar el isomorfismo de suspensión seguirá siendo un generador, así que el caracter de Chern también es un isomorfismo en dimensión -1 . Con lo anterior además obtenemos que el caracter de Chern en S^1 tiene imagen en la cohomología con coeficientes enteros.

Ahora para ver que es un isomorfismo en el toro, utilizamos el teorema de Künneth para K-teoría desarrollado por Atiyah en [3]. Este teorema nos dice un resultado análogo a cohomología: Dados dos CW-complejos finitos X, Y , en donde además $K^*(Y)$ es libre, se cumple que

$$K^*(X) \otimes K^*(Y) \xrightarrow{\mu} K^*(X \times Y)$$

es un isomorfismo, en donde μ es el producto externo. Tenemos entonces un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K^*(S^1) \otimes K^*(\hat{S}^1) & \xrightarrow[\cong]{\mu} & K^*(T) \\ \text{ch} \otimes \text{ch} \downarrow \cong & & \downarrow \text{ch} \\ H^*(S^1) \otimes H^*(\hat{S}^1) & \xrightarrow[\times]{\cong} & H^*(T) \end{array}$$

de donde se sigue que la flecha de la derecha es un isomorfismo.

Sean $e_0, e_1 \in K^0(S^1), \hat{e}_0, \hat{e}_1 \in K^0(\hat{S}^1)$ tales que

$$e_0 = \text{ch}^{-1}(1), \quad e_1 = \text{ch}^{-1}(\theta)$$

y

$$\hat{e}_0 = \text{ch}^{-1}(\hat{1}), \quad \hat{e}_1 = \text{ch}^{-1}(\hat{\theta}).$$

Tenemos entonces la siguiente correspondencia bajo el diagrama conmutativo anterior:

$$\begin{aligned} \text{ch} \otimes \text{ch}(e_0 \otimes \hat{e}_0) &= 1 \otimes \hat{1}, & \text{ch} \otimes \text{ch}(e_1 \otimes \hat{e}_1) &= \theta \otimes \hat{\theta}, \\ \text{ch} \otimes \text{ch}(e_1 \otimes \hat{e}_0) &= \theta \otimes \hat{1}, & \text{ch} \otimes \text{ch}(e_0 \otimes \hat{e}_1) &= 1 \otimes \hat{\theta}. \end{aligned}$$

El mapeo $\otimes[L]$ está dado por

$$\begin{aligned} (e_0 \otimes \hat{e}_0) \otimes [L] &= e_0 \otimes \hat{e}_0 + e_1 \otimes \hat{e}_1, \\ (e_0 \otimes \hat{e}_1) \otimes [L] &= e_0 \otimes \hat{e}_1, \\ (e_1 \otimes \hat{e}_0) \otimes [L] &= e_1 \otimes \hat{e}_0, \\ (e_1 \otimes \hat{e}_1) \otimes [L] &= e_1 \otimes \hat{e}_1. \end{aligned}$$

Por el teorema de Künneth, $p^*: K^n(S^1) \rightarrow K^n(T)$ es la inclusión respectiva, sin embargo no es tan claro a dónde envía \hat{p}_i a los generadores. En [22] se nos presenta el teorema de Grothendieck–Riemann–Roch diferenciable el cual relaciona el pushforward en K-teoría con el pushforward en cohomología, este nos dice lo siguiente

$$\text{ch}(\hat{p}_!(e)) \cdot \text{Todd}(\hat{S}^1) = \hat{p}_!(\text{ch}(e) \cdot \text{Todd}(S^1 \times \hat{S}^1)), \quad e \in K^n(T)$$

en donde la clase $\text{Todd}(X)$ está dada en términos de las clases de Chern de la variedad. Supongamos que el haz tangente complexificado de la variedad es suma directa de haces lineales $TX \otimes \mathbb{C} = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$, entonces

$$\text{Todd}(X) = \prod_{i=1}^n \frac{c_1(L_i)}{1 - e^{c_1(L_i)}}.$$

También podemos calcular esta clase con la siguiente igualdad

$$\text{Todd}(X) = 1 + \frac{c_1(TX)}{2} + \frac{c_1^2(TX) + c_2(TX)}{12} + \frac{c_1(TX)c_2(TX)}{24} + \dots$$

Notemos que la cohomología de S^1 en dimensiones pares distintas de cero se anula así que

$$\text{Todd}(\hat{S}^1) = 1.$$

También tenemos que el haz tangente de $S^1 \times \tilde{S}^1$ es trivial, ya que

$$T(S^1 \times \hat{S}^1) \cong T(S^1) \oplus T(\hat{S}^1) \cong (S^1 \times \hat{S}^1) \times \mathbb{R}^2$$

por lo tanto la complexificación está dada por

$$T(S^1 \times \hat{S}^1) \otimes \mathbb{C} \cong [(S^1 \times \hat{S}^1) \times \mathbb{R}^2] \otimes \mathbb{C} = (S^1 \times \hat{S}^1) \times \mathbb{C}^2$$

así que $c_1(T(S^1 \times \tilde{S}^1) \otimes \mathbb{C}) = 0$ y la cohomología de $S^1 \times \tilde{S}^1$ en dimensiones pares mayores que 2 es cero, por lo tanto

$$\text{Todd}(S^1 \times \tilde{S}^1) = 1,$$

luego en este caso tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K^n(T) & \xrightarrow{\hat{p}_!} & K^{n-1}(\hat{S}^1) \\ \text{ch} \downarrow & & \downarrow \text{ch} \\ H^*(T) & \xrightarrow{\hat{p}_!} & H^*(\hat{S}^1) \end{array}$$

Por los cálculos del pushforward en cohomología del segundo capítulo, con ayuda del teorema de Künneth, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \hat{p}_!(1 \otimes \hat{1}) &= \langle 1, [S^1] \rangle \hat{1} = 0 \\ \hat{p}_!(1 \otimes \hat{\theta}) &= \langle 1, [S^1] \rangle \hat{\theta} = 0 \\ \hat{p}_!(\theta \otimes \hat{1}) &= \langle \theta, [S^1] \rangle \hat{1} = \pm \hat{1} \\ \hat{p}_!(\theta \otimes \hat{\theta}) &= \langle \theta, [S^1] \rangle \hat{\theta} = \pm \hat{\theta}. \end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned} \hat{p}_!(e_0 \otimes \hat{e}_0) &= 0 \\ \hat{p}_!(e_0 \otimes \hat{e}_1) &= 0 \\ \hat{p}_!(e_1 \otimes \hat{e}_0) &= \pm \hat{e}_0 \\ \hat{p}_!(e_1 \otimes \hat{e}_1) &= \pm \hat{e}_1. \end{aligned}$$

Finalmente se tiene que el mapeo de T–dualidad $T = \hat{p}_! \circ u^* \circ p^*$ satisface

$$\begin{aligned} T(e_0) &= \hat{p}_! \circ u^* \circ p^*(e_0) = \hat{p}_! \circ u^*(e_0 \otimes \hat{e}_0) = \hat{p}_!(e_0 \otimes \hat{e}_0 + e_1 \otimes \hat{e}_1) = \pm \hat{e}_1 \\ T(e_1) &= \hat{p}_! \circ u^* \circ p^*(e_1) = \hat{p}_! \circ u^*(e_1 \otimes \hat{e}_0) = \hat{p}_!(\hat{e}_1 \otimes \hat{e}_0) = \pm \hat{e}_0, \end{aligned}$$

concluimos que T es un isomorfismo. \square

Ahora bien, bajo las condiciones en que la base B es un CW–complejo finito, entonces:

Teorema 3.3.5 (Bunke–Schick). *Dados $(E, P), (\hat{E}, \hat{P})$ pares T–duales sobre B , la transformación de T–dualidad*

$$T = \hat{p}_! \circ u(h)^* \circ p^*: K^*(E, P) \rightarrow K^*(\hat{E}, \hat{P})$$

es un isomorfismo.

Antes de probar este teorema de Bunke–Schick enunciamos unas propiedades que satisface la K–teoría torcida.

Proposición 3.3.6. *Sea $p: Y \rightarrow X$ un mapeo orientado en K–teoría y $P \in T(X)$. Denotamos por $\Psi_{f,g}$ al isomorfismo de torcimientos dado por*

$$\Psi_{f,g}(-): f^* \circ g^*(-) \rightarrow (g \circ f)^*(-)$$

en donde f, g son funciones entre espacios que se pueden componer. El pushforward para K–teoría torcida satisface las siguientes propiedades:

1. (Funtorialidad). *Si $q: Z \rightarrow Y$ es un mapeo propio orientado en K–teoría, entonces tenemos que*

$$p_! \circ q_! \circ \Psi_{p,q}(P)^* = (q \circ p)_!: K^n(Z, (q \circ p)^*P) \rightarrow K^n(X, P)$$

2. (Naturalidad). *Si $g: Z \rightarrow X$ es un mapeo de manera que tenemos el siguiente diagrama pullback*

$$\begin{array}{ccc} Z \times_X Y & \xrightarrow{p^*g} & Y \\ g^*p \downarrow & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

entonces

$$(g^*p)_! \circ \Psi_{g,g^*p}(P)^* \circ (\Psi_{p,p^*g}(P)^*)^{-1} \circ (p^*g)^* = g^* \circ p_!$$

Para una demostración de estas propiedades del pushforward en K–teoría torcida véanse [17] y [10].

Proposición 3.3.7. (Mayer–Vietoris) Si $B = U \cup V$ es una descomposición por conjuntos abiertos, entonces existe una función $\phi: B \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\phi|_{B-U} = 1 \quad y \quad \phi|_{B-V} = -1.$$

Definimos el conjunto

$$A := \{b \in B \mid \phi(b) = 0\}$$

de manera que tenemos las inclusiones

$$j: A \hookrightarrow B \quad y \quad i: A \hookrightarrow U \cap V$$

Definimos las inclusiones

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{j_U} & B \\ i_U \uparrow & \nearrow r & \uparrow j_V \\ U \cap V & \xrightarrow{i_V} & V \end{array}$$

Sea $P \in T(B)$, la siguiente sucesión es exacta

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & K^{n-1}(U \cap V, r^*P) & \xrightarrow{\delta} & K^n(B, P) & \xrightarrow{(j_U^*, j_V^*)} & K^n(U, j_U^*P) \oplus K^n(V, j_V^*P) \\ & & & & & & \downarrow i_U^* - i_V^* \\ & & & & \dots & \longleftarrow & K^n(U \cap V, r^*P) \end{array}$$

en donde $\delta = j_* \circ i^*$ (δ no depende de la función ϕ).

Sea $f: A \rightarrow B$ un mapeo, utilizamos el pullback de K para definir la transformación de T -dualidad T sobre A , de manera que tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & f^*E \times_A f^*\hat{E} & \xrightarrow{G} & E \times_B \hat{E} \\ & \swarrow^{F^*p} & \searrow^{\hat{F}^*\hat{p}} & & \swarrow^p & \searrow^{\hat{p}} \\ f^*E & \xrightarrow{F} & f^*\hat{E} & \xrightarrow{\hat{F}} & E & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \hat{E} \\ & \searrow & \swarrow & \searrow^{\pi} & \swarrow & \searrow^{\hat{\pi}} \\ & & A & \xrightarrow{f} & B & & \end{array}$$

Para demostrar los siguientes lemas ignoraremos los mapeos $\Psi_{f,g}$ que puedan aparecer.

Lema 3.3.8. La transformación de T -dualidad satisface las siguientes propiedades:

$$a) T \circ F^* = \hat{F}^* \circ T$$

$$b) T \circ \delta = \hat{\delta} \circ T$$

Demostración. Para el inciso a) utilizamos la propiedad de naturalidad del push-forward

$$\begin{aligned} \hat{F} \circ T &= \hat{F}^* \circ p_! \circ u(h)^* \circ p^* \\ &= (\hat{F}^* \hat{p})_! \circ G^* \circ u(h)^* \circ p^*. \end{aligned}$$

Utilizando la naturalidad con respecto a pullbacks del mapeo inducido por isomorfismos de torcimientos, dado el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G^* \hat{p}^* \hat{P} & \xrightarrow{G^* u(h)} & G^* p^* P & & \hat{p}^* \hat{P} & \xrightarrow{u(h)} & p^* P \\ & \searrow & \swarrow & & \searrow & & \swarrow \\ & & f^* E \times_A f^* \hat{E} & \xrightarrow{G} & E \times_B \hat{E} & & \end{array}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (\hat{F}^* \hat{p})_! \circ G^* \circ u(h)^* \circ p^* &= (F^* \hat{p})_! \circ (G^* u(h))^* \circ G^* \circ p^* \\ &= (F^* \hat{p})_! \circ (G^* u(h))^* \circ (F^* p)^* \circ F^* \\ &= T \circ F^*. \end{aligned}$$

Para el inciso b), dada la descomposición de B por conjuntos abiertos

$$B = U \cup V$$

para un subconjunto $X \subset B$ hacemos

$$E_X := \pi^{-1}(X) \quad \text{y} \quad \hat{E}_X := \hat{\pi}^{-1}(X).$$

Sea $\phi: B \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\phi|_{B-U} = 1$, $\phi|_{B-V} = -1$ y

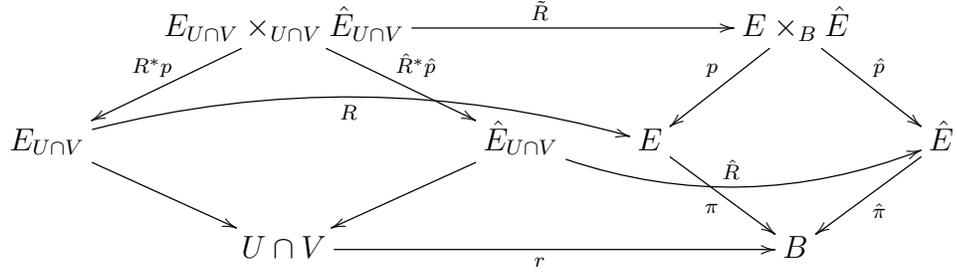
$$j: (A := \{\phi = 0\}) \hookrightarrow B.$$

Notemos que

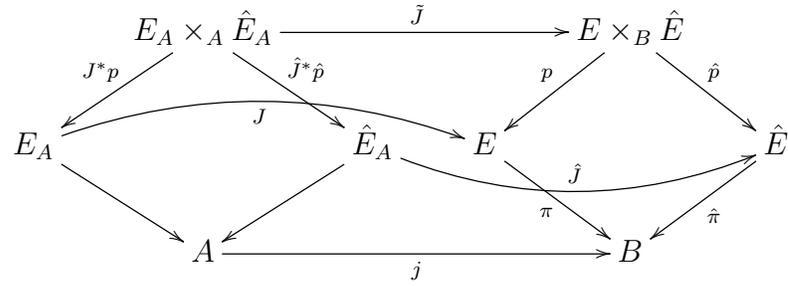
$$j: A \xrightarrow{i} U \cap V \xrightarrow{r} B$$

de manera que tenemos los diagramas

$$\begin{array}{ccccc} E_A \times_A \hat{E}_A & \xrightarrow{\hat{I}} & E_{U \cap V} \times_{U \cap V} \hat{E}_{U \cap V} & & \\ \downarrow I^* R^* p & \searrow \hat{I}^* \hat{R}^* \hat{p} & \downarrow R^* p & & \downarrow \hat{R}^* \hat{p} \\ E_A & \xrightarrow{I} & E_{U \cap V} & \xrightarrow{\hat{I}} & \hat{E}_{U \cap V} \\ & \searrow & \downarrow i & & \downarrow \\ & & A & \xrightarrow{i} & U \cap V \end{array}$$



y la composición de estos dos diagramas da como resultado el diagrama



por lo tanto, los mapeos de coborde están dados por

$$\delta = J_! \circ I^* \quad \text{y} \quad \hat{\delta} = \hat{J}_! \circ \hat{I}^*$$

así que

$$\begin{aligned}
\hat{\delta} \circ T &= \hat{J}_! \circ I^* \circ (\hat{R}^*\hat{p})_! \circ (\tilde{R}^*u(h))^* \circ (R^*p)^* \\
&= \hat{J}_! \circ (\hat{I}^*\hat{R}^*\hat{p})_! \circ (\tilde{I}^*\tilde{R}^*u(h))^* \circ (I^*R^*p)^* \circ I^* \\
&= \hat{J}_! \circ (\hat{J}^*\hat{p})_! \circ (\tilde{J}^*u(h))^* \circ (J^*p)^* \circ I^* \\
&= \hat{p}_! \circ \tilde{J}_! \circ (J^*u(h))^* \circ (J^*p)^* \circ I^* \\
&= \hat{p}_! \circ u(h)^* \circ \tilde{J}_! \circ (J^*p)^* \circ I^* \\
&= \hat{p}_! \circ u(h)^* \circ p^* \circ J_! \circ I^* \\
&= T \circ \delta.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.3.9. *El enunciado del teorema de Bunke–Schick se cumple para $B = S^n$ para toda $n \geq 0$.*

Demostración. Por inducción sobre n , supongamos que $n = 0$, entonces por la T–admisibilidad de la K–teoría torcida se tiene que la transformación de T–dualidad es un isomorfismo. Supongamos que el resultado es valido para n , entonces tomamos la descomposición por abiertos de S^{n+1} dada por

$$S^{n+1} = U \cup V$$

en donde

$$U \simeq *, \quad V \simeq * \quad \text{y} \quad U \cap V \simeq S^n,$$

luego utilizando la sucesión de Mayer–Vietoris y el Lema 3.3.2 tenemos los siguientes cuadrados conmutativos:

$$\begin{array}{ccccccc} K^{n-1}(E_U, P_U) \oplus K^{n-1}(E_V, P_V) & \longrightarrow & K^{n-1}(E_{U \cap V}, P_{U \cap V}) & \xrightarrow{\delta} & K^n(E, P) & \longrightarrow & \\ \downarrow T \oplus T & & \downarrow T & & \downarrow T & & \\ K^{n-2}(\hat{E}_U, \hat{P}_U) \oplus K^{n-2}(\hat{E}_V, \hat{P}_V) & \longrightarrow & K^{n-2}(\hat{E}_{U \cap V}, \hat{P}_{U \cap V}) & \xrightarrow{\hat{\delta}} & K^{n-1}(\hat{E}, \hat{P}) & \longrightarrow & \\ & & & & & & \\ & \longrightarrow & K^n(E_U, P_U) \oplus K^n(E_V, P_V) & \longrightarrow & K^n(E_{U \cap V}, P_{U \cap V}) & & \\ & & \downarrow T \oplus T & & \downarrow T & & \\ & \longrightarrow & K^{n-1}(\hat{E}_U, \hat{P}_U) \oplus K^{n-1}(\hat{E}_V, \hat{P}_V) & \longrightarrow & K^{n-1}(\hat{E}_{U \cap V}, \hat{P}_{U \cap V}). & & \end{array}$$

Entonces T es un isomorfismo en E_U, E_V por la T -admisibilidad y también es un isomorfismo en $E_{U \cap V}$ por la hipótesis de inducción. Por el Lema de los 5 podemos concluir que

$$T: K^n(E, P) \rightarrow K^{n-1}(\hat{E}, \hat{P}), \quad \forall n = 0, 1$$

es un isomorfismo. □

Demostración del teorema de Bunke–Schick. Sea B un CW-complejo finito y tomemos subcomplejos de B

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_n = B$$

de manera que n es el número total de celdas de todas las dimensiones de B ,

$$B_1 = e_1$$

es una 0-celda y

$$B_{i+1} = B_i \cup e_{i+1}$$

para alguna celda e_{i+1} de dimensión d_{i+1} . Por inducción sobre n , supongamos que $n = 0$, entonces por la T -admisibilidad de la K -teoría torcida se tiene que la transformación de T -dualidad es un isomorfismo. Supongamos que el resultado es válido para n , dado que

$$B_{n+1} = B_n \cup e_{n+1}$$

entonces tomamos una descomposición por abiertos de $B := B_{n+1} = U \cup V$ tal que

$$U \simeq B_n, \quad V \simeq * \quad \text{y} \quad U \cap V \simeq S^{d_{n+1}-1},$$

luego utilizando la sucesión de Mayer–Vietoris y el Lema 3.3.8 tenemos los siguientes cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc}
K^{n-1}(E_U, P_U) \oplus K^{n-1}(E_V, P_V) & \longrightarrow & K^{n-1}(E_{U \cap V}, P_{U \cap V}) & \xrightarrow{\delta} & K^n(E, P) & \longrightarrow & \\
\downarrow T \oplus T & & \downarrow T & & \downarrow T & & \\
K^{n-2}(\hat{E}_U, \hat{P}_U) \oplus K^{n-2}(\hat{E}_V, \hat{P}_V) & \longrightarrow & K^{n-2}(\hat{E}_{U \cap V}, \hat{P}_{U \cap V}) & \xrightarrow{\hat{\delta}} & K^{n-1}(\hat{E}, \hat{P}) & \longrightarrow & \\
& & \longrightarrow & & K^n(E_U, P_U) \oplus K^n(E_V, P_V) & \longrightarrow & K^n(E_{U \cap V}, P_{U \cap V}) \\
& & & & \downarrow T \oplus T & & \downarrow T \\
& & & & K^{n-1}(\hat{E}_U, \hat{P}_U) \oplus K^{n-1}(\hat{E}_V, \hat{P}_V) & \longrightarrow & K^{n-1}(\hat{E}_{U \cap V}, \hat{P}_{U \cap V}).
\end{array}$$

Notemos que T es un isomorfismo en E_U por la hipótesis de inducción, es un isomorfismo en E_V por la T -admisibilidad y también es un isomorfismo en $E_{U \cap V}$ por el Lema 3.3.9. Por el Lema de los 5 podemos concluir que

$$T: K^n(E, P) \rightarrow K^{n-1}(\hat{E}, \hat{P}), \quad \forall n = 0, 1$$

es un isomorfismo cuando la base B de los haces S^1 -principales es un CW-complejo finito. \square

El teorema anterior en realidad tiene una versión más general para teorías de cohomología torcida en el sentido de [16], dicho teorema general nos dice que basta que la transformación de T -dualidad sea un isomorfismo en la fibra para que sea un isomorfismo sobre los pares duales (el caso de las fibras resulta ser el primer paso de la inducción).

Capítulo 4

T–dualidad equivariante

Una generalización inmediata de la T–dualidad en el caso equivariante para un grupo de Lie compacto G , sería trabajar ahora con G –espacios y con haces S^1 –principales G –equivariantes. Para este tipo de espacios la cohomología y K–teoría torcida correspondiente serían los funtores G –equivariantes $H_G(-)$ y $K_G(-, -)$. Empezamos haciendo cálculos cuando la base $B = \{*\}$ para ver la posible generalización. Consideremos la siguiente definición:

Definición 4.0.1. Sea G un grupo de Lie compacto y B un G –espacio. Un par (E, h) sobre B consiste de un haz S^1 –principal G –equivariante y una clase $h \in H_G^3(E)$.

Durante esta sección analizaremos posibles T–dualidades para distintos grupos compactos de Lie G .

4.1. El caso del grupo cíclico de orden primo

Primero supongamos que $G = \mathbb{Z}/p$ con p primo. Los pares (E, h) y (\hat{E}, \hat{h}) sobre $B = \{*\}$ serían T–duales si tenemos un diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & E \times_B \hat{E} & \\ q \swarrow & & \searrow \hat{q} \\ E & & \hat{E} \\ \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\ & B = * & \end{array}$$

de manera que

$$c_1^{\mathbb{Z}/p}(\hat{E}) = \pi_!(h), \quad c_1^{\mathbb{Z}/p}(E) = \hat{\pi}_!(\hat{h}), \quad c_1^{\mathbb{Z}/p}(E) \cup c_1^{\mathbb{Z}/p}(\hat{E}) = 0 \quad \text{y} \quad q^*h = \hat{q}^*\hat{h}.$$

Primeramente calcularemos $H_{\mathbb{Z}/p}^2(*)$ para conocer los posibles haces S^1 -principales \mathbb{Z}/p -equivariantes. Recordemos que

$$H^*(B\mathbb{Z}/p) \cong \frac{\mathbb{Z}[\alpha]}{(p\alpha)}, \quad |\alpha| = 2$$

así que

$$H_{\mathbb{Z}/p}^2(*) = H^2(E\mathbb{Z}/p \times_{\mathbb{Z}/p} *) \cong H^2(B\mathbb{Z}/p) = \mathbb{Z}/p.$$

Por lo que la primera diferencia al caso no equivariante es que ahora existe más de un haz S^1 -principal sobre $*$, en este caso tenemos p posibles haces. Estos haces están relacionados con las representaciones complejas de \mathbb{Z}/p , así que para $0 < l \leq p - 1$ denotamos por S_l^1 al círculo cuya acción de \mathbb{Z}/p está dada por

$$[k] \cdot z = \omega^k z \quad \text{en donde} \quad \omega = e^{2\pi i/p} \text{ y } [k] \in \mathbb{Z}/p$$

de manera que

$$c_1^{\mathbb{Z}/p}(S_l^1) = l \in H_{\mathbb{Z}/p}^2(*) = \mathbb{Z}/p.$$

A continuación veremos la demostración de esta afirmación. Denotemos por

$$w_l: S^1 \rightarrow S^1, \quad j: \mathbb{Z}/p \rightarrow S^1$$

a los mapeos dados por

$$w_l(z) = z^l, \quad j([k]) = e^{2\pi i k/p}$$

y a

$$\gamma_l: \mathbb{Z}/p \rightarrow S^1$$

a la composición de los mapeos. Así tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/p & \xrightarrow{j} & S^1 \\ & \searrow \gamma_l & \downarrow w_l \\ & & S^1. \end{array}$$

Tomando espacios clasificantes obtendremos un diagrama que conmuta salvo homotopía

$$\begin{array}{ccc} B\mathbb{Z}/p & \xrightarrow{Bj} & BS^1 \\ & \searrow B\gamma_l & \downarrow Bw_l \\ & & BS^1. \end{array}$$

Veremos cuál es el mapeo $(Bw_l)^*: H^2(BS^1) \rightarrow H^2(BS^1)$. Escogemos $1 := c_1(ES^1)$ como generador de $H^2(BS^1)$, de esta manera utilizando el teorema de coeficientes universales tenemos que

$$\begin{array}{ccc} H^2(BS^1) & \xrightarrow{(Bw_l)^*} & H^2(BS^1) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Hom}(H_2(BS^1), \mathbb{Z}) & \xrightarrow{[(Bw_l)^*]^*} & \text{Hom}(H_2(BS^1), \mathbb{Z}). \end{array}$$

Utilizando el teorema de Hurewicz obtenemos

$$\begin{array}{ccc} H_2(BS^1) & \xrightarrow{(Bw_l)^*} & H_2(BS^1) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \pi_2(BS^1) & \xrightarrow{(Bw_l)^*} & \pi_2(BS^1) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \pi_1(S^1) & \xrightarrow{w_l^* = \times l} & \pi_1(S^1), \end{array}$$

por lo tanto concluimos que $(Bw_l)^*$ es multiplicación por l . A continuación veremos que el mapeo $Bj^*: H^2(BS^1) \rightarrow H^2(B\mathbb{Z}/n)$ manda el $1 = c_1(ES^1)$ a un generador y así tomaremos el isomorfismo $H^2(B\mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/p$ tal que $[1] = Bj^*(1)$. Tenemos una fibración

$$S^1 = S^1/\mathbb{Z}/p \longrightarrow B\mathbb{Z}/p \xrightarrow{Bj} BS^1$$

por lo tanto las páginas E_2 y E_3 de la sucesión espectral están dadas por

$$\begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline 1 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} \\ & \searrow^{\pm p} & & \\ 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} \\ \hline & 0 & 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & & \\ 0 & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}/p \\ \hline & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

respectivamente. Recordemos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \cong H^2(BS^1) & \xrightarrow{Bj^*} & H^2(B\mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/p \\ & \searrow \phi & \nearrow \psi \\ & E_\infty^{2,0} \cong \mathbb{Z}/p & \end{array}$$

en donde ϕ es sobreyectivo y ψ es inyectivo. Así ϕ manda el 1 a un generador por ser sobre y ψ manda un generador en un generador por ser inyectiva, luego Bj^* manda el 1 en un generador de $H^2(B\mathbb{Z}/p)$. Utilizaremos la siguiente propiedad de funciones inducidas entre espacios clasificantes y pull-backs: Si $f: H \rightarrow G$ entonces

$$Bf^*(EG) \cong EH \times_f G,$$

como haces G -principales. En nuestro caso obtenemos que

$$(B\gamma_l)^*(ES^1) = E\mathbb{Z}/p \times_{\gamma_l} S^1 = E\mathbb{Z}/p \times_{\mathbb{Z}/p} S_l^1.$$

Luego

$$\begin{aligned} c_1^{\mathbb{Z}/p}(S_l^1) &= c_1(E\mathbb{Z}/p \times_{\mathbb{Z}/p} S_l^1) = c_1((B\gamma_l)^*(ES^1)) = (B\gamma_l)^*c_1(ES^1) \\ &= Bj^*(Bw_l)^*c_1(ES^1) = Bj^*(l) = [l]. \end{aligned}$$

Notemos que $S_0^1 = S^1$, es decir, es el círculo con la acción trivial de \mathbb{Z}/p , de esta manera

$$c_1^{\mathbb{Z}/p}(S^1) = 0.$$

Si queremos que (S_k^1, h) y (S_l^1, \hat{h}) sean pares T-duales entonces se debe cumplir la propiedad

$$c_1^{\mathbb{Z}/p}(S_k^1) \cup c_1^{\mathbb{Z}/p}(S_l^1) = 0,$$

por la estructura del anillo de cohomología de $B\mathbb{Z}/p$ tenemos

$$c_1^{\mathbb{Z}/p}(S_k^1) \cup c_1^{\mathbb{Z}/p}(S_l^1) = k\alpha \cup l\alpha = (kl)\alpha^2,$$

luego se debe cumplir la condición

$$kl\alpha^2 = 0.$$

Se sigue que

$$p|kl, \quad 0 \leq k, l \leq p-1 \quad \Rightarrow \quad p|k \text{ ó } p|l.$$

Concluimos que

$$k = 0 \text{ ó } l = 0.$$

Supongamos que $k = 0$ y $l \neq 0$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & S^1 \times S_l^1 & \\ q \swarrow & & \searrow \hat{q} \\ S^1 & & S_l^1 \\ \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\ & B = * & \end{array}$$

Ahora los posibles valores que puede tomar \hat{h} son los siguientes:

$$\hat{h} \in H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^1) \cong H^3(S^1/(\mathbb{Z}/p)) \cong H^3(S^1) \cong 0$$

en donde hemos utilizado que la acción de \mathbb{Z}/p sobre S^1 es libre. Los posibles valores de h son los siguientes

$$h \in H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^1) \cong H^3(B\mathbb{Z}/p \times S^1) \cong H^2(B\mathbb{Z}/p) \otimes H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}/p \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p.$$

De la sucesión de Gysin para $S^1 \rightarrow *$ tenemos que $\pi_!$ es un isomorfismo. Para determinar con exactitud cómo es el mapeo $\pi_!$ utilizamos el mapeo entre coeficientes

$$\rho: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p$$

inducido en cohomología y la inclusión del espacio lente $L^{2n+1} = S^{2n+1}/\mathbb{Z}/p$ en el espacio clasificante $S^\infty/\mathbb{Z}/p = B\mathbb{Z}/p$ la cual denotaremos por

$$j: L^{2n+1} \hookrightarrow B\mathbb{Z}/p,$$

de esta manera tenemos los cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc} H^3(B\mathbb{Z}/p \times S^1; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\pi!} & H^2(B\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}) \\ \rho_* \downarrow & & \downarrow \rho_* \\ H^3(B\mathbb{Z}/p \times S^1; \mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{\pi!} & H^2(B\mathbb{Z}/p; \mathbb{Z}/p) \\ (j \times 1)^* \downarrow & & \downarrow j^* \\ H^3(L^{2n+1} \times S^1; \mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{\pi!} & H^2(L^{2n+1}; \mathbb{Z}/p). \end{array}$$

Recordemos que la cohomología del espacio L^{2n+1} con coeficientes en \mathbb{Z}/p está dada por \mathbb{Z}/p hasta $2n+1$ y es 0 después de $2n+1$, aún más dados los generadores

$$\alpha \in H^1(L^{2n+1}; \mathbb{Z}/p) \quad \text{y} \quad \beta \in H^2(L^{2n+1}; \mathbb{Z}/p)$$

tenemos que

$$H^j(L^{2n+1}; \mathbb{Z}/p) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p(\beta^i) & j = 2i \\ \mathbb{Z}/p(\alpha\beta^i) & j = 2i + 1. \end{cases}$$

Por el teorema de Künneth notemos que

$$H^3(L^{2n+1} \times S^1; \mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/p(\beta \otimes \gamma) \oplus \mathbb{Z}/p(\alpha\beta \otimes 1)$$

en donde γ es un generador de $H^1(S^1; \mathbb{Z}/p)$. Con esta descomposición podemos calcular la flecha de abajo del diagrama proponiendo que

$$\pi_!(\beta \otimes \gamma) = \beta \quad \text{y} \quad \pi_!(\alpha\beta \otimes 1) = 0$$

y viendo que

$$\langle b\pi_!(a), [L^{2n+1}] \rangle = \langle \pi^*(b)a, [L^{2n+1} \times S^1] \rangle \quad a \in H^3(L^{2n+1} \times S^1), \quad b \in H^{2n-1}(L^{2n+1}).$$

Basta probarlo para a, b generadores. Notemos que

$$\langle (\alpha\beta^{n-1})\pi_!(\beta \otimes \gamma), [L^{2n+1}] \rangle = \langle \alpha\beta^n, [L^{2n+1}] \rangle = 1$$

$$\begin{aligned} \langle \pi^*(\alpha\beta^{n-1})(\beta \otimes \gamma), [L^{2n+1} \times S^1] \rangle &= \langle (\alpha\beta^{n-1} \otimes 1)(\beta \otimes \gamma), [L^{2n+1} \times S^1] \rangle \\ &= \langle (-1)^{|1| \cdot |\beta|} (\alpha\beta^n) \otimes \gamma, [L^{2n+1} \times S^1] \rangle \\ &= \langle (\alpha\beta^n) \otimes \gamma, [L^{2n+1} \times S^1] \rangle = 1 \end{aligned}$$

$$\langle \alpha\pi_!(\alpha\beta \otimes 1), [L^{2n+1}] \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \pi^*(\alpha\beta^{n-1})(\alpha\beta \otimes 1), [L^{2n+1} \times S^1] \rangle &= \langle (\alpha\beta^{n-1} \otimes 1)(\alpha\beta \otimes 1), [L^{2n+1} \times S^1] \rangle \\ &= \langle (-1)^{|1| \cdot |\alpha\beta|} \alpha\beta^{n-1} \alpha\beta \otimes 1, [L^{2n+1} \times S^1] \rangle \\ &= \langle (-1)^{|1| \cdot |\alpha\beta|} \alpha^2 \beta^n, [L^{2n+1} \times S^1] \rangle \\ &= \langle 0, [L^{2n+1} \times S^1] \rangle = 0 \end{aligned}$$

Dado que nosotros queremos calcular $\pi_!$ en la cohomología con coeficientes enteros, entonces debemos ver lo que hacen los mapeos q_* . Notemos que de la sucesión exacta larga en cohomología asociada a la sucesión exacta corta de coeficientes

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{x} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/p \rightarrow 0$$

podemos concluir que

$$\rho_*: H^2(B\mathbb{Z}/p; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(B\mathbb{Z}/p; \mathbb{Z}/p)$$

es inyectiva. Además por la naturalidad del teorema de Künneth tenemos que el mapeo

$$\rho_*: H^3(B\mathbb{Z}/2 \times S^1; \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(B\mathbb{Z}/2 \times S^1; \mathbb{Z}/p)$$

es la inclusión en el primer sumando, luego es inyectiva. Así obtenemos que $\pi_!$ en la cohomología con coeficientes enteros es la identidad.

Notemos que $l \in H_{\mathbb{Z}/p}^3(S_l^1)$ satisface

$$\pi_!(l) = c_1^{\mathbb{Z}/p}(S_l^1),$$

así $h = l$ y $\hat{h} = 0$. Finalmente

$$q^*: H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^1) \rightarrow H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^1 \times S_l^1) \cong H^3(S^1 \times S_l^1/(\mathbb{Z}/p)) \cong H^3(S^1 \times S_l^1) = 0$$

por lo tanto

$$q^*(l) = 0 = \hat{q}^*(0),$$

luego (S^1, l) y $(S_l^1, 0)$ serían pares duales. La T–dualidad nos diría que la siguiente composición de mapeos es un isomorfismo

$$K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1, l) \xrightarrow{q^*} K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1 \times S_l^1, q^*l) \xrightarrow{u(h)} K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1 \times S_l^1, \hat{q}^*0) \xrightarrow{\hat{q}_!} K_{\mathbb{Z}/p}^1(S_l^1, 0).$$

A continuación calcularemos el mapeo p^* . Consideremos la descomposición de S^1 por cerrados \mathbb{Z}/p –invariantes, como el hemisferio norte D_+^1 cerrado y el hemisferio sur cerrado D_-^1 de manera que

$$D_+^1 \cup D_-^1 = S^1 \quad \text{y} \quad D_+^1 \cap D_-^1 = S^0.$$

Esta descomposición es posible gracias a que S^1 tiene acción trivial. Por la sucesión de Mayer–Vietoris tenemos la siguiente sucesión

$$\begin{array}{ccccc} K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1, l) & \longrightarrow & K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1, l) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1, l) & \longrightarrow & K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0, l) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_{\mathbb{Z}/p}^1(S^0, l) & \longleftarrow & K_{\mathbb{Z}/p}^1(D_+^1, l) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^1(D_-^1, l) & \longleftarrow & K_{\mathbb{Z}/p}^1(S^1, l). \end{array}$$

Dado que la restricción del torcimiento l a D_{\pm}^1 se anula ya que $H_{\mathbb{Z}/p}^3(D_{\pm}^1) = 0$ entonces l es un haz $PU(\mathcal{H})$ –principal trivial sobre los hemisferios y de igual forma sobre S^0 . Ahora bien, para distorcer la K–teoría torcida, necesitamos componer con los isomorfismos $(\varphi_+)_*$, $(\varphi_-)_*$ inducidos por las trivializaciones globales φ_+ , φ_- , de manera que tendremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1, l) & \longrightarrow & K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1, l) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1, l) & \xrightarrow{i_+^* - i_-^*} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0, l) & \longrightarrow & K_{\mathbb{Z}/p}^1(S^1, l) \\ & & \downarrow ((\varphi_+)_*, (\varphi_-)_*) & & \downarrow (\varphi_+)_* & & \\ & & K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1) & \xrightarrow{i_+^* - f_* i_-^*} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0), & & \end{array}$$

en donde $f = (\varphi_-|_{S^0})(\varphi_+|_{S^0})^{-1}$ es la función de engranaje

$$f: S^0 \times PU(\mathcal{H}) \rightarrow S^0 \times PU(\mathcal{H})$$

asociada al torcimiento l , la cual induce $f_*: K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0) \rightarrow K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0)$. Notemos que se tiene la siguiente identificación

$$H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^1) \cong H^2(B\mathbb{Z}/p) \otimes H^1(S^1) \cong^{1 \otimes \text{Susp}} H^2(B\mathbb{Z}/p) \otimes \tilde{H}^0(S^0) \cong \tilde{H}_{\mathbb{Z}/p}^2(S^0)$$

por lo tanto tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Proj}_{\mathbb{Z}/p}(S^1) & \longrightarrow & \mathrm{Proj}(E\mathbb{Z}/p \times_{\mathbb{Z}/p} S^1) & \longrightarrow & H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^1) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
\widetilde{\mathrm{Lin}}_{\mathbb{Z}/p}^{\mathbb{C}}(S^0) & \longrightarrow & \widetilde{\mathrm{Lin}}^{\mathbb{C}}(E\mathbb{Z}/p \times_{\mathbb{Z}/p} S^0) & \longrightarrow & \widetilde{H}_{\mathbb{Z}/p}^2(S^0)
\end{array}$$

en donde con

$$\widetilde{\mathrm{Lin}}_{\mathbb{Z}/p}^{\mathbb{C}} \quad \text{y} \quad \widetilde{\mathrm{Lin}}^{\mathbb{C}}(E\mathbb{Z}/p \times_{\mathbb{Z}/p} S^0)$$

nos referimos a clases de haces lineales complejos tales que el haz es trivial sobre $-1 \in S^0$. Con lo anterior y con ayuda de un teorema conocido, el mapeo f_* coincide con la multiplicación por el haz lineal $L \in \widetilde{\mathrm{Lin}}_{\mathbb{Z}/p}^{\mathbb{C}}(S^0)$ que le corresponde a l en el diagrama anterior. Notemos que

$$L = (\mathbb{C} \amalg \mathbb{C}_l) \rightarrow S^0 = \{-1\} \amalg \{1\}$$

en donde \mathbb{C} es un haz vectorial lineal con acción trivial, mientras que \mathbb{C}_l son los complejos con la acción de multiplicar por potencias de $\omega = e^{2\pi li/p}$.

Nota. Con el haz lineal

$$(\mathbb{C} \amalg \mathbb{C}_l) \rightarrow S^0 = \{-1\} \amalg \{1\}$$

nos referimos a que \mathbb{C} es el haz lineal complejo que se encuentra sobre el -1 y \mathbb{C}_l es el haz lineal complejo que se encuentra sobre 1 . De ahora en adelante utilizaremos esta notación.

Utilizando la descomposición de la K-teoría equivariante cuando el espacio tiene acción trivial, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1) & \xrightarrow{i_+^* - f_* i_-^*} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0) \\
\cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
K^0(D_+^1) \otimes R(\mathbb{Z}/p) \oplus K^0(D_-^1) \otimes R(\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{i_+^* - f_* i_-^*} & K^0(S^0) \otimes R(\mathbb{Z}/p)
\end{array}$$

Dado que en los siguientes cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
K^0(D_{\pm}^1) \otimes R(\mathbb{Z}/p) & \xrightarrow{i_{\pm}^* \otimes 1} & K^0(S^0) \otimes R(\mathbb{Z}/p) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Z} \otimes R(\mathbb{Z}/p) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \otimes R(\mathbb{Z}/p) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R(\mathbb{Z}/p) & \longrightarrow & R(\mathbb{Z}/p)^2
\end{array}$$

la flecha de abajo manda $x \mapsto (x, x)$, entonces podemos olvidarnos del producto tensorial. Denotemos por ρ_j a la representación compleja de multiplicación por potencias de $e^{2\pi ij/p}$. De esta manera ρ_0 sería la representación trivial y

$$R(\mathbb{Z}/p) \cong \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathbb{Z}\rho_i.$$

Entonces el mapeo

$$i_+^* - f_* i_-^* : R(\mathbb{Z}/p) \oplus R(\mathbb{Z}/p) \rightarrow R(\mathbb{Z}/p)^2$$

está dado por

$$i_+^* - f_* i_-^* \left(\sum_{i=0}^{p-1} m_i \rho_i, \sum_{i=0}^{p-1} n_i \rho_i \right) = \left(\sum_{i=0}^{p-1} (m_i - n_i) \rho_i, \sum_{i=0}^{p-1} (m_i - n_{[i-l]}) \rho_i \right)$$

así que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(i_+^* - f_* i_-^*) &= \left\{ \left(\sum_{i=0}^{p-1} m_i \rho_i, \sum_{i=0}^{p-1} n_i \rho_i \right) \left| m_i = n_i, m_i = n_{[i-l]} \right. \right\} \\ &= \left\{ \left(\sum_{i=0}^{p-1} m_i \rho_i, \sum_{i=0}^{p-1} n_i \rho_i \right) \left| m_0 = m_{[-l]} = m_{[-2l]} = \cdots = m_{[-(p-1)l]} \right. \right\} \\ &= \left\{ \left(\sum_{i=0}^{p-1} m \rho_i, \sum_{i=0}^{p-1} m \rho_i \right) \left| m \in \mathbb{Z} \right. \right\} \\ &= \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Podemos identificar $\text{Ker}(i_+^* - f_* i_-^*) = K^0(S^1, l)$ por unos ceros que aparecen en la

sucesión de Mayer–Vietoris, como vemos a continuación

$$\begin{array}{c}
K_{\mathbb{Z}/p}^1(S^0) = 0 \\
\downarrow \\
K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1, l) \\
\downarrow \\
K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1) \\
\downarrow i_+^* - f_* i_-^* \\
K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0) \\
\downarrow \\
K_{\mathbb{Z}/p}^1(S^1, l) \\
\downarrow \\
K_{\mathbb{Z}/p}^1(D_+^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^1(D_-^1) = 0
\end{array}$$

Para calcular el mapeo q^* utilizaremos la naturalidad de la sucesión de Mayer–Vietoris, de manera que utilizamos la misma descomposición del círculo S^1 con acción trivial pero ahora visto como una descomposición del toro $S^1 \times S_l^1$, notemos que en este caso el torcimiento sobre el toro satisface

$$q^*(l) = 0.$$

De esta manera este cálculo se reduce a la K–teoría \mathbb{Z}/p –equivariante no torcida, así tendremos la sucesión de Mayer–Vietoris

$$\begin{array}{ccccc}
K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1 \times S_l^1) & \longrightarrow & K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1 \times S_l^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1 \times S_l^1) & \xrightarrow{i_+^* - f'_* i_-^*} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0 \times S_l^1) \\
\uparrow & & & & \downarrow \\
K_{\mathbb{Z}/p}^1(S^0 \times S_l^1) & \longleftarrow & K_{\mathbb{Z}/p}^1(D_+^1 \times S_l^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^1(D_-^1 \times S_l^1) & \longleftarrow & K_{\mathbb{Z}/p}^1(S^1 \times S_l^1)
\end{array}$$

y q^* induce un mapeo entre estas sucesiones exactas.

Para identificar estos grupos de K–teoría equivariante en el toro utilizamos el siguiente teorema de Künneth desarrollado por Haruo Minami [38]

Teorema 4.1.1 (Minami). *Sean X y Y espacios compactos Hausdorff en los cuales actúan los grupos de Lie G y H respectivamente. Si los espacios de órbitas*

X/G y Y/H son de dimensión de recubrimiento finita y X (ó Y) es localmente G - (ó H -) contráctil entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=k} K_G^i(X) \otimes K_H^j(Y) \xrightarrow{\mu} K_{G \times H}^k(X \times Y) \rightarrow \bigoplus_{i+j=k+1} \text{Tor}(K_G^i(X), K_H^j(Y)) \rightarrow 0$$

en donde $i, j, k \in \mathbb{Z}/2$ y μ es el producto externo.

Con ayuda del teorema, por ejemplo podríamos calcular el mapeo inducido por la función de engranaje $f'_*: K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0 \times S_l^1) \rightarrow K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0 \times S_l^1)$, el cual se espera sea la identidad ya que la K -teoría equivariante torcida se redujo a la K -teoría equivariante no torcida. Tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0 \times S_l^1) & \xrightarrow{f'_* = -\otimes L'} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0 \times S_l^1) \\ \mu \uparrow & & \uparrow \mu \\ K^0(S^0) \otimes K_{\mathbb{Z}/p}^0(S_l^1) & \longrightarrow & K^0(S^0) \otimes K_{\mathbb{Z}/p}^0(S_l^1) \end{array}$$

en donde $L' = q^*(L) = S_l^1 \times (\mathbb{C} \amalg \mathbb{C}_l) \rightarrow S^0 \times S_l^1$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \mu[(\mathbb{C}^x \amalg \mathbb{C}^y) \otimes (S_l^1 \times \mathbb{C}^m)] &= q^*(\mathbb{C}^x \amalg \mathbb{C}^y) \otimes \hat{q}^*(S_l^1 \times \mathbb{C}^m) \\ &= [S_l^1 \times (\mathbb{C}^x \amalg \mathbb{C}^y)] \otimes (S^0 \times S_l^1 \times \mathbb{C}^m) \\ &= S_l^1 \times (\mathbb{C}^{mx} \amalg \mathbb{C}^{my}) \end{aligned}$$

luego

$$[S_l^1 \times (\mathbb{C}^{mx} \amalg \mathbb{C}^{my})] \otimes L' = S_l^1 \times (\mathbb{C}^{mx} \amalg \mathbb{C}_l^{my})$$

dado que

$$\mu[(\mathbb{C}^x \amalg \mathbb{C}^y) \otimes (S_l^1 \times \mathbb{C}_l^m)] = S_l^1 \times (\mathbb{C}^{mx} \amalg \mathbb{C}_l^{my})$$

y además como $[S_l^1 \times \mathbb{C}_l^m] = [S_l^1 \times \mathbb{C}^m] \in K_{\mathbb{Z}/p}^0(S_l^1) \cong K^0(S_l^1/\mathbb{Z}/p) = K^0(S^1) = \mathbb{Z}$ entonces podemos concluir que la flecha de abajo del diagrama es la identidad.

Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1 \times S_l^1) \otimes K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1 \times S_l^1) & \xrightarrow{\cong} & K^0(D_+^1) \oplus K^0(D_-^1) \\ \downarrow i_+^* - i_-^* & & \downarrow i_+^* - i_-^* \\ K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0 \times S_l^1) & \xrightarrow{\cong} & K^0(S^0) \end{array}$$

por lo tanto

$$(i_+^* - i_-^*)(m, n) = (m - n, m - n).$$

Así que el diagrama entre sucesiones de Mayer–Vietoris inducido por q^* es el siguiente

$$\begin{array}{ccc}
0 & & K_{\mathbb{Z}/p}^1(S^0 \times S_l^1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1, l) & \xrightarrow{q^*} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1 \times S_l^1,) \\
\downarrow & & \downarrow (j_+^*, j_-^*) \\
K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1) & \xrightarrow{(q^*, q^*)} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1 \times S_l^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1 \times S_l^1) \\
\downarrow i_+^* - f_* i_-^* & & \downarrow i_+^* - i_-^* \\
K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0) & \xrightarrow{q^*} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^0 \times S_l^1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_{\mathbb{Z}/p}^1(S^1, l) & \xrightarrow{q^*} & K_{\mathbb{Z}/p}^1(S^1 \times S_l^1, l) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & K_{\mathbb{Z}/p}^1(D_+^1 \times S_l^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^1(D_-^1 \times S_l^1).
\end{array}$$

De la misma manera, con la ayuda del teorema de Minami calculamos el mapeo

$$(q^*, q^*): K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1) \rightarrow K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1 \times S_l^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1 \times S_l^1)$$

de manera que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1) & \xrightarrow{(q^*, q^*)} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1 \times S_l^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1 \times S_l^1) \\
\uparrow (\mu, \mu) & & \uparrow (\mu, \mu) \\
K_{\mathbb{Z}/p}^0(*) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(*) & \xrightarrow{(c^*, c^*)} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(S_l^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(S_l^1)
\end{array}$$

por lo tanto

$$(q^*, q^*) \left(\sum m_i \rho_i, \sum n_i \rho_i \right) = (c^*, c^*) \left(\sum m_i \rho_i, \sum n_i \rho_i \right) = \left(\sum m_i, \sum n_i \right)$$

Por la identificación de $K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1, l) = \text{Ker}(i_+^* - f_* i_-^*)$ y el primer diagrama conmutativo de arriba tenemos que la composición

$$(j_+^*, j_-^*) p^* \left(\sum m \rho_i, \sum m \rho_i \right) = (q^*, q^*) \left(\sum m \rho_i, \sum m \rho_i \right) = (pm, pm).$$

Utilizando la naturalidad del producto externo en el teorema de Minami vemos que

$$j_{\pm}^*: K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1 \times S_l^1) \rightarrow K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_{\pm}^1 \times S_l^1),$$

se reduce a

$$j_{\pm}^*: [K^0(S^1) \otimes K_{\mathbb{Z}/p}^0(S_l^1)] \oplus [K^1(S^1) \otimes K_{\mathbb{Z}/p}^1(S_l^1)] \rightarrow K^0(D_{\pm}^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(S_l^1)$$

por lo tanto

$$(j_+^*, j_-^*)(m, n) = (m, m).$$

Por desgracia el cuadrado conmutativo de la sucesión de Mayer–Vietoris solo muestra que el homomorfismo

$$q^*: \mathbb{Z} \cong K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1, l) \rightarrow K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1 \times S_l^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

es de la forma

$$q^*(m) = (pm, \varphi(m))$$

para cierto homomorfismo $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$.

Para terminar el cálculo del mapeo q^* y saber exactamente quién es el homomorfismo φ anterior, utilizaremos la descripción de la K–teoría torcida $K_{\mathbb{Z}/p}^0(X, \alpha)$ como la construcción de Grothendieck del conjunto de clases de isomorfismo de \mathbb{Z}/p –haces α –torcidos sobre X . Como referencia mencionamos el artículo de Dwyer [21] en donde se desarrolla la K–teoría torcida para torcimientos α que son elementos de torsión, el cual resulta ser nuestro caso. Otra referencia que recomendamos es [9].

Nuestro primer paso es calcular el mapeo inducido por la función \mathbb{Z}/p –equivariante

$$i: * \rightarrow S^1$$

utilizando una vez más la naturalidad de la sucesión de Mayer–Vietoris. Tenemos el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \cong K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1, l) & \xrightarrow{i^*} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(*, i^*l) \cong R(\mathbb{Z}/p) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \Delta \\ R(\mathbb{Z}/p)^2 \cong K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_+^1) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(D_-^1) & \xrightarrow{\cong} & K_{\mathbb{Z}/p}^0(*) \oplus K_{\mathbb{Z}/p}^0(*) \cong R(\mathbb{Z}/p)^2 \end{array}$$

en donde la flecha de abajo es un isomorfismo ya que $D_{\pm}^1 \simeq_{\mathbb{Z}/p} *$. Así calculamos que

$$\Delta i^*(m) = \psi(m) = \left(\sum m\rho_i, \sum m\rho_i \right)$$

es decir

$$(i^*(m), i^*(m)) = \left(\sum m\rho_i, \sum m\rho_i \right)$$

y por lo tanto

$$i^*(m) = \sum m\rho_i.$$

En particular, es inyectiva. Tenemos que

$$K_{\mathbb{Z}/p}^0(*, i^*l) \cong \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathbb{Z}V_i$$

en donde V_i son haces torcidos lineales sobre $*$ que corresponden a las representaciones ρ_i bajo el isomorfismo de destorcimiento. De esta manera se tiene que el haz torcido $S^1 \times (V_0 \oplus \cdots \oplus V_{p-1})$ es tal que

$$i^*(S^1 \times (V_0 \oplus \cdots \oplus V_{p-1})) = * \times (V_0 \oplus \cdots \oplus V_{p-1}).$$

De esta manera podemos calcular

$$q^*: K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1, l) \rightarrow K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1 \times S_l^1, q^*l) \xrightarrow{F} K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1 \times S_l^1) \xrightarrow{(r^*)^{-1}} K^0(S^1 \times S^1),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (r^*)^{-1}Fq^*(S^1 \times (V_0 \oplus \cdots \oplus V_{p-1})) &= (r^*)^{-1}F(S^1 \times S_l^1 \times (V_0 \oplus \cdots \oplus V_{p-1})) \\ &= (r^*)^{-1}(S^1 \times S_l^1 \times (\rho_0 \oplus \cdots \oplus \rho_{p-1})) \\ &= S^1 \times S^1 \times \mathbb{C}^p. \end{aligned}$$

Como

$$K^0(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}H,$$

en donde H es el pullback del haz de Bott bajo el cociente

$$S^1 \times S^1 \rightarrow S^2,$$

podemos concluir que $q^*: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ es

$$q^*(m) = (pm, 0).$$

Con el resultado anterior vemos que la transformación de T-dualidad

$$\hat{q}_! \circ u(h)^* \circ q^*: K_{\mathbb{Z}/p}^*(S^1, l) \rightarrow K_{\mathbb{Z}/p}^1(S_l^1, 0)$$

nunca será un isomorfismo, a pesar de que ambos grupos son isomorfos.

$$K_{\mathbb{Z}/p}^0(S^1, l) \cong \ker(i_+^* - f_*i_-^*) \cong \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad K_{\mathbb{Z}/p}^1(S_l^1, 0) \cong K^1(S_l^1/\mathbb{Z}/p) \cong K^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Con lo anterior hemos probado el siguiente teorema

Teorema 4.1.2. *En general la transformación de T-dualidad no necesariamente es un isomorfismo en el caso \mathbb{Z}/p -equivariante con p primo.*

Este teorema muestra que la conjetura hecha por Gomi en la Sección 5.7 del artículo [24] es falsa con la generalización equivariante directa de la transformación de T-dualidad. Él realiza el siguiente comentario: “Debe existir una T-dualidad equivariante en donde un haz S^1 -principal equivariante aparece como T-dual de otro haz S^1 -principal equivariante y únicamente está involucrada la cohomología equivariante de Borel” y menciona que este resultado al menos se debe cumplir para $\mathbb{Z}/2$.

4.1.1. Existencia de una clase de Thom equivariante

Las clases de Thom son importantes para la T-dualidad ya que nos permiten conectar las clases h y \hat{h} de los pares T-duales, de hecho Bunke y Schick utilizan estas clases de Thom para definir a los pares T-duales (ver la Definición 2.9 de [16]). A continuación analizaremos la existencia de una clase de Thom en la cohomología equivariante de S^3 , es posible que necesitemos tomar una acción de \mathbb{Z}/p sobre S^3 de manera que la homotopía $h: S^1 \times S^1 \rightarrow S^3$ sea equivariante. Por este motivo una acción sobre S^3 que hace equivariante a la homotopía anterior es la siguiente:

$$[k] \cdot (z, w) = (z, \omega^k w) \quad \text{en donde} \quad \omega = e^{2\pi i/p} \text{ y } [k] \in \mathbb{Z}/p.$$

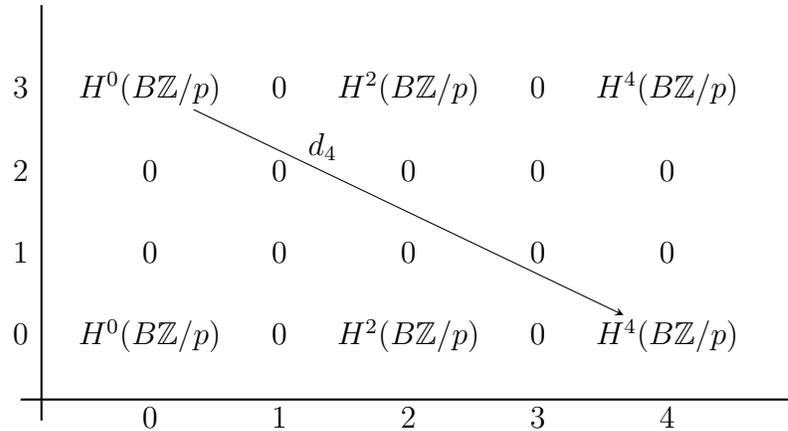
Lo primero que hay que notar de esta acción es que no es libre ya que hay puntos fijos para cada $[k]$

$$[k](z, 0) = (z, 0).$$

Para calcular $H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^3)$ utilizamos el haz fibrado

$$S^3 \rightarrow EZ/p \times_{\mathbb{Z}/p} S^3 \rightarrow BZ/p.$$

De esta manera la acción de $\pi_1(BZ/p) \cong \mathbb{Z}/p$ sobre $H^*(S^3)$ está dada simplemente por los mapeos inducidos en cohomología de los homeomorfismos $L_{[k]}: S^3 \rightarrow S^3$. Estos mapeos son rotaciones en la segunda entrada compleja. Como una rotación es composición de dos reflexiones, podemos concluir que el grado de estos homeomorfismos es $(-1)^2 = 1$, luego la acción del grupo fundamental sobre la cohomología de la fibra es trivial. Tenemos la siguiente sucesión espectral en donde $E_2^{p,q} = E_3^{p,q} = E_4^{p,q}$



y la única diferencial que podría ser distinta de cero es d_4 , pero dado que estamos en un haz esférico, se sigue que d_4 es multiplicación por la segunda clase de Chern equivariante de S_l^3 ,

$$c_2^{\mathbb{Z}/p}(S_l^3) = c_2^{\mathbb{Z}/p}(S(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_l)) = c_2^{\mathbb{Z}/p}(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_l) = c_1^{\mathbb{Z}/p}(\mathbb{C}) \cup c_1^{\mathbb{Z}/p}(\mathbb{C}_l) = 0 \cup l = 0$$

así obtenemos

$$H_{\mathbb{Z}/p}^3(S_l^3) \cong H^0(B\mathbb{Z}/p; H^3(S^3)) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, recordemos que el segundo grupo de cohomología de $S^1 \times S_l^1$ lo podemos calcular sin la sucesión espectral, ya que la acción en este toro es libre:

$$H_{\mathbb{Z}/p}^2(S^1 \times S_l^1) \cong H^2(S^1 \times S_l^1/(\mathbb{Z}/p)) = H^2(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, si seguimos el procedimiento análogo al caso no equivariante nos gustaría saber qué hace el mapeo inducido en cohomología por la proyección

$$S_l^3 \xrightarrow{q} S_l^3/(S^1 \cup S_l^1) \xrightarrow[r \cong]{} \Sigma(S^1 \times S_l^1)$$

Para calcular q^* , utilizamos primero la descomposición usual de la 3-esfera como la unión de dos toros sólidos, pero hay que ver que esta descomposición es equivariante. Tenemos que

$$S_l^3 = A \cup B \cong S^1 \times D_l^2 \cup D^2 \times S_l^1$$

en donde

$$A = \left\{ (z, w) \in S_l^3 \mid |z|^2 \geq \frac{1}{2} \geq |w|^2 \right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{ (z, w) \in S_l^3 \mid |z|^2 \leq \frac{1}{2} \leq |w|^2 \right\}.$$

Notemos que A y B son invariantes bajo la acción. Por otro lado, la descomposición $\varphi: S_l^3 \rightarrow S^1 \times D_l^2 \cup D^2 \times S_l^1$ está dada por

$$\varphi(z, w) = \begin{cases} \left(\frac{z}{|z|}, \sqrt{2}w \right) & (z, w) \in A \\ \left(\sqrt{2}z, \frac{w}{|w|} \right) & (z, w) \in B, \end{cases}$$

y es fácil ver que es una descomposición equivariante. Utilizando la sucesión de Mayer–Vietoris para cerrados, obtenemos la sucesión

$$\cdots H_{\mathbb{Z}/p}^2(S^1 \times S_l^1) \rightarrow H_{\mathbb{Z}/p}^3(S_l^3) \xrightarrow{(j_A^*, j_B^*)} H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^1) \oplus H_{\mathbb{Z}/p}^3(S_l^1) \xrightarrow{i_A^* - i_B^*} H^3(S^1 \times S_l^1) \cdots$$

Como $H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^1 \times S^1) = 0$ y $H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^1) = 0$, entonces $i_A^* - i_B^* = 0$, así que $j_A^*: H_{\mathbb{Z}/p}^3(S_l^3) \rightarrow H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^1)$ es sobre. Así que

$$j_A^*(m) = [km] \quad \text{para algún } k \text{ con } 0 < k \leq p-1$$

así

$$\text{Ker } j_A^* = p\mathbb{Z}.$$

Ahora utilizando la sucesión del par para

$$q: S_l^3 \rightarrow S_l^3 / (S^1 \cup S_l^1)$$

tenemos la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_{\mathbb{Z}/p}^3(S_l^3 / (S^1 \cup S_l^1)) \xrightarrow{q^*} H_{\mathbb{Z}/p}^3(S_l^3) \xrightarrow{(j_A^*, j_B^*)} H_{\mathbb{Z}/p}^3(S^1) \oplus H_{\mathbb{Z}/p}^3(S_l^1) \rightarrow \cdots$$

en donde hemos utilizado que la inclusión $j: S^1 \rightarrow S_l^3$ satisface

$$\varphi j \text{pr}_1 \simeq_{\mathbb{Z}/p} j_A: S^1 \cup D_l^2 \rightarrow S^1 \times D_l^2 \cup D^2 \times S_l^1.$$

Aprovechando el cálculo del kernel de j_A^* obtenemos que

$$\text{Im } q^* = \text{Ker } j_A^* = p\mathbb{Z}$$

así que $q^*: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ es multiplicación por p .

Con el cálculo anterior podemos observar una diferencia al caso no equivariante, ya no podemos identificar la cohomología equivariante en dimensión 3 de S_l^3 con la cohomología equivariante en dimensión 3 de $\Sigma(S^1 \times S_l^1)$ por medio del mapeo

$$S_l^3 \xrightarrow{q} S_l^3 / (S^1 \cup S_l^1) \xrightarrow[\cong]{r} \Sigma(S^1 \times S_l^1)$$

como hicimos en la demostración del Lema 3.3.3.

4.2. El caso del grupo cíclico de orden 4

En el apartado anterior estudiamos la T-dualidad en el caso en que $G = \mathbb{Z}/p$, de igual manera nos gustaría analizar que sucede en un ámbito más general. Desafortunadamente los cálculos que veremos a continuación muestran la dificultad que pueden llegar a tener ciertos casos.

Supongamos que $G = \mathbb{Z}/4$ y haremos un cálculo parecido al que hicimos en la sección anterior. Los pares (E, h) y (\hat{E}, \hat{h}) sobre $B = \{*\}$ serían T-duales si

tenemos un diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & E \times_B \hat{E} & \\
 p \swarrow & & \searrow \hat{p} \\
 E & & \hat{E} \\
 \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\
 & B = \{*\} &
 \end{array}$$

de manera que

$$c_1^{\mathbb{Z}/4}(\hat{E}) = \pi_!(h), \quad c_1^{\mathbb{Z}/4}(E) = \hat{\pi}_!(\hat{h}) \quad c_1^{\mathbb{Z}/4}(E) \cup c_1^{\mathbb{Z}/4}(\hat{E}) = 0 \quad \text{y} \quad p^*h = \hat{p}^*\hat{h}$$

Recordemos que el anillo de cohomología de $B\mathbb{Z}/4$ con coeficientes enteros está dado por

$$H^*(B\mathbb{Z}/4) \cong \frac{\mathbb{Z}[\alpha]}{(4\alpha)}, \quad |\alpha| = 2,$$

así que

$$H_{\mathbb{Z}/4}^2(*) = H^2(B\mathbb{Z}/4) = \mathbb{Z}/4.$$

Los haces S^1 -principales $\mathbb{Z}/4$ -equivariantes están clasificados por este grupo, además estos haces están relacionados con las representaciones complejas de $\mathbb{Z}/4$. Siguiendo la notación del apartado anterior, consideremos ahora S_2^1 , el cual consiste del círculo cuya acción de $\mathbb{Z}/4$ está dada por

$$[k] \cdot z = \omega^k z \quad \text{en donde} \quad \omega = e^{4\pi i/4} \quad \text{y} \quad [k] \in \mathbb{Z}/4$$

es decir, si $[k] \in \mathbb{Z}/4$ se tiene

$$[k] \cdot z = (-1)^k z.$$

Este haz S^1 -principal $\mathbb{Z}/4$ -equivariante satisface

$$c_1^{\mathbb{Z}/4}(S_2^1) = 2 \quad \text{y} \quad c_1^{\mathbb{Z}/4}(S_2^1) \cup c_1^{\mathbb{Z}/4}(S_2^1) = 4\alpha^2 = 0$$

así que podemos considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 & S_2^1 \times S_2^1 & \\
 p \swarrow & & \searrow \hat{p} \\
 S_2^1 & & S_2^1 \\
 \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\
 & B = \{*\} &
 \end{array}$$

La dificultad para mostrar las propiedades de T-dualidad se debe a que esta acción no es libre porque [2] deja fijo a todo el círculo. Para calcular $H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1)$ utilizamos la sucesión de Gysin asociada al haz $\pi: S_2^1 \rightarrow \{*\}$, de esta manera obtenemos

$$\cdots \longrightarrow H_{\mathbb{Z}/4}^3(*) \xrightarrow{\pi^*} H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1) \xrightarrow{\pi_!} H_{\mathbb{Z}/4}^2(*) \xrightarrow{c_1^{\mathbb{Z}/4}(S_2^1)} H_{\mathbb{Z}/4}^4(*) \longrightarrow \cdots$$

Como

$$H_{\mathbb{Z}/4}^3(*) = 0, \quad H_{\mathbb{Z}/4}^2(*) = \mathbb{Z}/4 = H_{\mathbb{Z}/4}^4(*) \quad \text{y} \quad c_1^{\mathbb{Z}/4}(S_2^1) = 2$$

entonces $H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1)$ es el kernel de multiplicar por 2 entre $\mathbb{Z}/4$, es decir

$$H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1) \cong \text{Ker}(2 \times) = \{0, 2\} \cong \mathbb{Z}/2$$

y además $\pi_!$ es la inclusión del kernel en $\mathbb{Z}/4$, es decir

$$\pi_!(1) = 2.$$

Por lo tanto los candidatos a pares T-duales, serían $(S_2^1, 1)$ y $(S_2^1, 1)$, sin embargo tenemos que probar que

$$p^*(1) = \hat{p}^*(1).$$

Calcularemos los grupos de cohomología $\mathbb{Z}/4$ -equivariante de S_2^1 utilizando la sucesión espectral asociada al haz fibrado

$$S^1 \rightarrow E\mathbb{Z}/4 \times_{\mathbb{Z}/4} S_2^1 \xrightarrow{\pi} B\mathbb{Z}/4.$$

El grupo $\pi_1(B\mathbb{Z}/4) = \mathbb{Z}/4$ actúa de manera trivial sobre $H^*(S^1)$ ya que únicamente estamos actuando por rotaciones y el grado de las rotaciones es 1. Por lo tanto tenemos la siguiente sucesión espectral

2	0	0	0	0	0
1	\mathbb{Z}	0	$\mathbb{Z}/4$	0	$\mathbb{Z}/4$
0	\mathbb{Z}	0	$\mathbb{Z}/4$	0	$\mathbb{Z}/4$
	0	1	2	3	4

$\swarrow d_2$ $\swarrow d_2$

en donde la diferencial d_2 está dada por

$$d_2 = c_1^{\mathbb{Z}/4}(S_2^1) \cup - = 2 \times -.$$

Así que

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{Z}/4}^1(S_2^1) &= \text{Ker}(2 \times) = 2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \\ H_{\mathbb{Z}/4}^2(S_2^1) &= \text{Coker}(2 \times) = (\mathbb{Z}/4)/\{0, 2\} \cong \mathbb{Z}/2 \\ H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1) &= \text{Ker}(\times 2) = \{0, 2\} \cong \mathbb{Z}/2 \\ H_{\mathbb{Z}/4}^2(S_2^1) &= \text{Coker}(2 \times) = (\mathbb{Z}/4)/\{0, 2\} \cong \mathbb{Z}/2 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$H_{\mathbb{Z}/4}^k(S_2^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 1 \\ \mathbb{Z}/2 & k \neq 0, 1. \end{cases}$$

Utilizando la sucesión de Gysin obtenemos

$$H_{\mathbb{Z}/4}^0(*) \xrightarrow{2 \times -} H_{\mathbb{Z}/4}^2(*) \xrightarrow{\pi^*} H_{\mathbb{Z}/4}^2(S_2^1) \xrightarrow{\pi!} H_{\mathbb{Z}/4}^1(*)$$

que se convierte en

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2 \times -} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\pi!} 0$$

luego

$$\{0, 2\} = \text{Im}(2 \times) = \text{Ker}(\pi^*) \Rightarrow \pi^*(2) = 0.$$

Notemos que $p: S_2^1 \times S_2^1 \rightarrow S_2^1$ es un haz S^1 -principal $\mathbb{Z}/4$ -equivariante. Luego la clase de Chern $c_1^{\mathbb{Z}/4}(S_2^1 \times S_2^1) \in H_{\mathbb{Z}/4}^2(S_2^1)$ satisface

$$c_1^{\mathbb{Z}/4}(S_2^1 \times S_2^1) = c_1^{\mathbb{Z}/4}(\pi^*(S_2^1)) = \pi^* c_1^{\mathbb{Z}/4}(S_2^1) = \pi^*(2) = 0$$

Utilizando la sucesión de Gysin para p

$$H_{\mathbb{Z}/4}^1(S_2^1) \xrightarrow{0} H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1) \xrightarrow{p^*} H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1 \times S_2^1) \xrightarrow{p!} H_{\mathbb{Z}/4}^2(S_2^1) \xrightarrow{0} H^4(S_2^1)$$

de donde obtenemos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{p^*} H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1 \times S_2^1) \xrightarrow{p!} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

Análogamente obtenemos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\hat{p}^*} H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1 \times S_2^1) \xrightarrow{\hat{p}!} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0.$$

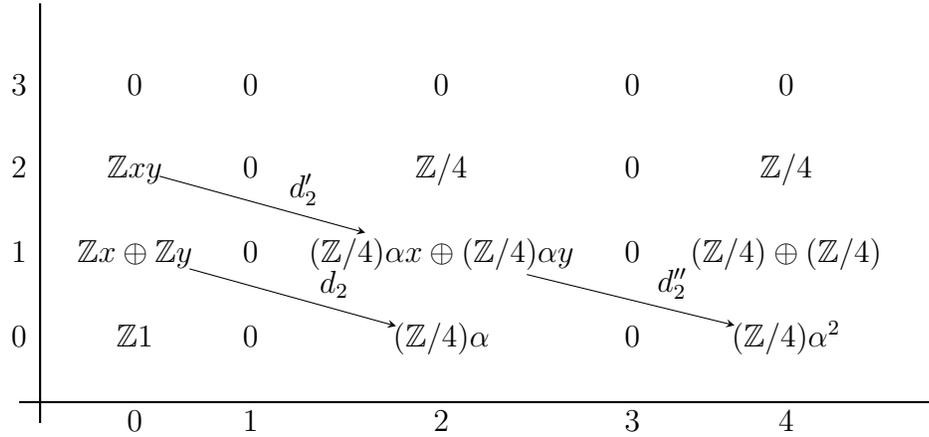
Para calcular $H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1 \times S_2^1)$ utilizamos la sucesión espectral asociada al haz fibrado

$$S^1 \times S^1 \rightarrow E\mathbb{Z}/4 \times_{\mathbb{Z}/4} (S_2^1 \times S_2^1) \rightarrow B\mathbb{Z}/4$$

identificando

$$H^1(S_2^1 \times S_2^1) \cong \mathbb{Z}x \oplus \mathbb{Z}y$$

obtenemos la sucesión espectral



Aprovechando el cálculo de d_2 en la sucesión espectral de $\pi: S_2^1 \rightarrow \{*\}$ tenemos que

$$d_2(x) = 2\alpha \quad \text{y} \quad d_2(y) = 2\alpha.$$

Utilizando la estructura multiplicativa de la sucesión espectral y la propiedad de derivación de d_2, d'_2, d''_2 tenemos que

$$\begin{aligned} d'_2(xy) &= d_2(x)y + (-1)^{|x|}x d_2(y) \\ &= (2\alpha)y - x(2\alpha) \\ &= 2\alpha y - 2\alpha x \\ &= 2\alpha y + 2\alpha x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d''_2(\alpha x) &= d_2(\alpha)x + (-1)^{|\alpha|}\alpha d_2(x) \\ &= 2\alpha^2. \end{aligned}$$

De la misma manera

$$d''_2(\alpha y) = 2\alpha^2.$$

Como consecuencia los mapeos están dados por

$$d'_2(m) = (2m, 2m), \quad d''_2(m, n) = 2m + 2n$$

calculando el kernel y la imagen de d_2'' y d_2' respectivamente obtenemos

$$\begin{aligned}\text{Ker}(d_2'') &= \{(m, n) \in \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4 \mid m + n = 2k\} \\ &= \{(0, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (3, 3), (3, 1)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Im}(d_2') &= \{(2m, 2m) \in \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/4 \mid m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(0, 0), (2, 2)\}.\end{aligned}$$

De la sucesión espectral se tiene que

$$H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1 \times S_2^1) \cong \frac{\text{Ker}(d_2''')}{\text{Im}(d_2')}.$$

Notemos que el orden de este cociente es 4 y además todos los elementos de este grupo tienen orden 2, luego

$$H_{\mathbb{Z}/4}^3(S_2^1 \times S_2^1) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Por la naturalidad de la sucesión espectral, obtenemos mapeos

$$p_\infty^* : E_\infty^{2,1}(S_2^1) \rightarrow E_\infty^{2,1}(S_2^1 \times S_2^1) \quad \text{y} \quad \hat{p}_\infty^* : E_\infty^{2,1}(S_2^1) \rightarrow E_\infty^{2,1}(S_2^1 \times S_2^1)$$

de manera que

$$p^*(1) = p_\infty^*(2) = [(2, 0)] \quad \text{y} \quad \hat{p}^*(1) = \hat{p}_\infty^*(2) = [(0, 2)].$$

Notemos que

$$(2, 0) - (0, 2) = (2, -2) = (2, 2) \quad \Rightarrow \quad [(2, 0)] = [(0, 2)],$$

luego

$$p^*(1) = \hat{p}^*(1).$$

Lo anterior nos permite concluir que los pares $(S_2^1, 1)$ y $(S_2^1, 1)$ son T-duales.

4.3. El caso del círculo

Finalmente analizaremos un caso T-admisibles cuando $G = S^1$. Empezamos calculando $H_{S^1}^2(*)$ que clasifica a los haces S^1 -principales S^1 -equivariantes:

$$H_{S^1}^2(*) = H^2(\mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{Z}.$$

Por el cálculo anterior hay una clase de isomorfismo de haces S^1 -principales S^1 -equivariantes por cada entero, estos haces lo denotaremos como \tilde{S}_n^1 en donde la acción de S^1 está dada por

$$z \cdot w = z^n \cdot w.$$

De esta manera se tiene que

$$c_1^{S^1}(S_n^1) = n \in H_{S^1}^2(*).$$

El caso que analizaremos es el siguiente

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{S}_0^1 \times \tilde{S}_1^1 & \\ p \swarrow & & \searrow \hat{p} \\ \tilde{S}_0^1 & & \tilde{S}_1^1 \\ \pi \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\ & B = \{*\} & \end{array}$$

en donde identificaremos $\tilde{S}_0^1 = S^1$ el círculo con la acción trivial de S^1 . Notemos que la acción de S^1 sobre \tilde{S}_1^1 es libre, así que

$$H_{S^1}^3(\tilde{S}_1^1) = H_{S^1}^3(\tilde{S}_1^1/S^1) = H^3(*) = 0.$$

Por otro lado S^1 tiene acción trivial

$$H_{S^1}^3(S^1) = H^3(\mathbb{C}P^\infty \times S^1) = H^2(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Utilizando el cálculo anterior obtenemos que

$$\hat{\pi}_!: H_{S^1}^3(\tilde{S}_1^1) \rightarrow H_{S^1}^2(*)$$

es el homomorfismo cero y

$$\hat{h} = 0 \in H_{S^1}^3(S^1).$$

De la sucesión de Gysin para $\pi: S^1 \rightarrow *$ obtenemos que $\pi_!$ es un isomorfismo. Sin embargo, con este argumento aún no podemos saber si es el isomorfismo multiplicación por -1 o la identidad. Veremos a continuación que es la identidad. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{S^1}^3(S^1) & \xrightarrow{\pi_!} & H_{S^1}^2(*) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^3(\mathbb{C}P^\infty \times S^1) & \xrightarrow{\pi_!} & H^2(\mathbb{C}P^\infty) \\ (\iota \times 1)^* \downarrow & & \downarrow \iota^* \\ H^3(\mathbb{C}P^n \times S^1) & \xrightarrow{\pi_!} & H^2(\mathbb{C}P^n) \end{array}$$

en donde $\iota: \mathbb{C}P^n \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ es la inclusión. Sean $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n)$ y $\beta \in H^1(S^1)$ generadores, podemos calcular la flecha de abajo del diagrama proponiendo que

$$\pi_1(\alpha \otimes \beta) = \alpha$$

y veremos que

$$\langle b\pi_1(a), [\mathbb{C}P^n] \rangle = \langle \pi^*(b)a, [\mathbb{C}P^n \times S^1] \rangle \quad a \in H^3(\mathbb{C}P^n \times S^1), \quad b \in H^{2n-2}(\mathbb{C}P^n).$$

Basta probarlo para a, b generadores. Notemos que

$$\langle \alpha^{n-1}\pi_1(\alpha \otimes \beta), [\mathbb{C}P^n] \rangle = \langle \alpha^n, [\mathbb{C}P^n] \rangle = 1$$

$$\begin{aligned} \langle \pi^*(\alpha^{n-1})(\alpha \otimes \beta), [\mathbb{C}P^n \times S^1] \rangle &= \langle (\alpha^{n-1} \otimes 1)(\alpha \otimes \beta), [\mathbb{C}P^n \times S^1] \rangle \\ &= \langle (-1)^{|1| \cdot |\alpha|}(\alpha^n \otimes \beta), [\mathbb{C}P^n \times S^1] \rangle \\ &= \langle (\alpha^n \otimes \beta), [\mathbb{C}P^n \times S^1] \rangle = 1. \end{aligned}$$

Finalmente notemos que

$$p^*: H_{S^1}^3(S^1) \rightarrow H_{S^1}^3(S^1 \times \tilde{S}_1^1) \cong H^3(S^1 \times \tilde{S}_1^1/S^1) \cong H^3(S^1) = 0$$

de donde obtenemos que $p^*(h) = 0 = \hat{p}^*(\hat{h})$. Concluimos que los pares $(S^1, 1)$ y $(\tilde{S}_1^1, 0)$ son T-duales.

A continuación calcularemos el mapeo p^* de una manera similar al caso \mathbb{Z}/p -equivariante. Consideremos la descomposición de S^1 de la sección anterior por cerrados D_+^1 y D_-^1 de manera que

$$D_+^1 \cup D_-^1 = S^1 \quad \text{y} \quad D_+^1 \cap D_-^1 = S^0.$$

Una vez más esto es posible gracias a que S^1 tiene acción trivial. Como

$$H_{S^1}^3(D_\pm^1) = 0$$

entonces la restricción del torcimiento 1 sobre D_\pm^1 es un haz $PU(\mathcal{H})$ -principal trivial y de igual forma sobre S^0 . Una vez más tenemos el siguiente diagrama utilizando la sucesión de Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccc} K_{S^1}^0(S^1, 1) & \longrightarrow & K_{S^1}^0(D_+^1, 1) \oplus K_{S^1}^0(D_-^1, 1) & \xrightarrow{i_+^* - i_-^*} & K_{S^1}^0(S^0, 1) & \longrightarrow & K_{S^1}^1(S^1, 1) \\ & & \downarrow ((\varphi_+)_*, (\varphi_-)_*) & & \downarrow (\varphi_+)_* & & \\ & & K_{S^1}^0(D_+^1) \oplus K_{S^1}^0(D_-^1) & \xrightarrow{i_+^* - f_* i_-^*} & K_{S^1}^1(S^1), & & \end{array}$$

en donde f es la función de engranaje $f: S^0 \times PU(\mathcal{H}) \rightarrow S^0 \times PU(\mathcal{H})$ asociada al torcimiento 1, la cual induce $f_*: K_{S^1}^0(S^0) \rightarrow K_{S^1}^0(S^0)$. Dado que tenemos la identificación

$$H_{S^1}^3(S^1) \cong H^2(BS^1) \otimes H^1(S^1) \stackrel{1 \otimes S^{usp}}{\cong} H^2(BS^1) \otimes \tilde{H}^0(S^0) \cong \tilde{H}_{S^1}^2(S^0)$$

entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \text{Proj}_{S^1}(S^1) & \longrightarrow & \text{Proj}(ES^1 \times_{S^1} S^1) & \longrightarrow & H_{S^1}^3(S^1) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \widetilde{\text{Lin}}_{S^1}^{\mathbb{C}}(S^0) & \longrightarrow & \widetilde{\text{Lin}}^{\mathbb{C}}(ES^1 \times_{S^1} S^0) & \longrightarrow & \tilde{H}_{S^1}^2(S^0) \end{array}$$

por lo tanto f_* coincide con multiplicación por el haz lineal $L \in \widetilde{\text{Lin}}_{S^1}^{\mathbb{C}}(S^0)$ que le corresponde a 1 en el diagrama anterior. Por lo tanto tenemos que

$$L = \mathbb{C} \amalg \tilde{\mathbb{C}}_1 \rightarrow S^0 = \{-1\} \amalg \{1\}$$

en donde \mathbb{C} es el haz vectorial lineal trivial sobre $\{-1\}$ con acción trivial, mientras que $\tilde{\mathbb{C}}_1$ es el haz vectorial lineal trivial sobre $\{1\}$ con la acción de S^1 dada por multiplicación compleja. Utilizando la descomposición de la K-teoría equivariante cuando el espacio tiene acción trivial, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K_{S^1}^0(D_+^1) \oplus K_{S^1}^0(D_-^1) & \xrightarrow{i_+^* - f_* i_-^*} & K_{S^1}^0(S^0) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ K^0(D_+^1) \otimes R(S^1) \oplus K^0(D_-^1) \otimes R(S^1) & \xrightarrow{i_+^* - f_* i_-^*} & K^0(S^0) \otimes R(S^1) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ R(S^1) \oplus R(S^1) & \xrightarrow{i_+^* - f_* i_-^*} & R(S^1) \oplus R(S^1). \end{array}$$

Denotemos por ρ_j a la representación compleja de multiplicación por elementos de S^1 a la potencia j , de esta manera ρ_0 sería la representación trivial y además

$$R(S^1) \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rho_j.$$

De esta manera vemos que el mapeo

$$i_+^* - f_* i_-^*: R(S^1) \oplus R(S^1) \rightarrow R(S^1) \oplus R(S^1)$$

está dado por

$$(i_+^* - f_* i_-^*)((m_j)_{j \in \mathbb{Z}}, (n_j)_{j \in \mathbb{Z}}) = ((m_j - n_j)_{j \in \mathbb{Z}}, (m_j - n_{j-1})_{j \in \mathbb{Z}}).$$

Así obtenemos que

$$\text{Ker}(i_+^* - f_*i_-^*) = 0.$$

Como

$$(i_+^* - f_*i_-^*)(\rho_j, 0) = (\rho_j, \rho'_j) \quad \text{y} \quad (i_+^* - f_*i_-^*)(0, \rho'_j) = (-\rho'_j, -\rho'_{j+1})$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{Coker}(i_+^* - f_*i_-^*) &= \frac{(\bigoplus \mathbb{Z}\rho_j) \oplus (\bigoplus \mathbb{Z}\rho'_j)}{(\bigoplus \mathbb{Z}(\rho_j, \rho'_j)) \oplus (\bigoplus \mathbb{Z}(\rho_j, \rho'_{j+1}))} \\ &= \frac{(\bigoplus \mathbb{Z}(\rho_j, \rho'_j)) \oplus (\bigoplus \mathbb{Z}\rho'_j)}{(\bigoplus \mathbb{Z}(\rho_j, \rho'_j)) \oplus (\bigoplus \mathbb{Z}(\rho'_{j+1} - \rho'_j))} \\ &= \frac{\bigoplus \mathbb{Z}\rho'_j}{\bigoplus \mathbb{Z}(\rho'_{j+1} - \rho'_j)} \\ &= \frac{(\mathbb{Z}\rho'_0) \oplus (\bigoplus \mathbb{Z}(\rho'_{j+1} - \rho'_j))}{\bigoplus \mathbb{Z}(\rho'_{j+1} - \rho'_j)} \\ &= \mathbb{Z}\rho'_0, \end{aligned}$$

en donde el isomorfismo $\varphi: \text{Coker}(i_+^* - f_*i_-^*) \rightarrow \mathbb{Z}$ está dado por

$$\varphi[(m_j)_{j \in \mathbb{Z}}, (n_j)_{j \in \mathbb{Z}}] = \sum (n_j - m_j)$$

y

$$\varphi^{-1}(a) = [0, a\rho'_0]$$

Utilizando la misma descomposición del círculo S^1 con acción trivial anterior pero ahora vista como una descomposición del toro $S^1 \times \tilde{S}_1^1$ tendremos la sucesión de Mayer–Vietoris una vez más con la ventaja de que el torcimiento $p^*(1)$ satisface

$$p^*(1) = 0.$$

Este cálculo se reduce entonces a la K–teoría S^1 –equivariante no torcida y p^* induce un mapeo entre estas sucesiones exactas, pero hay que tener en cuenta la descomposición de $p^*(l)$. Notemos que

$$\begin{aligned} K_{S^1}^1(S^0) &= K^1(S^0) \otimes R(S^1) = 0 \\ K_{S^1}^1(D_\pm^1) &= K(D_\pm^1) \otimes R(S^1) = 0 \\ K_{S^1}^1(S^0 \times \tilde{S}_1^1) &= (K^0(S^0) \otimes K_{S^1}^1(\tilde{S}_1^1)) \oplus (K^1(S^0) \otimes K_{S^1}^0(\tilde{S}_1^1)) = 0 \\ K_{S^1}^1(D_\pm^1 \times \tilde{S}_1^1) &= (K^0(D_\pm^1) \otimes K_{S^1}^1(\tilde{S}_1^1)) \oplus (K^1(D_\pm^1) \otimes K_{S^1}^0(\tilde{S}_1^1)) = 0, \end{aligned}$$

en donde hemos utilizado propiedades de la K-teoría cuando la acción es libre y cuando es trivial.

Ahora bien, calcularemos el mapeo inducido por la función engranaje

$$f'_*: K_{S^1}^0(S^0 \times \tilde{S}_1^1) \rightarrow K_{S^1}^0(S^0 \times \tilde{S}_1^1).$$

Es claro que f'_* es producto tensorial con el haz lineal

$$L' = p^*(L) = \tilde{S}_1^1 \times (\mathbb{C} \amalg \tilde{\mathbb{C}}_1) \rightarrow S^0 \times \tilde{S}_1^1,$$

así que tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K_{S^1}^0(S^0 \times \tilde{S}_1^1) & \xrightarrow{-\otimes L'} & K_{S^1}^0(S^0 \times \tilde{S}_1^1) \\ q^* \uparrow & & \uparrow q^* \\ K^0(S^0 \times *) & \longrightarrow & K^0(S^0 \times *) \end{array}$$

en donde $q: S^0 \times \tilde{S}_1^1 \rightarrow (S^0 \times \tilde{S}_1^1)/S^1 \cong S^0 \times *$ es el cociente. Luego

$$\begin{aligned} q^*[* \times (\mathbb{C}^m \amalg \mathbb{C}^n)] \otimes L' &= [\tilde{S}_1^1 \times (\mathbb{C}^m \amalg \mathbb{C}^n)] \otimes L' \\ &= \tilde{S}_1^1 \times (\mathbb{C}^m \amalg \tilde{\mathbb{C}}_1^n) \end{aligned}$$

y como

$$(q^*)^{-1}[\tilde{S}_1^1 \times (\mathbb{C}^m \amalg \tilde{\mathbb{C}}_1^n)] = \tilde{S}_1^1 \times (\mathbb{C}^m \amalg \mathbb{C}^n)$$

concluimos que la flecha de abajo es la identidad. Continuando con lo anterior, tenemos el siguiente diagrama conmutativo utilizando la naturalidad de la sucesión de Mayer–Vietoris, en donde las columnas son sucesiones exactas cortas:

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{S^1}^0(S^1, 1) & \xrightarrow{p^*} & K_{S^1}^0(S^1 \times \tilde{S}_1^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{S^1}^0(D_+^1) \oplus K_{S^1}^0(D_-^1) & \xrightarrow{(p^*, p^*)} & K_{S^1}^0(D_+^1 \times \tilde{S}_1^1) \oplus K_{S^1}^0(D_-^1 \times \tilde{S}_1^1) \\ i_+^* - f_* i_-^* \downarrow & & \downarrow i_+^* - i_-^* \\ K_{S^1}^0(S^0) & \xrightarrow{p^*} & K_{S^1}^0(S^0 \times \tilde{S}_1^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_{S^1}^1(S^1, 1) & \xrightarrow{p^*} & K_{S^1}^1(S^1 \times \tilde{S}_1^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

El mapeo $p^*: K_{S^1}^0(S^1, 1) \rightarrow K_{S^1}^0(S^1 \times \tilde{S}_1^1)$ es cero ya que

$$K_{S^1}^0(S^1, 1) \cong \text{Ker}(i_+^* - f_* i_-^*) = 0.$$

Como

$$K_{S^1}^1(\tilde{S}_1^1) = K^1(\tilde{S}_1^1/S^1) = K^1(*) = 0,$$

en este caso el mapeo de T-dualidad es un isomorfismo por ser un mapeo entre grupos triviales

$$T = \hat{p}_! \circ u(h)^* \circ p^*: K_{S^1}^0(S^1, 1) \rightarrow K_{S^1}^1(\tilde{S}_1^1).$$

Por otro lado para calcular $p^*: K_{S^1}^1(S^1, 1) \rightarrow K_{S^1}^0(S^1 \times \tilde{S}_1^1)$, por el diagrama ya tenemos que

$$K_{S^1}^1(S^1, 1) \cong \text{Coker}(i_+^* - f_* i_-^*) = \mathbb{Z}$$

así que de igual manera podemos calcular $K_{S^1}^1(S^1 \times \tilde{S}_1^1)$ como $\text{Coker}(i_+^* - i_-^*)$ de la segunda columna. Notemos que

$$i_+^* - i_-^*: K^0(*) \oplus K^0(*) \rightarrow K^0(*) \oplus K^0(*)$$

está dado por

$$(i_+^* - i_-^*)(m, n) = (m - n, m - n)$$

así obtenemos

$$\text{Coker}(i_+^* - i_-^*) = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}(1, 1)} \cong \mathbb{Z}$$

en donde el isomorfismo $\psi: \text{Coker}(i_+^* - i_-^*) \rightarrow \mathbb{Z}$ está dado por

$$\psi([m, n]) \mapsto n - m$$

Así que lo único que nos falta es calcular el mapeo

$$p^*: K_{S^1}^0(S^0) \rightarrow K_{S^1}^0(S^0 \times \tilde{S}_1^1)$$

el cual podemos calcular gracias a que la acción de S^1 sobre S^0 es trivial y sobre $S^0 \times \tilde{S}_1^1$ es libre. Por lo tanto tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} K_{S^1}^0(S^0) & \xrightarrow{p^*} & K_{S^1}^0(S^0 \times \tilde{S}_1^1) \\ \mu \uparrow \cong & & \cong \uparrow q^* \\ K^0(S^0) \otimes R(S^1) & \longrightarrow & K^0(S^0 \times \{*\}) \end{array}$$

de esta manera

$$\begin{aligned} p^* \mu((\mathbb{C}^k \amalg \mathbb{C}^l) \otimes \Sigma m_j \rho_j) &= p^* \left(\bigoplus_j \tilde{\mathbb{C}}_j^{km_j} \amalg \bigoplus_j \tilde{\mathbb{C}}_j^{lm_j} \right) \\ &= \tilde{S}_1^1 \times \left(\bigoplus_j \tilde{\mathbb{C}}_j^{km_j} \amalg \bigoplus_j \tilde{\mathbb{C}}_j^{lm_j} \right) \end{aligned}$$

y notemos que

$$\begin{aligned}
(q^*)^{-1} \left[\tilde{S}_1^1 \times \left(\oplus \tilde{\mathbb{C}}_j^{km_j} \amalg \oplus \tilde{\mathbb{C}}_j^{lm_j} \right) \right] &= \frac{\tilde{S}_1^1 \times \left(\oplus \tilde{\mathbb{C}}_j^{km_j} \amalg \oplus \tilde{\mathbb{C}}_j^{lm_j} \right)}{S^1} \\
&= \{*\} \times \left(\oplus \mathbb{C}^{km_j} \amalg \oplus \mathbb{C}^{lm_j} \right) \\
&= \{*\} \times \left(\mathbb{C}^{\Sigma km_j} \amalg \mathbb{C}^{\Sigma lm_j} \right) \\
&= (\mathbb{C}^k \amalg \mathbb{C}^l) \otimes (\{*\} \times \mathbb{C}^{\Sigma m_j})
\end{aligned}$$

en donde en la última igualdad estamos haciendo la identificación

$$K^0(S^0 \times \{*\}) \cong K^0(S^0) \otimes K^0(*)$$

por lo tanto $p^*: R(S^1)^2 \rightarrow K^0(*)^2$ está dado por

$$p^*((m_j)_{j \in \mathbb{Z}}, (n_j)_{j \in \mathbb{Z}}) = \left(\sum m_j, \sum n_j \right)$$

y así podemos calcular $p^*: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ con los isomorfismos entre \mathbb{Z} y los conúcleos, es decir

$$\begin{array}{ccc}
K_{S^1}^1(S^1, 1) & \xrightarrow{p^*} & K_{S^1}^1(S^1 \times \tilde{S}_1^1) \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{p^*} & \mathbb{Z}
\end{array}$$

así que

$$p^*(a) = (\psi p^* \varphi^{-1})(a) = (\psi p^*)([0, a\rho'_0]) = \psi[0, a] = a.$$

4.4. Una posible T–dualidad equivariante

Como pudimos notar en el caso de $G = \mathbb{Z}/p$, la transformación de T–dualidad G –equivariante falla en ser un isomorfismo, esto es porque el mapeo p^* de la composición manda el 1 al $(p, 0)$ de manera que la transformación de T–dualidad es la composición de homomorfismos

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{p^*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{u(h)^*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\hat{p}_!} \mathbb{Z}$$

y esto nunca será un isomorfismo de \mathbb{Z} en \mathbb{Z} , sin embargo, los grupos involucrados aún siguen siendo isomorfos. Lo anterior nos permite conjeturar que al tomar el producto tensorial con \mathbb{Q} logremos obtener un isomorfismo, haciendo esto el mapeo de multiplicación por 2 nos dará un isomorfismo. Los pasos a seguir para probar la T–dualidad equivariante tomando los grupos de K–teoría involucrados tensorizados con \mathbb{Q} serían los siguientes:

1. T–dualidad \mathbb{Z}/p –equivariante con K–teoría \mathbb{Z}/p –equivariante tensorizada con \mathbb{Q} .
2. T–dualidad \mathbb{Z}/p^k –equivariante y lo interesante sería ver si es posible reducirse al caso 1 mediante la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p^{k-1} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^k \longrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow 0$$

3. T–dualidad \mathbb{Z}/n –equivariante $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$.
4. T–dualidad S^1 –equivariante.

En el trabajo nos concentramos en realizar cálculos cuando $B = *$ porque en la demostración del teorema de Bunke y Schick este fue el primer paso de la inducción sobre el número total de celdas del CW–complejo B , para probar que la transformación de T–dualidad era un isomorfismo. En el caso S^1 –equivariante nos deberíamos de concentrar en hacer una inducción sobre el número de celdas ahora de un S^1 –CW–complejo finito B y en el caso base nos reducimos a un espacio de órbitas, de manera que también nos tenemos que fijar en los subgrupos cerrados de S^1 de una manera similar a la que realiza Gomi en la demostración del Teorema 1.2 de [24]. Es por esta razón que debemos de analizar la T–dualidad en el caso \mathbb{Z}/n –equivariante.

4.5. La cohomología y K–teoría R

Una generalización exitosa de T–dualidad equivariante para el caso de $\mathbb{Z}/2$ –espacios la podemos encontrar en [24]. En este contexto, el autor desarrolla isomorfismos de T–dualidad para el caso de haces S^1 –principales $\pi: E \rightarrow X$, en donde E, X son $\mathbb{Z}/2$ –espacios tal que π es una función equivariante, de manera que la acción $\tau: E \rightarrow E$ del elemento no trivial en $\mathbb{Z}/2$, satisface la siguiente propiedad con respecto a la S^1 –acción derecha en E :

$$\tau(eu) = \tau(e)u^{-1} \quad \forall e \in E, u \in S^1$$

Gomi llama a estos haces, haces Reales de círculos y Reales en el sentido de Atiyah [4]. Resulta que estos haces están clasificados por una teoría de cohomología $\mathbb{Z}/2$ –equivariante H_{\pm} , la cual está muy relacionada con la cohomología $\mathbb{Z}/2$ –equivariante $H_{\mathbb{Z}/2}$. De igual forma Gomi establece el isomorfismo de T–dualidad utilizando la K–teoría K_{\pm} que de igual forma esta relacionada con la K–teoría $\mathbb{Z}/2$ equivariante $K_{\mathbb{Z}/2}$. En esta sección proponemos un candidato de K–teoría S^1 –equivariante análogo a K_{\pm} y de cohomología S^1 –equivariante análogo a H_{\pm} que podrían dar lugar a una T–dualidad en un futuro trabajo.

4.5.1. La cohomología \mathbf{R}

Generalizando las ideas en [24] para el caso de S^1 -espacios X , nos va a interesar entonces la siguiente variante de la cohomología equivariante de Borel entera para S^1 .

Definición 4.5.1. Sea X un S^1 -espacio, entonces definimos la siguiente cohomología

$$H_R^n(X) := H_{S^1}^{n+2}(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1; \mathbb{Z})$$

en donde \tilde{D}^2 y \tilde{S}^1 están dotados de la acción por multiplicación compleja viendo a $D^2, S^1 \subseteq \mathbb{C}$ y el producto de espacios está dotado por la acción en cada entrada.

En el caso en que tenemos un subespacio invariante $Y \subset X$, definimos los grupos relativos $H_R^n(X, Y)$ como

$$H_R^n(X, Y) = H_R^n(X, Y; \mathbb{Z}) = H_{S^1}^{n+2}(X \times \tilde{D}^2, Y \times \tilde{D}^2 \cup X \times \tilde{S}^1; \mathbb{Z})$$

la anterior definición nos permite recuperar $H_{S^1}^*$ a partir de H_R^* .

Proposición 4.5.2. Para cualquier S^1 -espacio y $n \in \mathbb{Z}$, tenemos un isomorfismo

$$H_{S^1}^n(X) = H_R^{n+2}(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1)$$

Demostración. Sea X un S^1 -espacio, entonces definimos el siguiente haz vectorial complejo S^1 -equivariante

$$\pi: \underline{\mathbb{C}}_2 := X \times \mathbb{C}^2 \rightarrow X$$

en donde la acción izquierda en $\underline{\mathbb{C}}_2$ está dada por

$$l_u(x, z_1, z_2) = (\tilde{l}_u(x), uz_1, uz_2).$$

Notemos que olvidando la S^1 -acción en $\underline{\mathbb{C}}_2$, este haz vectorial es trivial, por lo tanto

$$\det V \cong X \times \mathbb{C}$$

y así utilizando el isomorfismo de Thom para el caso en que el torcimiento es trivial, obtenemos que

$$\begin{aligned} H_{S^1}^n(X) &\cong H_{S^1}^{\pi^*(\det V) + n + 4}(D(\underline{\mathbb{C}}_2), S(\underline{\mathbb{C}}_2)) \\ &\cong H_{S^1}^{n+4}(X \times \tilde{D}^4, X \times \tilde{S}^3) \\ &\cong H_{S^1}^{n+4}(X \times \tilde{D}^2 \times \tilde{D}^2, (X \times \tilde{S}^1 \times \tilde{D}^2) \cup X \times \tilde{D}^2 \times \tilde{S}^1) \\ &\cong H_R^{n+2}(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1) \end{aligned} \quad \square$$

Por la definición de H_R utilizando la cohomología S^1 -equivariante, tenemos que H_R consiste de una teoría de cohomología S^1 -equivariante, por lo tanto se cumplen los axiomas de homotopía, escisión, la sucesión exacta larga del par y el axioma de aditividad. También tenemos que

$$H_R^n(\Sigma X) \cong H_R^{n-1}(X)$$

que se hereda directamente del isomorfismo de suspensión para $H_{S^1}^n$.

Lema 4.5.3. \tilde{D}^2 es contráctil de manera S^1 -equivariante.

Demostración. Consideremos la homotopía que se utiliza para probar que D^2 sin acción es contráctil y veamos que es S^1 -equivariante. Tenemos que $H: \tilde{D}^2 \times I \rightarrow \tilde{D}^2$ está dada por

$$H(z, t) = tz$$

notemos que

$$H(z, 0) = 0 \quad \text{y} \quad H(z, 1) = z = Id_{\tilde{D}^2}(z)$$

así que basta probar que H es S^1 -equivariante. Sea $u \in S^1$, notemos que

$$H(l_u(z, t)) = H(uz, t) = t(uz) = u(tz) = uH(z, t) = l_u(H(z, t)). \quad \square$$

Para calcular los grupos H_R el siguiente resultado es útil

Proposición 4.5.4. Sea X un S^1 -espacio, entonces existen sucesiones exactas largas naturales

$$\cdots \rightarrow H_R^{n-2}(X) \xrightarrow{\delta} H_{S^1}^n(X) \xrightarrow{\iota^*} H^n(X) \rightarrow H_R^{n-1}(X) \rightarrow \cdots$$

y

$$\cdots \rightarrow H_{S^1}^{n-2}(X) \xrightarrow{\delta'} H_R^n(X) \xrightarrow{j^*} H^n(X) \rightarrow H_{S^1}^{n-1}(X) \rightarrow \cdots$$

en donde ι^*, j^* son los mapeos naturales que olvidan la acción.

Demostración. Utilizando la sucesión exacta larga del par $(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1)$ para la cohomología S^1 -equivariante $H_{S^1}^n$ obtenemos la sucesión exacta

$$\cdots \rightarrow H_{S^1}^n(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1) \rightarrow H_{S^1}^n(X \times \tilde{D}^2) \xrightarrow{\iota^*} H_{S^1}^n(X \times \tilde{S}^1) \rightarrow \cdots$$

Por definición tenemos que

$$H_{S^1}^n(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1) = H_R^{n-2}(X).$$

Del lema anterior tenemos

$$H_{S^1}^n(X \times \tilde{D}^2) \cong H_{S^1}^n(X).$$

mientras que

$$H_{S^1}^n(X \times \tilde{S}^1) = H^n((X \times \tilde{S}^1)_{S^1}) = H^n(ES^1 \times_{S^1} (X \times \tilde{S}^1))$$

Dado que S^1 actúa de manera libre sobre \tilde{S}^1 , entonces S^1 actúa de manera libre sobre $X \times \tilde{S}^1$ ya que si

$$(x, z) = l_u(x, z) = (l_u(x), uz)$$

entonces $uz = z$ de donde obtenemos que $u = 1$. Como la acción es libre, entonces

$$ES^1 \times_{S^1} (X \times \tilde{S}^1) \simeq (X \times \tilde{S}^1)/S^1$$

Consideremos el mapeo $\varphi: (X \times \tilde{S}^1)/S^1 \rightarrow X$ dado por

$$\varphi([x, z]) = z^{-1} \cdot x.$$

Notemos que este mapeo está bien definido ya que

$$\varphi([u \cdot x, uz]) = (uz)^{-1}u \cdot x = z^{-1}u^{-1}u \cdot x = z^{-1} \cdot x,$$

además claramente es continua por ser composición de funciones continuas y por la topología cociente. Su inversa está dada por $\psi: X \rightarrow (X \times \tilde{S}^1)/S^1$

$$\psi(x) = [x, 1],$$

en efecto, notemos que

$$(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi([x, 1]) = x$$

y

$$\psi \circ \varphi([x, z]) = \psi(z^{-1} \cdot x) = [z^{-1} \cdot x, 1] = [x, z].$$

Por lo tanto

$$(X \times \tilde{S}^1)/S^1 \cong S^1$$

luego

$$H_{S^1}^n(X \times \tilde{S}^1) \cong H^n(X).$$

Para la otra sucesión exacta, nos fijamos en la sucesión exacta para el par $(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1)$ pero ahora para la cohomología H_R^n , por lo tanto tenemos

$$\cdots \rightarrow H_R^n(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1) \rightarrow H_R^n(X \times \tilde{D}^2) \rightarrow H_R^n(X \times \tilde{S}^1) \rightarrow \cdots$$

Por la proposición anterior sabemos que

$$H_R^n(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1) \cong H_{S^1}^{n-2}(X).$$

por el Lema 4.5.3, también

$$H_R^n(X \times \tilde{D}^2) \cong H_R^n(X),$$

finalmente notemos que

$$\begin{aligned} H_R^n(X \times \tilde{S}^1) &= H_{S^1}^{n+2}(X \times \tilde{S}^1 \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^1) \\ &= H^{n+2}((X \times \tilde{S}^1 \times \tilde{D}^2)_{S^1}, (X \times \tilde{S}^1 \times \tilde{S}^1)_{S^1}) \\ &\cong H^{n+2}(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1) \\ &\cong H^{n+2}(\Sigma^2 X_+) \cong H^n(X) \end{aligned} \quad \square$$

4.5.2. La K-teoría R

De la misma manera que definimos la cohomología R podemos definir de manera análoga la K-teoría R .

Definición 4.5.5. Sea X un S^1 -espacio, $\tau \in T_{S^1}(X)$ entonces definimos la siguiente K-teoría

$$K_R^{\tau+n}(X) := K_{S^1}^{\tau+n}(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1).$$

Cuando τ es trivial, escribimos $K_R^n(X) = K_R^{\tau+n+1}(X)$.

Nota. Dado que $\tau \in T_{S^1}(X)$ cuando nos referimos a la K-teoría S^1 equivariante del par $(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1)$ estrictamente τ debe ser un torcimiento sobre $X \times \tilde{D}^2$, pero como

$$X \times \tilde{D}^2 \simeq_{S^1} X$$

entonces podemos hacer la identificación

$$T_{S^1}(X \times \tilde{D}^2) \cong T_{S^1}(X).$$

Si X contiene un subespacio invariante Y definimos

$$K_R^{\tau+n}(X, Y) := K_{S^1}^{\tau+n+2}(X \times \tilde{D}^2, Y \times \tilde{D}^2 \cup X \times \tilde{S}^1).$$

Como primer resultado tenemos lo siguiente

Proposición 4.5.6. Sea X un S^1 -espacio, para cualquier $\tau \in T_{S^1}^0(X)$ y $n \in \mathbb{Z}$ existe un isomorfismo

$$K_{S^1}^{\rho(\mathbb{C}_1)+\tau+n}(X) \cong K_R^{\tau+n}(X)$$

Demostración. Tenemos que el haz vectorial S^1 -equivariante $\pi: \underline{\mathbb{C}}_1 = X \times \mathbb{C} \rightarrow X$ tiene la acción de S^1 bajo multiplicación en \mathbb{C} . El rango de este haz vectorial complejo como haz real es 2, así que por el isomorfismo de Thom tenemos que

$$\begin{aligned} K_{S^1}^{\rho(\underline{\mathbb{C}}_1)+\tau+n}(X) &\cong K_{S^1}^{\pi^*(\rho(\underline{\mathbb{C}}_1)+\tau+\rho(\underline{\mathbb{C}}_1))+n+2}(D(\underline{\mathbb{C}}_1), S(\underline{\mathbb{C}}_1)) \\ &\cong K_{S^1}^{\pi^*(2\rho(\underline{\mathbb{C}}_1)+\tau)+n+2}(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1). \end{aligned}$$

Notemos que el torcimiento $2\rho(\underline{\mathbb{C}}_1)$ está clasificado por

$$(2w_1^{S^1}(\underline{\mathbb{C}}_1), 2W_3^{S^1}(\underline{\mathbb{C}}_1)) = (0, 2\beta(w_2^{S^1}(\underline{\mathbb{C}}_1))) = (0, \beta(2w_2^{S^1}(\underline{\mathbb{C}}_1))) = (0, 0)$$

así que la clase de isomorfismo de $2\rho(\underline{\mathbb{C}}_1)$ es la trivial, por lo tanto

$$\begin{aligned} K_{S^1}^{\pi^*(2\rho(\underline{\mathbb{C}}_1)+\tau)+n+2}(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1) &\cong K_{S^1}^{\pi^*(\tau)+n}(X \times \tilde{D}^2, X \times \tilde{S}^1) \\ &\cong K_R^{\tau+n}(X). \end{aligned} \quad \square$$

De igual forma que en el caso de la cohomología, tenemos las siguientes sucesiones exactas largas

Proposición 4.5.7. *Para cualquier S^1 -espacio X y $\tau \in T_{S^1}^0(X)$ existen sucesiones exactas largas*

$$\cdots \rightarrow K_R^{\tau+n-2}(X) \rightarrow K_{S^1}^{\tau+n}(X) \xrightarrow{\iota^*} K^{\tau+n}(X) \rightarrow K_R^{\tau+n}(X) \rightarrow \cdots$$

y

$$\cdots \rightarrow K_{S^1}^{\tau+n-2}(X) \rightarrow K_R^{\tau+n}(X) \xrightarrow{j^*} K^{\tau+n}(X) \rightarrow K_{S^1}^{\tau+n}(X) \rightarrow \cdots$$

en donde ι^*, j^* son los mapeos naturales que olvidan la acción.

Apéndice A

Clases de Chern

El objetivo de este apéndice es mostrar brevemente las propiedades de las clases de Chern y mencionar cómo es la construcción para haces vectoriales complejos. Tenemos entonces el siguiente teorema:

Teorema A.0.1. *Existe una sucesión de funciones c_1, c_2, \dots que asignan a cada haz vectorial complejo $\pi: E \rightarrow B$ una clase $c_i(E) \in H^{2i}(B; \mathbb{Z})$ que depende únicamente de la clase de isomorfismo de E , de manera que se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. Dado $f: A \rightarrow B$, se tiene que $c_i(f^*(E)) = f^*(c_i(E))$ para el pullback de haces vectoriales f^*E .
2. $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1) \cup c(E_2)$ para $c = 1 + c_1 + c_2 + \dots \in H^*(B)$
3. $c_i(E) = 0$ si i es mayor que el rango de E .
4. El anillo de cohomología $H^*(G_n(\mathbb{C}^\infty); \mathbb{Z})$ está dado por el anillo polinomial

$$\mathbb{Z}[c_1(\gamma^n), \dots, c_n(\gamma^n)]$$

en donde $\gamma^n \rightarrow G_n(\mathbb{C}^\infty)$ es el haz vectorial canónico de n -planos.

Los axiomas de Grothendieck para las clases de Chern son los siguientes:

- (Naturalidad) Dado $f: A \rightarrow B$, se tiene que $c_i(f^*(E)) = f^*(c_i(E))$ para el pullback de haces vectoriales $f^*(E)$.
- (Aditividad) Si $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de haces vectoriales, entonces $c(E) = c(E') \cup c(E'')$.
- (Normalización) Si E es un haz lineal, entonces $c(E) = 1 + e(E_{\mathbb{R}})$ en donde $e(E_{\mathbb{R}})$ es la clase de Euler del haz vectorial real asociado.

La construcción de Grothendieck para las clases de Chern es la siguiente: Utilizando el teorema de Leray–Hirsch para calcular la cohomología del haz proyectivo $P(V)$ asociado al haz vectorial complejo $\pi: V \rightarrow B$, sea Γ el haz tautológico sobre $P(V)$, entonces define únicamente la clase

$$c_1(\Gamma) \in P(V)$$

cuya restricción a cada fibra genera la cohomología de $\mathbb{C}P^{n-1}$ de manera que

$$a := -c_1(\Gamma)|_{\mathbb{C}P^{n-1}}.$$

Las clases $1, a, a^2, \dots, a^{n-1} \in H^*(P(V))$ son los generadores que aparecen en el teorema de Leray–Hirsch, por lo tanto cualquier clase en $H^*(P(V))$ se puede escribir de manera única como combinación lineal de $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$. Define las clases de Chern del haz vectorial $\pi: V \rightarrow B$ como los coeficientes

$$-a^n = c_1(V) \cdot a^{n-1} + \dots + c_{n-1}(V) \cdot a + c_n(V).$$

Teorema A.0.2. *Ambas construcciones de las clases de Chern coinciden.*

Bibliografía

- [1] Alejandro Adem, José Cantarero, and José Manuel Gómez, *Twisted equivariant K -theory of compact Lie group actions with maximal rank isotropy*, J. Math. Phys. **59** (2018), no. 11, 113502, 29. MR 3875449
- [2] C. Allday and V. Puppe, *Cohomological methods in transformation groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 32, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. MR 1236839
- [3] M. F. Atiyah, *Vector bundles and the Künneth formula*, Topology **1** (1962), 245–248. MR 150780
- [4] ———, *K -theory and reality*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **17** (1966), 367–386. MR 206940
- [5] M. F. Atiyah and R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, Topology **23** (1984), no. 1, 1–28. MR 721448
- [6] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *Index theory for skew-adjoint Fredholm operators*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1969), no. 37, 5–26. MR 285033
- [7] Michael Atiyah and Graeme Segal, *Twisted K -theory*, Ukr. Mat. Visn. **1** (2004), no. 3, 287–330. MR 2172633
- [8] David Baraglia, *Topological T -duality for general circle bundles*, Pure Appl. Math. Q. **10** (2014), no. 3, 367–438. MR 3282986
- [9] Noé Bárcenas and José Cantarero, *A completion theorem for fusion systems*, Israel J. Math. **236** (2020), no. 2, 501–531. MR 4093897
- [10] Noé Bárcenas, Paulo Carrillo Rouse, and Mario Velásquez, *Multiplicative structures and the twisted Baum-Connes assembly map*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 7, 5241–5269. MR 3632567
- [11] Noé Bárcenas, Jesús Espinoza, Michael Joachim, and Bernardo Uribe, *Universal twist in equivariant K -theory for proper and discrete actions*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **108** (2014), no. 5, 1313–1350. MR 3214681

- [12] Noé Bárcenas, Jesús Espinoza, Bernardo Uribe, and Mario Velásquez, *Segal's spectral sequence in twisted equivariant K-theory for proper and discrete actions*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **61** (2018), no. 1, 121–150. MR 3774848
- [13] Raoul Bott and Loring W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. MR 658304
- [14] Peter Bouwknegt, Jarah Evslin, and Varghese Mathai, *T-duality: topology change from H-flux*, Comm. Math. Phys. **249** (2004), no. 2, 383–415. MR 2080959
- [15] Glen E. Bredon, *Equivariant cohomology theories*, Lecture Notes in Mathematics, No. 34, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967. MR 0214062
- [16] Ulrich Bunke and Thomas Schick, *On the topology of T-duality*, Rev. Math. Phys. **17** (2005), no. 1, 77–112. MR 2130624
- [17] Alan L. Carey and Bai-Ling Wang, *Thom isomorphism and push-forward map in twisted K-theory*, J. K-Theory **1** (2008), no. 2, 357–393. MR 2434190
- [18] Jacobien Carstens, *Twisted K-theory and T-duality*, M.Sc.Thesis, University of Melbourne, 2009.
- [19] S. R. Costenoble and S. Waner, *The equivariant Thom isomorphism theorem*, Pacific J. Math. **152** (1992), no. 1, 21–39. MR 1139971
- [20] Charles Doran, Stefan Méndez-Diez, and Jonathan Rosenberg, *T-duality for orientifolds and twisted KR-theory*, Lett. Math. Phys. **104** (2014), no. 11, 1333–1364. MR 3267662
- [21] Christopher Dwyer, *Twisted equivariant K-theory for proper actions of discrete groups*, K-Theory **38** (2008), no. 2, 95–111. MR 2366557
- [22] Daniel S Freed, *Geometry of dirac operators*, Preliminary version (1987).
- [23] Daniel S. Freed, Michael J. Hopkins, and Constantin Teleman, *Loop groups and twisted K-theory I*, J. Topol. **4** (2011), no. 4, 737–798. MR 2860342
- [24] Kiyonori Gomi, *A variant of K-theory and topological T-duality for real circle bundles*, Comm. Math. Phys. **334** (2015), no. 2, 923–975. MR 3306608
- [25] Allen Hatcher, *Vector bundles and K-theory, 2017*, URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VB.pdf>, 2021.

- [26] Petr Hořava, *Type IIA D-branes, K-theory and Matrix theory*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998), no. 6, 1373–1404 (1999). MR 1693636
- [27] Daniel Hudson, *K-theory correspondences and the Fourier-Mukai transform*, M.Sc. Thesis, University of Victoria, 2019.
- [28] Dale Husemoller, *Fibre bundles*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag, New York, 1994. MR 1249482
- [29] S. O. Kochman, *Bordism, stable homotopy and Adams spectral sequences*, Fields Institute Monographs, vol. 7, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. MR 1407034
- [30] Nicolaas H. Kuiper, *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology **3** (1965), 19–30. MR 179792
- [31] R. K. Lashof, *Equivariant bundles*, Illinois J. Math. **26** (1982), no. 2, 257–271. MR 650393
- [32] John M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 218, Springer, New York, 2013. MR 2954043
- [33] Bei Liu, *Twisted K-homology, geometric cycles and T-duality*, Ph.D. Thesis, University of Gottingen, 2014.
- [34] Wolfgang Lück and Bernardo Uribe, *Equivariant principal bundles and their classifying spaces*, Algebr. Geom. Topol. **14** (2014), no. 4, 1925–1995. MR 3331607
- [35] Varghese Mathai and Siye Wu, *Topology and flux of T-dual manifolds with circle actions*, Comm. Math. Phys. **316** (2012), no. 1, 279–286. MR 2989461
- [36] J. P. May, *Equivariant homotopy and cohomology theory*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 91, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, With contributions by M. Cole, G. Comezana, S. Costenoble, A. D. Elmendorf, J. P. C. Greenlees, L. G. Lewis, Jr., R. J. Piacenza, G. Triantafyllou, and S. Waner. MR 1413302
- [37] John W. Milnor and James D. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Mathematics Studies, No. 76, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. MR 0440554
- [38] Haruo Minami, *A Künneth formula for equivariant K-theory*, Osaka Math. J. **6** (1969), 143–146. MR 259897

- [39] Gregory Moore, *K-theory from a physical perspective*, Topology, geometry and quantum field theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, pp. 194–234. MR 2079376
- [40] Gregory Moore and Edward Witten, *Self-duality, Ramond-Ramond fields and K-theory*, J. High Energy Phys. (2000), no. 5, Paper 32, 32. MR 1769467
- [41] Ashwin S. Pande, *Topological T-duality and Kaluza-Klein monopoles*, Adv. Theor. Math. Phys. **12** (2008), no. 1, 185–215. MR 2369414
- [42] Graeme Segal, *Equivariant K-theory*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1968), no. 34, 129–151. MR 234452
- [43] E. G. Sklyarenko, *The Thom isomorphism for nonorientable bundles*, Fundam. Prikl. Mat. **9** (2003), no. 4, 55–103. MR 2093413
- [44] Loring W. Tu, *Computing the Gysin map using fixed points*, Algebraic geometry and number theory, Progr. Math., vol. 321, Birkhäuser/Springer, Cham, 2017, pp. 135–160. MR 3675380
- [45] ———, *Introductory lectures on equivariant cohomology*, Annals of Mathematics Studies, vol. 204, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2020, With appendices by Tu and Alberto Arabia. MR 4205963
- [46] Peter Woit, *Quantum field theory and representation theory: A sketch*, arXiv, 2002.
- [47] Valentin Zakharevich, *K-theoretic computation of the verlinde ring*, Ph.D. Thesis, The university of Texas at Austin, 2018.