

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E
INGENIERÍAS
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
MAESTRÍA EN CIENCIAS EN MATEMÁTICAS



Representaciones globales y sistemas de fusión

TESIS QUE PRESENTA

Lic. Josué Eduardo Maldonado Galindo

PARA OBTENER EL GRADO DE
Maestro en Ciencias en Matemáticas

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Alonso Castillo Ramírez

CODIRECTOR DE TESIS:

Dr. José María Cantarero López

Guadalajara, Jalisco, septiembre de 2026



CUCEI/UPOSG/775/2026

C. Josué Eduardo Maldonado Galindo

P r e s e n t e

Por medio de la presente me permito comunicarle que fue aceptado por la Junta Académica correspondiente, el tema de tesis solicitado a esta Unidad de Posgrados el día de 27 mayo de 2026, bajo el título:

“Representaciones globales y sistemas de fusión”

mismo que usted desarrollará, con objeto de dar lugar a los trámites conducentes a la obtención de grado de:

Maestro en Ciencias en Matemáticas

Así mismo le comunico que para el desarrollo de la citada tesis le ha sido designado como **Director** al **Dr. Alonso Ramírez Castillo** como **Co-director** al **Dr. José Maria Cantarero López**

Sin otro particular de momento aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

A t e n t a m e n t e

“Piensa y Trabaja”

“40 años de la Feria Internacional del Libro de Guadalajara”

Guadalajara, Jal., 03 de junio de 2026



Dra. Margarita Cid Hernández
Jefa la Unidad de Posgrados

Registro 140/2026

MCH/sijo

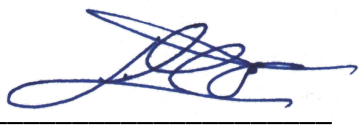
Dra. Margarita Cid Hernández
Jefa de la Unidad de Postgrados
CUCEI
P R E S E N T E

Por este medio nos dirigimos a usted para comunicarle que el trabajo de tesis de la *Maestría en Ciencias en Matemáticas* presentado por el estudiante **Josué Eduardo Maldonado Galindo** el cual lleva por título “**Representaciones globales y sistemas de fusión**” ha sido revisado y **ACEPTADO** para su impresión por los lectores revisores que aquí firman.

Guadalajara, Jalisco, a 24 de agosto de 2026


Dr. Alonso Castillo Ramírez
Director de Tesis


Dr. José Miguel Calderón León
Lector Revisor


Dr. José María Cantarero López
Lector Revisor



UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS

Secretaría Académica

Coordinación de la Maestría en Ciencias en Matemáticas

MACM/30/2026

Dra. Margarita Cid Hernández
Jefa de la Unidad de Posgrados de CUCEI
P R E S E N T E

Por medio del presente, la Junta Académica de la Maestría en Ciencias en Matemáticas le informa que el trabajo de tesis presentado por **JOSUÉ EDUARDO MALDONADO GALINDO** con código **220282649** titulado

“REPRESENTACIONES GLOBALES Y SISTEMAS DE FUSIÓN”

ha sido revisado por los lectores asignados, y ha sido reportado que **SÍ CUMPLE** con el nivel metodológico exigido en la realización de tesis para la obtención del grado de **Maestro en Ciencias en Matemáticas**. Por lo anterior, la Junta Académica autoriza la presentación de esta tesis.

La publicación final se deberá entregar a la Coordinación del Posgrado al momento de realizar el examen de grado.

Sin otro particular, le enviamos un cordial saludo y agradecemos su atención.

Atentamente,
“PIENSA Y TRABAJA”

“40 años de la Feria Internacional del Libro de Guadalajara”

Guadalajara, Jal., a 27 de agosto de 2026



Coordinación de la
Maestría en Ciencias en
Matemáticas

Dra. Miriam Bocardo Gaspar

Dr. Juan Antonio Licea Salazar

Dr. José Alberto Gutiérrez Robles

Dr. Osbaldo Mata Gutiérrez

Dr. Fernando Ignacio Becerra López

Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi

Agradecimientos

A las siguientes personas quiero expresar mi más profundo agradecimiento, ya que sin ellas la realización de esta tesis no habría sido posible:

Al Dr. Alonso Castillo Ramírez por aceptar la dirección de esta tesis, por su confianza en mí y por todo el apoyo que siempre me ha brindado. Asimismo, con especial cariño agradezco al Dr. José María Cantarero, quien aceptó con entusiasmo la codirección de este trabajo. Desde el primer momento en que le expresé mi interés por trabajar con él, se mostró siempre amable y comprometido. Valoro profundamente el tiempo que me dedicó durante estos dos años, así como la paciencia y el cuidado con los que revisó cada uno de mis escritos e ideas, muchas veces aún poco claras. Jamás olvidaré aquel momento en una de nuestras reuniones en el que, al discutir un punto del trabajo, nos dimos cuenta de un error importante; esa experiencia me recordó que equivocarse es parte del proceso, y que lo verdaderamente valioso es aprender de ello y seguir adelante. Reconozco en él no solo a un gran profesor, sino también a una persona de gran calidad humana.

Agradezco al comité tutorial por sus observaciones y consejos, que contribuyeron a mejorar este trabajo y a mi formación como matemático. Asimismo, agradezco a los sinodales por aceptar la revisión de esta tesis y por cada uno de sus valiosos comentarios.

A Jorge Alfredo, quien siempre me escuchó, me apoyó y me orientó en la solución de mis tormentosas dudas. También agradezco con profundo cariño a Beto y a Potter quienes hicieron más llevaderos estos últimos meses. Asimismo, agradezco inmensamente a mi madre por el inconmensurable apoyo y amor que me ha dado.

Por último, y no menos importante, agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por la beca otorgada durante mis estudios de maestría. Este trabajo fue apoyado por CONAHCYT (ahora Secihti) en el año 2023 mediante el proyecto de Ciencia de Frontera CF-2023-I-2649.

Índice general

Introducción	7
1. Haces vectoriales y sistemas de fusión	13
1.1. Haces vectoriales y K -teoría	13
1.2. Grupos p -locales finitos	23
2. Anillo de Burnside de grupos finitos y sistemas de fusión	31
2.1. G -conjuntos	31
2.2. Semianillo y anillo de Burnside de un grupo finito	35
2.3. Homomorfismo de marcas del anillo de Burnside	41
2.4. S -conjuntos $\mathcal{F}$ -estables	44
2.5. Ideales primos del anillo de Burnside	48
2.6. Teorema de completación de Segal–Carlsson en grupos p -locales finitos	54
3. Anillo de representaciones de grupos finitos y sistemas de fusión	61
3.1. Representaciones complejas	61
3.2. Anillo de representaciones de un grupo finito	64
3.3. Caracteres	68
3.4. Representaciones invariantes bajo fusión	71
3.5. Ideales primos del anillo de representaciones	73
3.6. Teorema de completación de Atiyah en grupos p -locales finitos	76
4. Anillo global de representaciones de grupos finitos y sistemas de fusión	79
4.1. Monoide de representaciones globales	79
4.2. Anillo global de representaciones de un grupo finito	86
4.3. Especies de $D(G)$	95
4.4. Representaciones globales invariantes bajo fusión	103
4.5. Ideales primos del anillo global de representaciones	111
5. Primeros pasos hacia un teorema de completación	117

5.1. Haces vectoriales graduados	118
5.2. K -teoría de haces vectoriales graduados	120
5.3. Teorema de completación	134
Referencias	141

Introducción

Un resultado clásico en la teoría de representaciones de grupos finitos es el Teorema de inducción de Brauer, el cual describe los caracteres de un grupo finito en términos de caracteres monomiales. Recordemos que una representación de un grupo finito G se dice monomial si es equivalente a una representación inducida $\text{ind}_H^G W$, donde $H \leq G$ y W es una representación de grado uno de H .

Teorema (Teorema de inducción de Brauer). *Sea G un grupo finito. Entonces todo carácter χ de G se expresa como una combinación lineal entera*

$$\chi = \sum_i \lambda_i \varphi_i,$$

donde cada φ_i es un carácter monomial de G y $\lambda_i \in \mathbb{Z}$.

A partir de este resultado, R. Boltje exhibe en [Bol90] una fórmula canónica para el Teorema de inducción de Brauer. En este contexto, la canonicidad significa que dicha expresión es única entre todas las posibles expresiones de χ en términos de caracteres monomiales. Años más tarde, en [Bol01], R. Boltje definió la categoría monomial $\mathbb{C}G\text{mon}$, cuyos objetos son parejas $(V, \mathcal{L})$, donde V es un $\mathbb{C}G$ -módulo y $\mathcal{L}$ es una familia de subespacios unidimensionales de V tales que

$$V = \bigoplus_{L \in \mathcal{L}} L$$

y $g \cdot L \in \mathcal{L}$ para todo $g \in G$ y todo $L \in \mathcal{L}$. Asimismo, definió el anillo monomial de G como la construcción de Grothendieck de la categoría $\mathbb{C}G\text{mon}$, con la finalidad de demostrar que la resolución monomial induce la fórmula canónica de inducción de Brauer.

De manera independiente, S. Witherspoon definió en [Wit95] el anillo de haces vectoriales G -equivariantes sobre conjuntos finitos como la construcción de Grothendieck de la categoría abeliana $G\text{-Vect}$. Los objetos de esta categoría son familias $\{M_x\}_{x \in X}$ de espacios vectoriales complejos de dimensión finita, indexadas por un G -conjunto finito X , junto con una acción de G sobre la suma directa

$$M = \bigoplus_{x \in X} M_x$$

tal que $g \cdot M_x = M_{gx}$ para todo $g \in G$ y todo $x \in X$. A los espacios M_x se les conoce como fibras de M .

A partir de esta construcción, S. Witherspoon presenta una demostración alternativa de una fórmula explícita de inducción de Conlon, obtenida por R. Boltje. Este resultado puede entenderse como un análogo, en el contexto del anillo de representaciones, de los fenómenos de inducción que aparecen en el Teorema de Brauer.

Desde esta perspectiva, la categoría monomial ${}_{\mathbb{C}G}\text{mon}$ puede verse como una subcategoría de la categoría de haces G -equivariantes sobre conjuntos finitos. Esto es, a un objeto $(V, \mathcal{L})$ se le asocia el G -haz vectorial sobre el G -conjunto finito $\mathcal{L}$ cuyas fibras son los subespacios unidimensionales $L \in \mathcal{L}$. En este sentido, el anillo monomial de R. Boltje aparece como el subanillo generado por aquellos haces G -equivariantes cuyas fibras tienen dimensión uno.

Motivados por lo anterior, G. Raggi y L. Valero definen en [RV15] el anillo global de representaciones de un grupo finito G , denotado por $D(G)$. Este anillo también generaliza el anillo monomial introducido por R. Boltje, y su construcción es análoga a la del anillo de haces G -equivariantes sobre conjuntos finitos. Una de las virtudes de la definición propuesta por G. Raggi y L. Valero es que exhibe de manera natural la relación de $D(G)$ con el anillo de Burnside $A(G)$ y con el anillo de representaciones complejas $R(G)$.

Como parte de su trabajo, G. Raggi y L. Valero obtienen en [RV15] una descripción explícita de los homomorfismos de $D(G)$ a $\mathbb{C}$, llamados especies, así como del espectro primo de $D(G)$, sus componentes conexas y sus idempotentes primitivos. Además, muestran que ciertas propiedades del grupo G pueden determinarse a partir de propiedades algebraicas del anillo $D(G)$. Para ilustrar esta situación, enunciamos el siguiente resultado.

Proposición ([RV15], Corolario 39). *Un grupo finito G es soluble si y solo si $\text{Spec}(D(G))$ es conexo en la topología de Zariski.*

Dado que el anillo global de representaciones es un objeto relativamente reciente, aún quedan por estudiar varias propiedades y extensiones que ya son bien entendidas para el anillo de Burnside y el anillo de representaciones. Una de estas direcciones consiste en estudiar análogos de dichas construcciones en el contexto de sistemas de fusión saturados sobre un p -grupo. En los últimos años, se ha desarrollado el estudio del anillo de Burnside y del anillo de representaciones para sistemas de fusión saturados (véase [Ree15; CCM20]). De manera general, los sistemas de fusión pueden interpretarse como estructuras que codifican la información p -local de un grupo finito.

La relevancia de los sistemas de fusión puede ilustrarse desde distintos puntos de vista. Por un lado, un teorema de Solomon [Sol74] establece la imposibilidad de que exista un grupo finito simple G con $\mathcal{F}_S(\text{Spin}_7(\mathbb{F}_3)) \subseteq \mathcal{F}_S(G)$, donde S es el 2-subgrupo de Sylow de $\text{Spin}_7(\mathbb{F}_3)$, que cumpla además que todos los elementos de orden dos en S sean G -conjugados. La existencia de un grupo con estas propiedades habría implicado la aparición de un nuevo grupo

finito simple. Por otro lado, el Teorema de Cartan–Eilenberg [CE99] permite determinar la cohomología de un grupo finito con coeficientes en un campo finito a partir de la información contenida en sus p -subgrupos. Más precisamente, si S es un p -subgrupo de Sylow de G , entonces se tiene un isomorfismo

$$H^*(G; \mathbb{F}_p) \cong \varprojlim_{\mathcal{F}_S(G)} H^*(Q; \mathbb{F}_p).$$

Estos resultados muestran que los sistemas de fusión no solo son relevantes en teoría de grupos, sino que también aparecen de manera natural en teoría de representaciones y en teoría de homotopía. En consecuencia, dado que el anillo global de representaciones de un grupo finito constituye un anillo fundamental de representaciones, resulta natural preguntarse si existe una teoría análoga para sistemas de fusión saturados. Este es uno de los objetivos principales de este trabajo: proponer una definición del anillo global de representaciones de un sistema de fusión y estudiar algunas de sus propiedades algebraicas, tales como sus especies, sus ideales primos y su espectro primo. Asimismo, nos interesa comparar estas propiedades con las que se conocen para el anillo global de representaciones de un grupo finito. De manera más precisa, si $\mathcal{F}$ es un sistema de fusión saturado sobre un p -grupo S , definimos el anillo global de representaciones de $\mathcal{F}$, denotado por $D(\mathcal{F})$, como el subanillo de $D(S)$ formado por los elementos $\mathcal{F}$ -estables. Este anillo se identifica con un límite sobre $\mathcal{F}$ de los anillos $D(P)$, donde P recorre los subgrupos de S . A partir de esta definición, caracterizamos los elementos $\mathcal{F}$ -estables de $D(S)$ en términos de sus especies. Posteriormente, definimos las especies de $D(\mathcal{F})$ y mostramos que estas solo dependen de la clase de $\mathcal{F}$ -conjugación de cada pareja (P, h) , con $P \leq S$ y $h \in P$. Esta descripción permite estudiar los ideales primos de $D(\mathcal{F})$.

Uno de los resultados principales obtenidos en este trabajo establece que todo ideal primo de $D(\mathcal{F})$ es de la forma $I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$, determinado por una especie asociada a una pareja (P, h) y por un ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo adecuado. En particular, los ideales correspondientes a $\mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle$ son maximales, mientras que aquellos asociados a $\mathfrak{p} = \langle 0 \rangle$ son minimales. Como consecuencia, obtenemos una descripción explícita de $\text{Spec}(D(\mathcal{F}))$ y probamos que este espacio es conexo en la topología de Zariski.

Por otra parte, el anillo de representaciones y el anillo de Burnside de un grupo finito son herramientas algebraicas que permiten calcular invariantes homotópicos de cierto espacio. Para precisar en esto, enunciamos el siguiente par de resultados.

Teorema (Teorema de completación de Atiyah–Segal). *Sea G un grupo finito. Entonces hay un isomorfismo de anillos topológicos*

$$\alpha_G^\wedge : R(G)_{I_G}^\wedge \rightarrow K(BG),$$

donde I_G es el ideal de aumentación de $R(G)$.

Teorema (Teorema de completación de Segal–Carlsson). *Sea G un grupo finito. Entonces hay un isomorfismo de anillos topológicos*

$$\alpha_G^\wedge : A(G)_{I_G}^\wedge \rightarrow \pi_{\mathbb{S}}^0(BG),$$

donde I_G es el ideal de aumentación de $A(G)$.

Estos resultados reflejan una relación entre una teoría de cohomología equivariante y su contraparte no equivariante. En ciertos casos, dicha relación puede expresarse mediante un isomorfismo de la forma

$$E_G^*(\text{pt})_{I_G}^\wedge \cong E^*(BG),$$

donde $E_G^*(\text{pt})$ denota una teoría de cohomología equivariante evaluada en el punto e I_G es el ideal de aumentación correspondiente [La 21]. Desde esta perspectiva, el anillo de representaciones $R(G)$ puede interpretarse como la K -teoría equivariante del punto, mientras que el anillo de Burnside $A(G)$ puede interpretarse como la cohomotopía estable equivariante del punto.

Esto conduce a una segunda pregunta que guía este trabajo: ¿existe un teorema de completación para el anillo global de representaciones $D(G)$? Una posible forma de abordar esta pregunta consiste en buscar una interpretación de $D(G)$ como una teoría de cohomología generalizada equivariante evaluada en un punto. De existir tal interpretación, sería natural esperar un teorema de completación que relacione algebraicamente a $D(G)$ con su contraparte no equivariante evaluada sobre el espacio BG , en analogía con los teoremas clásicos de completación para $R(G)$ y $A(G)$.

Con el propósito de avanzar en esta dirección, en este trabajo introducimos una versión geométrica del anillo global de representaciones. Para ello, definimos el semianillo $\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X)$ de clases de isomorfismo de G -haces vectoriales sobre un espacio X graduados por G -conjuntos finitos. A partir de este semianillo, mediante la construcción de Grothendieck y una relación adicional, definimos un anillo denotado por $KD_G(X)$. Este anillo satisface que, cuando X es un punto, se recupera el anillo global de representaciones; esto es, $KD_G(\text{pt}) \cong D(G)$. Además, si G es el subgrupo trivial, se obtiene la K -teoría compleja de X .

Así, los dos objetivos principales de esta tesis son, por un lado, construir y estudiar el anillo global de representaciones de un sistema de fusión saturado y, por otro, desarrollar un análogo geométrico de $D(G)$ que permita encaminar la formulación de un posible teorema de completación para el anillo global de representaciones. Hasta donde es de nuestro conocimiento, estas dos construcciones no han sido consideradas previamente en la literatura.

Con respecto al segundo objetivo, mostramos que $KD_G(-)$ es un invariante bajo G -homotopías y que, aditivamente, se relaciona con la K -teoría equivariante de los subgrupos de

G . Además, establecemos una relación entre los haces vectoriales graduados G -equivariantes sobre X con haces vectoriales G -equivariantes sobre $X \times Z$, donde Z es un G -conjunto finito; lo cual, para ciertos casos, facilita el cálculo de $KD_G(X)$. Finalmente, exhibimos un ejemplo concreto con $G = \mathbb{Z}/2$ para el cual se cumple

$$D(\mathbb{Z}/2)_{I_{\mathbb{Z}/2}}^{\wedge} \cong KD_{\mathbb{Z}/2}(E\mathbb{Z}/2).$$

El contenido de la tesis está organizado de la siguiente manera. En el primer capítulo se presentan los fundamentos teóricos necesarios para el desarrollo posterior. Comenzamos con una introducción a los haces vectoriales complejos, incluyendo su clasificación cuando el espacio base es paracompacto y Hausdorff. Posteriormente, presentamos un panorama general de la K -teoría compleja y de su contraparte equivariante. Finalmente, introducimos los conceptos básicos de la teoría de sistemas de fusión y de los grupos p -locales finitos.

En el segundo capítulo estudiamos el anillo de Burnside. Comenzamos con un breve repaso de G -conjuntos y, a partir de ellos, definimos el semianillo y el anillo de Burnside de un grupo finito. Mostramos que este último es un $\mathbb{Z}$ -módulo libre con tantos generadores como clases de conjugación de subgrupos de G . Posteriormente, introducimos el morfismo de marcas, una herramienta fundamental para estudiar la estructura algebraica del anillo de Burnside. En la segunda parte del capítulo trasladamos estas ideas al contexto de sistemas de fusión. Esto es, definimos los S -conjuntos $\mathcal{F}$ -estables, construimos el anillo de Burnside de un sistema de fusión y estudiamos sus ideales primos. El capítulo concluye con el Teorema de completación de Segal–Carlsson para grupos finitos y con una demostración alternativa de su análogo para grupos p -locales finitos.

El tercer capítulo está dedicado al anillo de representaciones. Iniciamos con algunos resultados básicos sobre representaciones lineales de grupos finitos y teoría de caracteres, los cuales permiten definir el anillo de representaciones de un grupo finito. Después presentamos la versión correspondiente para sistemas de fusión saturados. Al igual que en el capítulo anterior, estudiamos los ideales primos de este anillo; en este caso, los ideales primos de $R(\mathcal{F})$ desempeñan un papel esencial en la demostración del Teorema de completación de Bárcenas–Cantarero [BC20], que puede entenderse como el análogo del Teorema de completación de Atiyah–Segal para sistemas de fusión.

El cuarto capítulo está dedicado al anillo global de representaciones. Comenzamos estudiando las representaciones globales de un grupo finito y definimos el monoide de representaciones globales $\mathrm{glRep}(G)$. Exhibimos los átomos de este monoide y mostramos que es reducido, atómico y de factorización única; en particular, se sigue que $\mathrm{glRep}(G)$ es un monoide libre. A partir de estas propiedades, definimos el anillo global de representaciones de un grupo finito y estudiamos sus especies. En la segunda parte del capítulo introducimos el anillo $D(\mathcal{F})$ de representaciones globales de un sistema de fusión, así como sus especies y su espectro primo. El capítulo concluye mostrando que el espectro primo de $D(\mathcal{F})$ es conexo

en la topología de Zariski, lo cual distingue a $D(\mathcal{F})$ del anillo global de representaciones de un grupo finito.

En el último capítulo introducimos los G -haces vectoriales Z -graduados sobre un espacio compacto y Hausdorff, donde Z denota un G -conjunto finito. A partir de estos objetos definimos el semianillo de G -haces vectoriales Z -graduados y el anillo $KD_G(X)$ de K -teoría global equivariante. Demostramos que, cuando G es el grupo trivial, $KD_G(X)$ coincide con la K -teoría compleja de X . Posteriormente, estudiamos propiedades elementales de $KD_G(X)$ para grupos finitos no necesariamente triviales. Uno de los resultados principales de este capítulo es que $KD_G(-)$ es un invariante G -homotópico. Además, establecemos el siguiente isomorfismo de grupos abelianos

$$KD_G(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{[H] \in S(G)/G} K_H(X)_{N_G(H)} \otimes \mathbb{Q}.$$

Finalmente, proponemos algunas direcciones orientadas a la formulación de un teorema de completación para el anillo global de representaciones.

Capítulo 1

Haces vectoriales y sistemas de fusión

1.1. Hace vectoriales y K -teoría

En este apartado daremos la teoría general de haces vectoriales. Para fines de este trabajo, solo nos enfocaremos en el estudio de haces vectoriales complejos. Omitiremos las demostraciones de la mayoría de los resultados expuestos en esta sección, por lo que se sugiere al lector interesado consultar [Ati18] y [Hat03].

Definición 1.1.1 (Haz vectorial). Sea X un espacio topológico. Un **haz vectorial complejo** de rango n sobre X es una terna (E, p, X) , donde E es un espacio topológico y $p: E \rightarrow X$ es una aplicación continua tal que:

1. Para todo $x \in X$, la fibra $E_x := p^{-1}(x)$ tiene una estructura fijada de espacio vectorial complejo de dimensión finita.
2. (*Trivialidad local*) Para todo $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$ y un homeomorfismo $h_\alpha: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ que hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times \mathbb{C}^n \\ & \searrow p & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U & \end{array} .$$

Además, para cada $y \in U$, la restricción $h|_{E_y}: E_y \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un isomorfismo lineal.

El espacio topológico E se llama **espacio total**, X se llama **espacio base**, y a la aplicación $p: E \rightarrow X$ se le conoce como **proyección**. Si el espacio base y la proyección son claros, denotaremos simplemente por E al haz vectorial.

Ejemplo 1.1.2. El espacio producto $E = X \times \mathbb{C}^n$ con la proyección $p(x, z) = x$ es un haz vectorial, llamado **haz trivial** y denotado por ε^n .

Definición 1.1.3 (Subhaz vectorial). Sea $p: E \rightarrow X$ un haz vectorial. Un **subhaz** de E es un subespacio $F \leq E$ tal que $p|_F: F \rightarrow X$ es un haz vectorial con la estructura inducida.

Definición 1.1.4 (Morfismo entre haces vectoriales). Sean $p: E \rightarrow X$ y $p': E' \rightarrow X$ dos haces vectoriales. Un **morfismo** entre E y E' es una aplicación continua $\varphi: E \rightarrow E'$ tal que $p' \circ \varphi = p$ y cada restricción $\varphi_x: E_x \rightarrow E'_x$ es lineal. Diremos que φ es un **isomorfismo** si es biyectiva y φ^{-1} es continua. Decimos que los haces vectoriales E y E' son isomorfos, y escribimos $E \cong E'$, si existe un isomorfismo entre ellos.

A continuación presentamos algunas construcciones que permiten obtener nuevos haces vectoriales a partir de haces dados.

Restricción de un haz. Sea (E, p, X) un haz vectorial y sea $\tilde{X} \subset X$ un subespacio. Definimos $E_{\tilde{X}} := p^{-1}(\tilde{X})$ y consideramos la aplicación $p_{\tilde{X}} := p|_{E_{\tilde{X}}}: E_{\tilde{X}} \rightarrow \tilde{X}$. Entonces $(E_{\tilde{X}}, p_{\tilde{X}}, \tilde{X})$ es un haz vectorial, llamado la **restricción** de E a $\tilde{X}$, y se denota por $E|_{\tilde{X}}$.

Haz inducido. Sea $p: E \rightarrow X$ un haz vectorial y sea $f: Y \rightarrow X$ una función continua. El **haz inducido** (o **pullback** de E a lo largo de f) es un haz vectorial sobre Y cuyo espacio total es

$$f^*E := \{(y, e) \in Y \times E \mid f(y) = p(e)\},$$

y la proyección p' corresponde a proyectar en la primera coordenada. Así, se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \longrightarrow & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

La suma directa y el producto tensorial de espacios vectoriales producen nuevamente espacios vectoriales. Para extender estas construcciones al contexto de haces vectoriales, utilizamos el siguiente procedimiento general presentado en [Ati18]. Sea $T: \text{Vect}_{\mathbb{C}} \times \text{Vect}_{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{C}}$ un funtor covariante continuo. Esto significa que a cada par de espacios vectoriales complejos de dimensión finita (V, W) le asigna un espacio vectorial $T(V, W)$, y a cada par de transformaciones lineales $f: V \rightarrow V'$ y $g: W \rightarrow W'$ le asigna una transformación lineal $T(f, g): T(V, W) \rightarrow T(V', W')$, que depende continuamente de f y g . Si E y E' son haces vectoriales sobre X , definimos

$$T(E, E') := \bigsqcup_{x \in X} T(E_x, E'_x),$$

con proyección $p: T(E, E') \rightarrow X$ dada por $p(T(E_x, E'_x)) = x$. La continuidad de T induce en $T(E, E')$ una topología (que no necesariamente es la de la unión disjunta) y una estructura natural de haz vectorial sobre X , cuya fibra en cada punto $x \in X$ es $T(E_x, E'_x)$ (véase [Ati18], Sección 1.2).

Suma directa. Tomando $T(V, W) = V \oplus W$, se obtiene el haz vectorial $E \oplus E'$, cuya fibra sobre $x \in X$ es $(E \oplus E')_x = E_x \oplus E'_x$.

Producto tensorial. Tomando $T(V, W) = V \otimes W$, se obtiene el haz vectorial $E \otimes E'$, cuya fibra sobre $x \in X$ es $(E \otimes E')_x = E_x \otimes E'_x$.

Proposición 1.1.5 ([Hat03]). *Sean X, Y dos espacios topológicos, y $f, g: Y \rightarrow X$ dos aplicaciones continuas. Entonces, se cumple lo siguiente.*

1. $f^*(E_1 \oplus E_2) \cong f^*(E_1) \oplus f^*(E_2)$.
2. $f^*(E_1 \otimes E_2) \cong f^*(E_1) \otimes f^*(E_2)$.

Dado un haz vectorial sobre un espacio X , y dos aplicaciones continuas homótopas con codominio X , el siguiente resultado establece que los haces inducidos a lo largo de dichas aplicaciones son isomorfos. Esto es, el pullback de un haz vectorial es invariante bajo homotopía.

Teorema 1.1.6 ([Hat03], Teorema 1.6). *Sea E un haz vectorial sobre un espacio paracompacto y Hausdorff X . Si $f, g: Y \rightarrow X$ son aplicaciones homótopas, entonces los haces inducidos f^*E y g^*E son isomorfos.*

Denotemos por $\text{Vect}^n(X)$ el conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales de rango n sobre X .

Corolario 1.1.7 ([Hat03], Corolario 1.8). *Una equivalencia homotópica $f: Y \rightarrow X$ entre espacios paracompactos Hausdorff induce una biyección $f^*: \text{Vect}^n(X) \rightarrow \text{Vect}^n(Y)$. En particular, cualquier haz vectorial sobre un espacio paracompacto Hausdorff y contráctil es trivial.*

Hemos visto cómo construir haces vectoriales a partir de otros haces definidos sobre un espacio base arbitrario X . Consideremos ahora el caso particular en que el espacio base es la esfera S^k de dimensión k . Escribimos S^k como la unión de los hemisferios superior e inferior D_+^k y D_-^k , respectivamente, de modo que $D_+^k \cap D_-^k = S^{k-1}$. Dada una aplicación continua $f: S^{k-1} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$, definimos E_f como el cociente de la unión disjunta $(D_+^k \times \mathbb{C}^n) \amalg (D_-^k \times \mathbb{C}^n)$ obtenido al identificar cada punto $(x, v) \in \partial D_-^k \times \mathbb{C}^n$ con $(x, f(x)(v)) \in \partial D_+^k \times \mathbb{C}^n$. Entonces, la proyección natural $E_f \rightarrow S^k$ define un haz vectorial complejo de rango n . A la aplicación f se le llama **función de engranaje** de E_f .

Dados dos espacios X y Y , denotaremos por $[X, Y]$ al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones continuas $X \rightarrow Y$.

Proposición 1.1.8 ([Hat03], Proposición 1.11). *La asignación*

$$\Phi : [S^{k-1}, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})] \rightarrow \mathrm{Vect}^n(S^k)$$

que envía cada función de engranaje f al haz vectorial E_f , es una biyección.

Como consecuencia del resultado anterior, todos los haces vectoriales complejos sobre el círculo S^1 son triviales.

La Proposición 1.1.8 proporciona una reducción del problema de clasificación de los haces vectoriales complejos sobre la esfera S^k a un problema de homotopía. El siguiente paso consiste en extender esta clasificación a haces vectoriales sobre espacios paracompactos Hausdorff. Para ello, introducimos primero la noción de variedad grassmanniana. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Denotamos por $\mathrm{Gr}_n(V)$ al conjunto de todos los subespacios vectoriales de V de dimensión n . Este conjunto posee una estructura de variedad suave, llamada la **variedad grassmanniana de n -planos** en V . En particular, si $V = \mathbb{C}^k$, escribimos $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^k)$, la cual parametriza los subespacios complejos de dimensión n de $\mathbb{C}^k$.

Para construir la grassmanniana infinita, consideremos las inclusiones naturales $\mathbb{C}^1 \subset \mathbb{C}^2 \subset \dots \subset \mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^{k+1} \subset \dots$, las cuales inducen inclusiones $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^k) \hookrightarrow \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^{k+1})$. De este modo, la **grassmanniana infinita** se define como

$$\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty) = \varinjlim_k \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^k) = \bigcup_k \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^k).$$

Dotando a $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ de la topología del colímite, se obtiene un CW-complejo de dimensión infinita. Sobre cada grassmanniana $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^k)$ existe un haz vectorial complejo $E_n(\mathbb{C}^k) \rightarrow \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^k)$ de rango n , definido por

$$E_n(\mathbb{C}^k) := \{(W, v) \in \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^k) \times \mathbb{C}^k \mid v \in W\}.$$

Pasando al colímite, se obtiene un haz vectorial complejo $E_n(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ de rango n , llamado el **haz universal de rango n** .

Teorema 1.1.9 ([Hat03], Teorema 1.16). *Sea X un espacio paracompacto Hausdorff. Entonces la asignación $[X, \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)] \rightarrow \mathrm{Vect}^n(X)$ que envía cada clase $[f]$ a la clase de isomorfismo de $f^*(E_n(\mathbb{C}^\infty))$ es una biyección.*

En consecuencia del resultado anterior, los haces vectoriales sobre un espacio paracompacto Hausdorff son clasificados por clases de homotopía de aplicaciones hacia $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$.

Por esta razón, la grassmanniana infinita $\text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ se denomina **espacio clasificante** para haces vectoriales.

La construcción anterior es un caso particular de una situación más general, la cual se describe a continuación. Recordemos que una **acción** de un grupo topológico G sobre un espacio topológico X es una aplicación continua

$$\cdot : G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

tal que $1 \cdot x = x$ y $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ para cualesquiera $g, h \in G$ y $x \in X$, donde 1 denota el elemento identidad de G . En este caso, decimos que X es un G -**espacio**. La acción se dice **libre** si $gx = x$ implica que $g = 1$ para todo $g \in G$ y $x \in X$.

Sea G un grupo topológico compacto y Hausdorff. Un G -**haz universal** es un G -haz principal (véase [Hus66]) $EG \rightarrow BG$ tal que, para todo espacio paracompacto Hausdorff X , la aplicación

$$[X, BG] \rightarrow \text{Prin}_G(X), \quad f \mapsto f^*(EG)$$

es una biyección. Aquí, $\text{Prin}_G(X)$ denota el conjunto de clases de isomorfismo de G -haces principales sobre X . Para construir los espacios EG y BG utilizaremos la construcción de Milnor.

Definición 1.1.10 (Producto join). Sean X y Y espacios topológicos. El **producto join** de X y Y , denotado por $X * Y$, se define como el cociente de $X \times [0, 1] \times Y$ por la relación de equivalencia

$$\begin{aligned} (x, 0, y) &\sim (x', 0, y), & x, x' \in X, y \in Y, \\ (x, 1, y) &\sim (x, 1, y'), & x \in X, y, y' \in Y. \end{aligned}$$

Definimos EG como el join infinito $EG = G * G * \dots$. De manera explícita, un punto de EG está representado por una sucesión formal $(t_1 g_1, t_2 g_2, \dots)$, donde $t_i \in [0, 1]$, sólo un número finito de los t_i es distinto de cero y $\sum_i t_i = 1$. Dos sucesiones $(t_1 g_1, t_2 g_2, \dots)$ y $(t'_1 g'_1, t'_2 g'_2, \dots)$ representan el mismo punto si $t_j = t'_j$ para todo j y se cumple que $g_i = g'_i$ siempre que $t_i \neq 0$.

La topología en EG se define como la topología débil inducida por la unión de los joins finitos

$$G^{*n} = \underbrace{G * \dots * G}_{n \text{ veces}}, \quad EG = \bigcup_{n \geq 1} G^{*n}.$$

Con esta topología, EG es un CW-complejo y, en particular, un espacio paracompacto. Además, G actúa libremente (véase la Definición 2.1.3) sobre EG mediante la acción dada por $(t_1 g_1, t_2 g_2, \dots) \cdot g = (t_1 g_1 g, t_2 g_2 g, \dots)$.

El espacio base BG se define como el cociente $BG = EG/G$, y se denomina el **espacio clasificante** de G . Un teorema de Milnor establece que el haz principal $EG \rightarrow BG$ es un G -haz universal.

Ejemplo 1.1.11. Si $G = U(n)$ es el grupo de matrices unitarias de tamaño $n \times n$, entonces su espacio clasificante es homotópicamente equivalente a la grassmanniana infinita, esto es, $BU(n) \simeq \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$. Bajo esta identificación, el haz universal $E_n(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ corresponde al $U(n)$ -haz principal universal $EU(n) \rightarrow BU(n)$.

K -teoría

En este apartado daremos una descripción general de la K -teoría de un espacio compacto y Hausdorff. Comenzaremos introduciendo la construcción de Grothendieck de un monoide conmutativo.

Sea M un monoide conmutativo. Definimos

$$K(M) := M \times M / \sim,$$

donde la relación de equivalencia está dada como sigue: $(a, b) \sim (c, d)$ si y solo si existe $k \in M$ tal que $a + d + k = b + c + k$. La clase de equivalencia correspondiente a (a, b) será denotada simplemente $a - b$.

En $K(M)$ se define la operación $(a - b) + (c - d) := (a + c) - (b + d)$, la cual está bien definida y convierte a $K(M)$ en un grupo abeliano. Además, existe un morfismo natural de monoides

$$\iota_M : M \rightarrow K(M), \quad a \mapsto a - 0,$$

que satisface la siguiente propiedad universal: si A es un grupo abeliano y $f : M \rightarrow A$ es un morfismo de monoides, entonces existe un único morfismo de grupos abelianos $\varphi : K(M) \rightarrow A$ tal que $f = \varphi \circ \iota_M$. En este caso, decimos que el grupo $K(M)$ es la **completación a grupo** de M .

Equivalentemente, $K(M)$ puede definirse como el cociente del grupo abeliano libre con base M por el subgrupo generado por las relaciones

$$[a] + [b] = [a + b], \quad a, b \in M,$$

donde $[a]$ denota el generador correspondiente al elemento a y $a + b$ denota la operación en M . Esta descripción es precisamente la construcción de Grothendieck de una categoría aditiva, aplicada al caso en el que M se considera como una categoría con un solo objeto. Por ello, en adelante nos referiremos a $K(M)$ simplemente como la construcción de Grothendieck de M .

Denotaremos por $\text{Vect}(X)$ al conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales complejos sobre X . Si E es un haz vectorial sobre X , escribiremos $[E]$ para denotar su clase de isomorfismo.

Dados $[E], [E'] \in \text{Vect}(X)$, definimos $[E] + [E'] := [E \oplus E']$ y $[E] \cdot [E'] := [E \otimes E']$. Se verifica fácilmente que estas operaciones están bien definidas. Además, con estas operaciones, $\text{Vect}(X)$ tiene estructura de semianillo conmutativo. El elemento neutro para la suma está dado por la clase del haz cero, mientras que el elemento neutro para el producto está dado por la clase del haz trivial de rango uno.

Definición 1.1.12 (K -teoría). Sea X un espacio compacto y Hausdorff. La K -teoría de X se define como

$$K(X) := K(\text{Vect}(X)),$$

la construcción de Grothendieck del semianillo $\text{Vect}(X)$. Los elementos de $K(X)$ se denominan **haces virtuales** sobre X .

Una descripción homotópica de la K -teoría de un espacio es la siguiente. Por el Teorema 1.1.9, sabemos que $\text{Vect}^n(X) \cong [X, BU(n)]$; al tomar el colímite,

$$BU := \varinjlim_n BU(n),$$

obtenemos que $[X, BU] = \varinjlim_n [X, BU(n)]$. De este modo, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1.13 ([May99]). Sea X un espacio compacto Hausdorff. Entonces, se tiene un isomorfismo natural

$$K(X) \cong [X, BU \times \mathbb{Z}].$$

Aquí $\mathbb{Z}$ es considerado como espacio discreto.

Definición 1.1.14. Sea X un espacio del mismo tipo de homotopía de un CW-complejo. La K -teoría de X se define como $K(X) := [X, BU \times \mathbb{Z}]$.

K -teoría equivariante

De manera general, abordaremos la K -teoría equivariante con el propósito de presentar algunos resultados que serán de utilidad en el Capítulo 5.

Definición 1.1.15 (G -haz vectorial). Sea G un grupo finito y X un G -espacio. Un G -haz vectorial sobre X es un G -espacio E junto con una aplicación G -equivariante $p : E \rightarrow X$ que cumple las siguientes propiedades.

- i) La aplicación $p : E \rightarrow X$ es un haz vectorial.

ii) La acción de G es lineal fibra a fibra. Esto es, para todo $g \in G$ y $x \in X$,

$$g : E_x \rightarrow E_{gx}$$

es una transformación lineal.

Definición 1.1.16 (Morfismo de haces equivariantes). Un **homomorfismo de G -haces vectoriales** sobre X es una aplicación continua G -equivariante $f : E \rightarrow E'$ que induce un homomorfismo $f_x : E_x \rightarrow E'_x$ de espacios vectoriales para todo $x \in X$.

Todas las construcciones de haces vectoriales que estudiamos en la sección anterior son válidas para el caso equivariante. Para mayor detalle, se sugiere al lector interesado consultar [Seg68].

Sea X un G -espacio compacto Hausdorff. Denotamos por $\text{Vect}_G(X)$ al conjunto de clases de isomorfismo de G -haces vectoriales sobre X . Este conjunto junto con la suma y el producto inducido por la suma directa y el producto tensorial, respectivamente, tiene estructura de semianillo conmutativo.

Definición 1.1.17 (K -teoría equivariante). La **K -teoría equivariante** de X se define como la construcción de Grothendieck de $\text{Vect}_G(X)$ y se denota por $K_G(X)$.

La siguiente construcción exhibe una relación entre haces vectoriales H -equivariantes y G -equivariantes, donde $H \leq G$. Sea X un H -espacio. Se define el espacio

$$G \times_H X := (G \times X)/H,$$

donde la acción H sobre $G \times X$ está dada por $(g, x) \cdot h = (gh, h^{-1}x)$. Denotamos por $[g, x]$ la clase de (g, x) en $G \times_H X$. El espacio $G \times_H X$ es un G -espacio cuya acción está dada por $g' \cdot [g, x] = [g'g, x]$ para cada $g' \in G$. Así, se tiene la inclusión

$$\begin{aligned} \iota : X &\rightarrow G \times_H X \\ x &\mapsto [1, x], \end{aligned}$$

la cual identifica X con el subespacio $H \times_H X \subseteq G \times_H X$.

Ahora, si $p : E \rightarrow X$ es un haz vectorial H -equivariante, entonces se obtiene un haz vectorial G -equivariante

$$\begin{aligned} G \times_H E &\rightarrow G \times_H X \\ [g, e] &\mapsto [g, p(e)]. \end{aligned}$$

Además, al considerar el pullback a lo largo de ι , se recupera el haz original; esto es, $\iota^*(G \times_H E) \cong E$.

Por otra parte, sea $E' \rightarrow G \times_H X$ un haz vectorial G -equivariante. Restringiendo el espacio total a la imagen de ι , se obtiene un haz H -equivariante $E := E'|_{\iota(X)} \rightarrow X$. A partir de este se construye el haz inducido $G \times_H E \rightarrow G \times_H X$. Existe entonces un morfismo natural de haces G -equivariantes

$$\psi : G \times_H E \rightarrow E', \quad [g, e] \mapsto g \cdot e,$$

para cada $e \in E$. Este morfismo está bien definido y es un isomorfismo de haces G -equivariantes. Por lo tanto, las construcciones $E \mapsto G \times_H E$ y $E' \mapsto E'|_{\iota(X)}$ son inversas una de la otra. En consecuencia, $\text{Vect}_G(G \times_H X) \cong \text{Vect}_H(X)$.

Los morfismos ι y ψ inducen morfismos $\iota^* : K_G(G \times_H X) \rightarrow K_H(X)$ y $\psi^* : K_H(X) \rightarrow K_G(G \times_H X)$ inversos entre sí. Por lo tanto, $K_G(G \times_H X) \cong K_H(X)$.

Para concluir con este apartado, mostraremos que es equivalente tomar primero el monoide de haces vectoriales equivariantes cociente por cierta relación de equivalencia y después aplicar la construcción de Grothendieck, que proceder en el orden inverso; es decir, aplicar primero la construcción de Grothendieck y luego pasar al cociente.

Sea G un grupo, $H \leq G$, y X un G -espacio compacto Hausdorff. Denotemos por $\text{Vect}_H(X)$ al monoide de clases de isomorfismo de haces vectoriales H -equivariantes sobre X . El normalizador $N_G(H)$ actúa sobre $\text{Vect}_H(X)$ de la siguiente manera. Si $n \in N_G(H)$ y $p : E \rightarrow X$ es un haz vectorial H -equivariante, definimos ${}^n E := \lambda_{n^{-1}}^* E$, donde $\lambda_{n^{-1}} : X \rightarrow X$ es el homeomorfismo dado por $\lambda_{n^{-1}}(x) = n^{-1}x$. Este haz se equipa con la acción de H inducida por conjugación; esto es, si $h \in H$, entonces h actúa sobre la fibra correspondiente mediante $n^{-1}hn$. Como $n \in N_G(H)$, se tiene $n^{-1}hn \in H$, por lo que esta acción está bien definida.

Diremos que $[E], [F] \in \text{Vect}_H(X)$ están relacionados, y lo denotamos por $[E] \sim' [F]$, si existe un elemento $n \in N_G(H)$ tal que $[F] = [{}^n E]$. Es inmediato verificar que $\sim'$ define una relación de equivalencia en $\text{Vect}_H(X)$. A partir de esta relación, nos gustaría que la estructura de monoide de $\text{Vect}_H(X)$ se herede al cociente $\text{Vect}_H(X)/\sim'$. Sin embargo, para que esto sea posible, es necesario que $\sim'$ sea una congruencia de monoides.

Definición 1.1.18 (Congruencia de monoides). Sea M un monoide. Una relación de equivalencia R en M es una **congruencia** si para cualesquiera $a, b, c, d \in M$ con aRc y bRd , se cumple $(a \cdot b)R(c \cdot d)$.

Veamos que $\sim'$ no necesariamente es una congruencia en $\text{Vect}_H(X)$. Sean $[E_1], [E_2], [F_1]$ y $[F_2]$ en $\text{Vect}_H(X)$ con $[E_1] \sim' [F_1]$ y $[E_2] \sim [F_2]$. Entonces, existen $n_1, n_2 \in N_G(H)$ tales que $[F_1] = [{}^{n_1} E_1]$ y $[F_2] = [{}^{n_2} E_2]$. Luego $[F_1] \oplus [F_2] = [{}^{n_1} E_1 \oplus {}^{n_2} E_2]$. Por otra parte, $[E_1 \oplus E_2] \sim' [F_1 \oplus F_2]$ implicaría la existencia de $n \in N_G(H)$ tal que $[F_1 \oplus F_2] = [{}^n (E_1 \oplus E_2)]$, pero en general puede no existir tal n tal que ${}^{n_1} E_1 \oplus {}^{n_2} E_2$ sea isomorfo a ${}^n E_1 \oplus {}^n E_2$ en $\text{Vect}_H(X)$. Por lo tanto, $\sim'$ no es una congruencia.

El siguiente resultado garantiza la existencia de una congruencia a partir de una relación de equivalencia.

Proposición 1.1.19 ([Spi14], Proposición 4.1.18). *Sea $(M, \cdot)$ un monoide. Las siguientes afirmaciones se cumplen.*

1. *Toda relación $R \subset M \times M$ genera una congruencia S en M tal que S es la congruencia más pequeña que contiene a R .*
2. *Si $\sim$ es una congruencia en M , entonces $M/\sim$ es un monoide compatible con la estructura del monoide M .*

Sea $\sim$ la congruencia generada por $\sim'$. Entonces, por el resultado anterior,

$$\text{Vect}_H(X)/N_G(H) := \text{Vect}_H(X)/\sim$$

es un monoide cuyos elementos son clases de la forma $\overline{[E]}$.

Dado que el normalizador $N_G(H)$ actúa sobre $\text{Vect}_H(X)$, se induce una acción por automorfismos sobre $K_H(X)$. Definimos los coinvariantes de $K_H(X)$ bajo el normalizador $N_G(H)$ como el cociente

$$K_H(X)_{N_G(H)} := \frac{K_H(X)}{\langle a - {}^n a \rangle},$$

donde $\langle a - {}^n a \rangle$ denota el subgrupo generado por las diferencias $a - {}^n a$ para cada $a \in K_H(X)$ y $n \in N_G(H)$.

Lema 1.1.20. *Sea X un G -espacio compacto Hausdorff y sea $H \leq G$. Entonces*

$$K_H(X)_{N_G(H)} \cong K(\text{Vect}_H(X)/N_G(H))$$

como grupos abelianos.

Demostración. Sea $q : \text{Vect}_H(X) \rightarrow \text{Vect}_H(X)/N_G(H)$ la proyección canónica. Como q es un homomorfismo de monoides, por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck induce un homomorfismo de grupos abelianos $q_* : K_H(X) \rightarrow K(\text{Vect}_H(X)/N_G(H))$ dado por $q_*([E] - [F]) = q([E]) - q([F])$. Veamos que q_* se factoriza a través de los coinvariantes. Sea $a = [E] - [F] \in K_H(X)$ y sea $n \in N_G(H)$. Entonces ${}^n a = [{}^n E] - [{}^n F]$. Por lo tanto,

$$q_*({}^n a) = q([{}^n E]) - q([{}^n F]) = q([E]) - q([F]) = q_*(a),$$

pues $q([{}^n E]) = q([E])$ y $q([{}^n F]) = q([F])$ en $\text{Vect}_H(X)/N_G(H)$. En consecuencia, $q_*(a - {}^n a) = 0$. Luego $\langle a - {}^n a \rangle \subseteq \text{Ker}(q_*)$.

De este modo, q_* se factoriza de manera única a través de la proyección canónica $\pi : K_H(X) \rightarrow K_H(X)_{N_G(H)}$. Obtenemos entonces un homomorfismo de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \Phi : K_H(X)_{N_G(H)} &\rightarrow K(\text{Vect}_H(X)/N_G(H)) \\ \overline{[E] - [F]} &\mapsto \overline{[E]} - \overline{[F]} \end{aligned}$$

tal que $q_* = \Phi \circ \pi$.

Construiremos ahora el morfismo inverso. Sea $\varphi : \text{Vect}_H(X) \rightarrow K_H(X)_{N_G(H)}$ la aplicación dada por $\varphi([E]) = \pi([E])$. Esta aplicación es un homomorfismo de monoides. Además, si $n \in N_G(H)$, entonces

$$\varphi([{}^n E]) = \pi([{}^n E]) = \pi([E]) = \varphi([E]).$$

Por la propiedad universal del cociente, la aplicación φ induce un homomorfismo de monoides $\overline{\varphi} : \text{Vect}_H(X)/N_G(H) \rightarrow K_H(X)_{N_G(H)}$ definido como $\overline{\varphi}(q([E])) = \pi([E])$. Aplicando ahora la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, $\overline{\varphi}$ induce un homomorfismo de grupos abelianos

$$\begin{aligned} \Omega : K(\text{Vect}_H(X)/N_G(H)) &\rightarrow K_H(X)_{N_G(H)} \\ q([E]) - q([F]) &\mapsto \pi([E] - [F]). \end{aligned}$$

Claramente Φ y Ω son inversas una de la otra. Por lo tanto, concluimos que $K_H(X)_{N_G(H)}$ y $K(\text{Vect}_H(X)/N_G(H))$ son isomorfos como grupos abelianos. $\square$

1.2. Grupos p -locales finitos

En este apartado se presentará la teoría básica de los sistemas de fusión, siguiendo las ideas expuestas en [AKO11], con el objetivo de introducir los grupos p -locales finitos definidos en [BLO03]. A partir de ahora, a menos que se indique lo contrario, p denotará un número primo.

Sistemas de fusión

Sea G un grupo finito y S un p -subgrupo de Sylow de G , donde p es un número primo. Dos subgrupos P y Q de S se dicen **G -fusionados** si existe $g \in G$ tal que ${}^g P = gPg^{-1} = Q$. Históricamente, este concepto fue introducido por W. Burnside a finales del siglo XIX y se desarrolló hasta la segunda mitad del siglo XX, dando como resultado una manera de codificar la fusión de subgrupos en una categoría. Más precisamente, dado un grupo finito G y un p -subgrupo de Sylow S de G , el **sistema de fusión** de G sobre S es la categoría $\mathcal{F}_S(G)$ definida como sigue: sus objetos son los subgrupos de S y, para $P, Q \leq S$,

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}_S(G)}(P, Q) = \text{Hom}_G(P, Q) := \{c_g : P \rightarrow Q \mid g \in G\},$$

donde c_g es el homomorfismo inducido por la conjugación en G . La composición de morfismos es la composición usual de homomorfismos de grupos y, para cada $P \leq S$, el morfismo identidad es id_P . Observemos que esta definición depende de la elección de un p -subgrupo de Sylow S . Sin embargo, esta elección no afecta al sistema de fusión salvo isomorfismo. En efecto, si S' es otro p -subgrupo de Sylow de G , entonces existe $g \in G$ tal que $S' = gSg^{-1}$, y la conjugación por g induce un isomorfismo de categorías $\mathcal{F}_S(G) \cong \mathcal{F}_{S'}(G)$. Motivados por esta construcción, podemos abstraer las propiedades esenciales de estas categorías y definir un sistema de fusión sobre un p -grupo arbitrario.

Definición 1.2.1 (Sistema de fusión). Sea S un p -grupo finito. Un **sistema de fusión** sobre S es una categoría $\mathcal{F}$ cuyos objetos son los subgrupos de S , y sus morfismos son homomorfismos de grupos tales que, para cada $P, Q \in \mathcal{F}$, el conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ cumple lo siguiente.

1. $\text{Hom}_S(P, Q) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q) \subseteq \text{Inj}(P, Q)$, donde $\text{Inj}(P, Q)$ denota el conjunto de homomorfismos inyectivos de P a Q .
2. Todo morfismo $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ se factoriza como un isomorfismo en $\mathcal{F}$ seguido de una inclusión.

Aquí, la composición en $\mathcal{F}$ es la composición usual de homomorfismos de grupos y, para cada $P \leq S$, el morfismo identidad es id_P .

Notación. Sea S un grupo y P un subgrupo de S . Entonces,

$$\begin{aligned} C_S(P) &:= \{g \in S \mid gpg^{-1} = p \text{ para todo } p \in P\}, \\ N_S(P) &:= \{g \in S \mid gPg^{-1} = P\}, \end{aligned}$$

denotan el centralizador y el normalizador de P en S , respectivamente. Si $\text{Aut}(P)$ es el grupo de automorfismos de P , existe un homomorfismo de grupos $c : N_S(P) \rightarrow \text{Aut}(P)$ cuyo kernel es $C_S(P)$; la imagen del normalizador $N_S(P)$ bajo el homomorfismo c se denota como $\text{Aut}_S(P)$. El grupo de automorfismos internos de P es

$$\text{Inn}(P) := \text{Aut}_P(P) = c(P),$$

el subgrupo de $\text{Aut}(P)$ formado por los automorfismos inducidos por conjugación por elementos de P . El grupo de automorfismos externos de P se define como el cociente $\text{Out}(P) := \text{Aut}(P)/\text{Inn}(P)$.

Definición 1.2.2. Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo.

- Dos subgrupos $P, Q \leq S$ se dicen **$\mathcal{F}$ -conjugados** si son isomorfos como objetos en la categoría $\mathcal{F}$. Denotamos por $P^{\mathcal{F}}$ al conjunto de todos los subgrupos de S que son $\mathcal{F}$ -conjugados a P .

- Un subgrupo $P \leq S$ es **plenamente $\mathcal{F}$ -centralizado** si $|C_S(Q)| \leq |C_S(P)|$, para todo $Q \in P^\mathcal{F}$.
- Un subgrupo $P \leq S$ es **plenamente $\mathcal{F}$ -normalizado** si $|N_S(Q)| \leq |N_S(P)|$, para todo $Q \in P^\mathcal{F}$.
- El sistema de fusión $\mathcal{F}$ se dice **saturado** si se cumplen las condiciones siguientes.
 - i) Cada subgrupo $P \leq S$ plenamente $\mathcal{F}$ -normalizado también es plenamente $\mathcal{F}$ -centralizado, y $\text{Aut}_S(P)$ es un p -subgrupo de Sylow de $\text{Aut}_\mathcal{F}(P) = \text{Hom}_\mathcal{F}(P, P)$.
 - ii) Para cada morfismo $\varphi : P \rightarrow S$ en $\mathcal{F}$, se define el conjunto

$$N_\varphi := \{g \in N_S(P) : \exists h \in N_S(\varphi(P)) \text{ tal que } \varphi(gp) =^h \varphi(p), \text{ para toda } p \in P\}.$$

Si $\varphi(P)$ es plenamente $\mathcal{F}$ -normalizado, φ se extiende a un morfismo $\Psi : N_\varphi \rightarrow S$ en $\mathcal{F}$ tal que $\Psi|_P = \varphi$.

Si G es un grupo finito y S es un p -subgrupo de Sylow de G , la categoría $\mathcal{F}_S(G)$ es un sistema de fusión en el sentido de la Definición 1.2.1. En particular, $\mathcal{F}_S(G)$ es saturado. Sin embargo, no todos los sistemas de fusión (saturados) corresponden a sistemas de fusión de un grupo finito sobre un p -subgrupo de Sylow. Aquellos que sí lo son se dicen **realizables**, en caso contrario se dicen **exóticos**. En el contexto de la clasificación de los grupos finitos simples, Ron Solomon construyó el primer ejemplo de un sistema de fusión exótico [Sol74]. Para ello, consideró el 2-sistema local $\text{Sol}(q)$ sobre un 2-subgrupo de Sylow de $\text{Spin}_7(q)$, donde q es un número impar. Solomon demostró que $\text{Sol}(q)$ tiene una única clase de conjugación de elementos de orden dos, al igual que ocurre con $\text{Spin}_7(q)$, y que no existe ningún grupo con una estructura 2-local isomorfa a $\text{Sol}(q)$. Aquí, por estructura p -local de un grupo entendemos un p -subgrupo de Sylow junto con las relaciones de fusión de sus subgrupos.

Elementos estables

Motivados por el álgebra homológica, introduciremos la definición de elemento G -estable, y después extenderemos esta definición para un sistema de fusión. El Teorema de Cartan-Eilenberg exhibe una manera de calcular la cohomología de un grupo con coeficientes en un campo finito $\mathbb{F}_p$ a través de los elementos G -estables de la cohomología de su p -subgrupo de Sylow con coeficientes en $\mathbb{F}_p$. Esto es,

$$H^*(G; \mathbb{F}_p) \cong H^*(S; \mathbb{F}_p)^{G\text{-estables}},$$

con S un p -subgrupo de Sylow de G . Un elemento $a \in H^*(S; \mathbb{F}_p)$ se dice **G-estable** si

$$\text{res}_{xS \cap S}^x c_{x-1}^*(a) = \text{res}_{xS \cap S}^S(a),$$

donde ${}^xS = xSx^{-1}$ para todo $x \in G$. La manera de generalizar esto a la categoría $\mathcal{F}_S(G)$ es mediante el funtor de cohomología. Sea R un anillo conmutativo unitario y sea $R\text{-Mod}$ la categoría de R -módulos. Entonces, $H^n(-, \mathbb{F}_p) : \mathcal{F}_S(G) \rightarrow R\text{-Mod}$ es un funtor que, en objetos, asigna a cada subgrupo P de S el R -módulo $H^n(P; \mathbb{F}_p)$, y a cada G -conjugación c_g en $\mathcal{F}_S(G)$ le corresponde el morfismo inducido en cohomología. El límite del funtor $H^n(-; \mathbb{F}_p)$ sobre la categoría $\mathcal{F}_S(G)$ se define como

$$\varprojlim_{\mathcal{F}_S(G)} H^n(P; \mathbb{F}_p) := \left\{ (a_P)_P \in \prod_{P \leq S} H^n(P; \mathbb{F}_p) \mid c_g^* a_Q = a_P \text{ si } c_g : P \rightarrow Q \text{ en } \mathcal{F}_S(G) \right\}.$$

Se puede verificar que la función

$$\begin{aligned} \Phi : H^n(S; \mathbb{F}_p)^{G\text{-estables}} &\rightarrow \varprojlim_{\mathcal{F}_S(G)} H^n(P; \mathbb{F}_p) \\ a &\mapsto (\text{res}_P^S(a))_P \end{aligned}$$

está bien definida y es un isomorfismo. Por lo tanto, el Teorema de Cartan-Eilenberg se puede formular de la siguiente manera.

Teorema 1.2.3 (Teorema de Cartan-Eilenberg). *Sea G un grupo finito. Si S es un p -subgrupo de Sylow de G , entonces*

$$H^n(G; \mathbb{F}_p) \cong \varprojlim_{\mathcal{F}_S(G)} H^n(P; \mathbb{F}_p),$$

para toda $n \geq 0$.

Demostración. La demostración de este resultado puede consultarse en [Bro12], Teorema III.10.3. $\square$

El resultado anterior es una manera teórica para determinar la cohomología de grupos finitos con coeficientes en $\mathbb{F}_p$, pero es poco útil para hacer cálculos. Sin embargo, exhibe la importancia de los elementos estables. Por lo cual, el siguiente paso consiste en generalizar la definición de elemento estable en el contexto de sistemas de fusión.

Definición 1.2.4 (Elemento $\mathcal{F}$ -estable). Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S y sea H un funtor contravariante de $\mathcal{F}$ en alguna de las categorías Grp , $R\text{-Mod}$, Ring o Set . Un elemento $x \in H(S)$ se dice $\mathcal{F}$ -estable si, para todo $P \leq S$ y $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$, se cumple

$$H(\varphi)(x) = H(\iota_P^S)(x),$$

donde $\iota_P^S : P \hookrightarrow S$ denota la inclusión. El conjunto de elementos $\mathcal{F}$ -estables es denotado por $H(S)^{\mathcal{F}}$.

Definición 1.2.5. Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo. Un subgrupo $P \leq S$ se dice

- **$\mathcal{F}$ -céntrico** si es plenamente $\mathcal{F}$ -centralizado y el centralizador de P en S es igual a su centro.
- **$\mathcal{F}$ -radical** si $\text{Out}_{\mathcal{F}}(P) = \text{Aut}_{\mathcal{F}}(P)/\text{Inn}(P)$ no tiene p -subgrupos normales propios.

Denotaremos por $\mathcal{F}^c$ la subcategoría plena de $\mathcal{F}$ cuyos objetos son los subgrupos $\mathcal{F}$ -céntricos, y por $\mathcal{F}^{cr}$ la subcategoría plena de $\mathcal{F}$ cuyos objetos son los subgrupos $\mathcal{F}$ -radicales y $\mathcal{F}$ -céntricos.

Teorema 1.2.6 (Teorema de fusión de Alperin). *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Entonces, para cada isomorfismo $\varphi : P \rightarrow P'$ en $\mathcal{F}$, existen sucesiones de subgrupos de S ,*

$$P = P_0, P_1, \dots, P_k = P' \quad \text{y} \quad Q_1, Q_2, \dots, Q_k,$$

y morfismos $\varphi_i \in \text{Aut}_{\mathcal{F}}(Q_i)$, tales que

1. Q_i es plenamente $\mathcal{F}$ -normalizado, $\mathcal{F}$ -céntrico y $\mathcal{F}$ -radical, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.
2. $P_{i-1}, P_i \leq Q_i$ y $\varphi_i(P_{i-1}) = P_i$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$.
3. $\varphi = \varphi_k \circ \varphi_{k-1} \circ \dots \circ \varphi_1$.

Con lo anterior, se pueden demostrar los siguientes resultados, cuyas demostraciones detalladas se encuentran en el Teorema 3.2.3 y la Proposición 3.2.4 de [Gas20].

Teorema 1.2.7. *Sea $x \in H(S)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- i) x es $\mathcal{F}$ -estable.
- ii) $H(\varphi)H(\iota_Q^S)(x) = H(\iota_P^S)(x)$, para todo $P, Q \leq S$ y $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$.
- iii) $H(\varphi)H(\iota_P^S)(x) = H(\iota_P^S)(x)$, para todo $P \in \mathcal{F}^{cr}$ y $\varphi \in \text{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$.

Proposición 1.2.8. *Sea R un anillo conmutativo unitario y sea $H : \mathcal{F}^{op} \rightarrow R\text{-Mod}$ un funtor contravariante. Entonces,*

$$H(S)^{\mathcal{F}} \cong \varprojlim_{\mathcal{F}^{op}} H.$$

Grupos p -locales finitos

Definición 1.2.9 (Sistema céntrico de enlace). Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre un p -grupo S . Un **sistema céntrico de enlace** asociado a $\mathcal{F}$ es una categoría $\mathcal{L}$ que tiene como objetos los subgrupos $\mathcal{F}$ -céntricos de S , junto con un funtor $\pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}^c$ y monomorfismos distinguidos $\delta_P : P \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{L}}(P)$ para cada $P \leq S$ subgrupo $\mathcal{F}$ -céntrico, que cumplen lo siguiente.

- (A) π es la identidad en objetos y es sobreyectivo en los morfismos. Más precisamente, para cada par de objetos $P, Q \in \mathcal{L}$, el centro $Z(P)$ de P actúa libremente (véase la Definición 2.1.3) en $\text{Mor}_{\mathcal{L}}(P, Q)$ por composición (al identificar $Z(P)$ con $\delta_P(Z(P)) \leq \text{Aut}_{\mathcal{L}}(P)$), y π induce una biyección

$$\text{Mor}_{\mathcal{L}}(P, Q)/Z(P) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q).$$

- (B) Para cada $P \in \mathcal{L}$ y cada $g \in P$, el funtor π envía $\delta_P(g) \in \text{Aut}_{\mathcal{L}}(P)$ a $c_g \in \text{Aut}_{\mathcal{F}}(P)$.

- (C) Para cada $f \in \text{Mor}_{\mathcal{L}}(P, Q)$ y cada $g \in P$, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & Q \\ \delta_P(g) \downarrow & & \downarrow \delta_Q(\pi(f)(g)) \\ P & \xrightarrow{f} & Q \end{array}$$

conmuta en $\mathcal{L}$.

Definición 1.2.10 (Grupo p -local finito). Un **grupo p -local finito** es una terna $(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$, donde $\mathcal{F}$ es un sistema de fusión saturado sobre un p -grupo S y $\mathcal{L}$ es un sistema céntrico de enlace asociado a $\mathcal{F}$.

Sean G y H grupos finitos, y sean S y T p -subgrupos de Sylow de G y H , respectivamente. Sea $\alpha : S \rightarrow T$ un isomorfismo que preserva la fusión (conjugaciones). Diremos que G es **p -localmente equivalente** a H si α induce un isomorfismo de categorías $\alpha_* : \mathcal{F}_S(G) \rightarrow \mathcal{F}_T(H)$. Una **propiedad p -local** es aquella que se preserva bajo equivalencias p -locales. La importancia de las propiedades p -locales de un grupo finito G está en que estas corresponden a propiedades p -locales de la p -completación del espacio clasificante BG . Así, la introducción de los grupos p -locales finitos viene motivada por generalizar la relación anterior. Dado que los grupos p -locales finitos son objetos algebraicos, se desearía tener un espacio con propiedades análogas a la p -completación del espacio clasificante de un grupo finito, cuyas características correspondan a las de un grupo p -local dado. Una manera de asociarle un espacio topológico a una categoría arbitraria $\mathcal{C}$ es a través de la realización geométrica de su

nervio $NC = \text{Fun}([n], \mathcal{C})$ (véase [GJ09]). En particular, el espacio clasificante de un grupo p -local $(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$, denotado por $B\mathcal{F}$, se define como la p -completación del nervio de la categoría $\mathcal{L}$. Para ver algunas caracterizaciones de $B\mathcal{F}$, se define la siguiente categoría.

Definición 1.2.11 (Categoría de órbitas). La **categoría de órbitas** de un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p -grupo S es la categoría $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ cuyos objetos son los subgrupos de S , y morfismos

$$\text{Mor}_{\mathcal{O}(\mathcal{F})}(P, Q) = \text{Rep}_{\mathcal{F}}(P, Q) := \text{Inn}(Q) \setminus \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q),$$

donde $\text{Inn}(Q)$ actúa sobre $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ por postcomposición. Así, $\text{Inn}(Q) \backslash \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ denota el conjunto de órbitas de esta acción.

Sea $\mathcal{O}^c(\mathcal{F})$ la subcategoría plena de $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ que tiene por objetos los subgrupos $\mathcal{F}$ -céntricos de S . Si $\mathcal{L}$ es el sistema céntrico de enlace asociado al sistema de fusión $\mathcal{F}$,

$$\tilde{\pi} : \mathcal{L} \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}^c \rightarrow \mathcal{O}^c(\mathcal{F})$$

es el funtor dado por la composición. Si $\mathcal{F}_0$ es cualquier subcategoría plena de $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{O}(\mathcal{F}_0)$ es la subcategoría plena de $\mathcal{O}(\mathcal{F})$ tal que sus objetos son los mismos que los objetos de la categoría $\mathcal{F}_0$. Por lo tanto, $\mathcal{O}(\mathcal{F}^c) = \mathcal{O}^c(\mathcal{F})$ [BLO03].

Proposición 1.2.12. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión saturado sobre un p -grupo S y $\mathcal{L}$ un sistema céntrico de enlace asociado a $\mathcal{F}$. Sea $\tilde{B} : \mathcal{O}^c(\mathcal{F}) \rightarrow \text{Top}$ la extensión de Kan izquierda homotópica sobre $\tilde{\pi} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{O}^c(\mathcal{F})$ del funtor constante $\mathcal{L} \xrightarrow{*} \text{Top}$. Entonces, $\tilde{B}$ es un levantamiento a Top , salvo isomorfismo natural, del funtor homotópico $P \mapsto BP$, y*

$$|\mathcal{L}|_p^\wedge \simeq \left(\varinjlim_{\mathcal{O}(\mathcal{F}^c)} (\tilde{B}) \right)_p^\wedge.$$

El siguiente resultado muestra que todo sistema de fusión saturado tiene asociado un sistema céntrico de enlace siempre que exista un levantamiento, salvo isomorfismo natural, del funtor homotópico $P \mapsto BP$.

Proposición 1.2.13. *Un sistema de fusión saturado sobre un p -grupo S tiene asociado un sistema céntrico de enlace $\mathcal{L}$ si y solo si el funtor $P \mapsto BP$ en $\mathcal{O}^c(\mathcal{F})$ admite un levantamiento a Top salvo isomorfismo natural.*

De los resultados anteriores, se siguen las siguientes correspondencias.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Sistemas céntricos} \\ \text{de enlace} \\ \text{asociados a } \mathcal{F} \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{Espacios} \\ \text{clasificantes} \\ \text{para } \mathcal{F} \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{c} \text{Levantamientos salvo} \\ \text{isomorfismo natural del} \\ \text{functor homotópico} \\ P \mapsto BP \end{array} \right\} \quad [\text{BLO04}]$$

Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p -grupo S , por la Proposición 1.2.8, el anillo de cohomología de elementos estables de $\mathcal{F}$ es

$$H^*(\mathcal{F}; \mathbb{F}_p) \cong \varprojlim_{\mathcal{F}^{\text{op}}} H^*(Q; \mathbb{F}_p).$$

En analogía con grupos finitos, se tiene una versión del Teorema de Cartan-Eilenberg para un grupo p -local finito.

Teorema 1.2.14 ([BLO03], Teorema 5.8). *Si $(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$ es un grupo p -local finito, entonces el homomorfismo natural*

$$H^*(|\mathcal{L}|_p^\wedge; \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathcal{F}; \mathbb{F}_p) := \varprojlim_{\mathcal{F}^{\text{op}}} H^*(Q; \mathbb{F}_p).$$

es un isomorfismo y el anillo $H^(|\mathcal{L}|_p^\wedge; \mathbb{F}_p)$ es noetheriano.*

El teorema anterior exhibe una relación entre un objeto algebraico con la p -completación de un espacio, tal como ocurre entre las propiedades p -locales de un grupo finito y las propiedades p -locales de la p -completación de su espacio clasificante.

Capítulo 2

Anillo de Burnside de grupos finitos y sistemas de fusión

2.1. G -conjuntos

Sea G un grupo y X un conjunto. Una **acción izquierda** de G sobre X es una función

$$\begin{aligned}\cdot : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

que satisface:

- i) $1 \cdot x = x$, donde $1 \in G$ es el elemento neutro de G y $x \in X$.
- ii) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$, para todo $g, h \in G$ y $x \in X$.

Definición 2.1.1 (G -conjunto). Sea G un grupo y X un conjunto. Si G actúa sobre X , diremos que X es un **G -conjunto**.

Como ejemplos inmediatos, tenemos que el conjunto vacío $\emptyset$ es un G -conjunto de manera única. Asimismo, cualquier conjunto con un solo elemento $X = \{*\}$ es un G -conjunto mediante la acción trivial $g \cdot * = *$ para todo $g \in G$.

Nota 2.1.2. Una acción derecha de G sobre X es una función $\cdot : X \times G \rightarrow X$ dada por $(x, g) \mapsto x \cdot g$, que satisface las condiciones análogas a las de una acción izquierda. Además, dada una acción izquierda de G en X es posible definir una acción derecha mediante $x \cdot g := g^{-1} \cdot x$. Por esta razón, solo trabajaremos con acciones izquierdas.

De manera equivalente, una acción de G en un conjunto X se define como un homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow \text{Sym}(X)$, donde $\text{Sym}(X) := \{\alpha : X \rightarrow X \mid \alpha \text{ es una biyección} \}$

es el grupo simétrico con la operación dada por la composición de funciones. Desde el punto de vista de la teoría de representaciones, es común referirse al homomorfismo ρ como representación de G por permutaciones.

Dado que una acción de un grupo sobre un conjunto se define como una función, los G -conjuntos pueden caracterizarse a partir de las propiedades asociadas a dicha función. A continuación, se presentan algunos de los tipos de acciones (y por tanto G -conjuntos) con los que se trabajará a lo largo de este documento.

Definición 2.1.3. Sea G un grupo y X un conjunto. Una acción de G sobre X se dice

- **trivial** si $g \cdot x = x$, para todo $g \in G$ y $x \in X$.
- **fiel** si cada vez que se tenga $g \cdot x = x$ para todo $x \in X$, entonces se debe tener $g = 1$.
- **libre** si la condición $g \cdot x = x$ para algún $x \in X$ implica $g = 1$.
- **transitiva** si $X \neq \emptyset$ y, para cada $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$.

Si la acción de G en X es trivial/fiel/libre/transitiva diremos que X es un **G -conjunto trivial/fiel/libre/transitivo**.

Si X es un G -conjunto, para cada elemento $x \in X$, el conjunto

$$Gx := \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

es un subconjunto de X , al cual llamamos la **órbita** de x en X . Por otro lado, si $x \in X$, el conjunto

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

resulta ser un subgrupo de G , al cual se le conoce como **subgrupo de isotropía** (o estabilizador) de x .

Dado $x \in X$, a partir de la órbita Gx de x en X , se pueden caracterizar las acciones transitivas. Esto es, dado un G -conjunto transitivo X y $x \in X$ fijo pero arbitrario, todo elemento $y \in X$ es de la forma $y = g \cdot x$, para algún $g \in G$. Luego $X = \{g \cdot x \mid g \in G\} = Gx$ y la órbita de x es todo el conjunto X . Si $Gx = X$, entonces para cada $y \in X$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$; así, la acción es transitiva. Esto muestra que una acción es transitiva si y solo si $X = Gx$ para algún (o, equivalentemente, para todo) $x \in X$.

En el siguiente ejemplo veremos que el conjunto de clases laterales G/H es un G -conjunto transitivo. Este conjunto será de suma importancia, ya que como veremos más adelante todos los G -conjuntos transitivos son de esta forma.

Ejemplo 2.1.4. Sea G un grupo, H un subgrupo de G y $X = G/H := \{aH \mid a \in G\}$ el conjunto de clases laterales izquierdas de H en G . El grupo G actúa sobre G/H mediante

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G/H &\rightarrow G/H \\ (g, aH) &\mapsto gaH. \end{aligned}$$

Primero, observemos que esta función está bien definida, ya que para clases laterales iguales $a_1H = a_2H$ se tiene $ga_1H = ga_2H$. Para ver que en efecto es una acción, basta verificar las propiedades i) y ii) de la definición de acción. Esto es,

- i) $1 \cdot aH = 1aH = aH$, para todo $aH \in G/H$.
- ii) $g \cdot (h \cdot aH) = g \cdot (ha)H = ghaH = (gh)aH = (gh) \cdot aH$, para todo $g, h \in G$ y $aH \in G/H$.

Por otro lado, esta acción es transitiva porque la órbita de $H = 1H$ es todo G/H . En efecto,

$$GH = \{g \cdot H \mid g \in G\} = \{gH \mid g \in G\} = G/H. \quad (2.1)$$

Definición 2.1.5. Sean X y Y dos G -conjuntos. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice **G -equivariante** si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$. Diremos que X y Y son **isomorfos** como G -conjuntos, denotado por $X \cong Y$, si existe una función $f : X \rightarrow Y$ biyectiva y G -equivariante.

Proposición 2.1.6. Sea G un grupo finito y X un G -conjunto. Si la acción de G sobre X es transitiva, entonces existe un subgrupo $H \leq G$ tal que X es isomorfo a G/H .

Demostración. Sea X un G -conjunto transitivo y $x \in X$ fijo pero arbitrario. Como la isotropía G_x de x es un subgrupo de G , tomamos $H = G_x$. Definimos la función $\varphi : G/H \rightarrow X$ dada por $\varphi(gH) = g \cdot x$. Observemos que

$$g_1H = g_2H \iff g_1^{-1}g_2 \in H \iff g_1^{-1}g_2 \cdot x = x \iff g_2 \cdot x = g_1 \cdot x.$$

Esto implica que φ está bien definida y es inyectiva. Por otro lado, como la acción de G sobre X es transitiva, para todo $y \in X$, existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$. Por lo tanto, $y = \varphi(gH)$ y φ es sobreyectiva. Como φ es inyectiva y sobreyectiva, se sigue que es biyectiva. Además, para cada $g' \in G$, se tiene

$$\varphi(g' \cdot (gH)) = \varphi((g'g)H) = (g'g) \cdot x = g' \cdot (g \cdot x) = g' \cdot \varphi(gH).$$

Esto muestra que X y G/H son isomorfos como G -conjuntos. □

Dado un G -conjunto X , diremos que dos elementos $x, y \in X$ están relacionados y denotamos $x \sim y$, si existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$. Esta relación es una relación de equivalencia, cuyas clases de equivalencia son las órbitas de la acción. Así, el conjunto $\{Gx \mid x \in X\}$ forma una partición de X . Esto implica que X es unión disjunta de órbitas. Como consecuencia de esto y de la Proposición 2.1.6, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.1.7 ([Cas21], Lema 3.19). *Sea G un grupo y X un G -conjunto. Entonces X es unión disjunta de G -conjuntos transitivos. Esto es,*

$$X \cong \coprod_{i \in I} X_i,$$

donde cada X_i es una órbita de la acción de G sobre X .

Proposición 2.1.8. *Sea G un grupo y $H, K \leq G$. Entonces G/H y G/K son isomorfos como G -conjuntos si y solo si H y K son G -conjugados.*

Demostración. Supongamos primero que $\varphi : G/H \rightarrow G/K$ es un isomorfismo de G -conjuntos, es decir, una función biyectiva y G -equivariante. Entonces, existe $g \in G$ tal que $\varphi(1H) = \varphi(H) = gK$ y

$$\varphi(H) = \varphi(hH) = h\varphi(H) = hgK, \quad h \in H.$$

Luego $gK = hgK$, de donde $g^{-1}hg \in K$ para todo $h \in H$. Esto implica que $g^{-1}Hg \subseteq K$. Por otro lado, como φ es un isomorfismo, $\varphi^{-1} : G/K \rightarrow G/H$ existe y está bien definida. Aplicando un argumento análogo a $\varphi^{-1} : G/K \rightarrow G/H$ se tiene la contención $K \subseteq g^{-1}Hg$. Por lo tanto, $g^{-1}Hg = K$.

Por otra parte, supongamos ahora que existe $g \in G$ tal que $K = g^{-1}Hg$. Consideremos la función $\psi : G/H \rightarrow G/K$ dada por $\psi(aH) = agK$. Observemos que

$$a_1H = a_2H \implies a_1^{-1}a_2 \in H \implies g^{-1}(a_1^{-1}a_2)g \in K \implies a_1gK = a_2gK.$$

Así, ψ está bien definida. Además, la inversa $\psi^{-1} : G/K \rightarrow G/H$ de esta función existe, está bien definida y está dada por $\psi^{-1}(a'K) = a'g^{-1}H$. Es claro que $\psi^{-1} \circ \psi = \text{id}_{G/H}$ y $\psi \circ \psi^{-1} = \text{id}_{G/K}$. Por lo tanto, ψ es un isomorfismo. Solo resta probar que ψ es G -equivariante. Sea $g' \in G$, entonces

$$\psi(g' \cdot aH) = \psi(g'aH) = g'agK = g' \cdot \psi(aH).$$

Así, $\psi : G/H \rightarrow G/K$ es un isomorfismo de G -conjuntos. □

Corolario 2.1.9. *Sea G un grupo finito y X un G -conjunto finito. Entonces X se descompone de manera única, salvo isomorfismo de G -conjuntos, como una unión disjunta*

$$X \cong \coprod_{i=1}^n \lambda_i G/H_i,$$

donde $H_1, H_2, \dots, H_n$ son representantes de todas las clases de G -conjugación de subgrupos de G y

$$\lambda_i = \frac{|\{x \in X \mid G_x \text{ es } G\text{-conjugado a } H_i\}|}{[G : H_i]}.$$

2.2. Semianillo y anillo de Burnside de un grupo finito

Como vimos anteriormente, dos G -conjuntos X y Y son isomorfos si existe una función $f : X \rightarrow Y$ biyectiva y G -equivariante. La relación “ser isomorfo a” define una relación de equivalencia, y $[X] := \{Y \mid X \cong Y\}$ denota la clase de equivalencia del G -conjunto X . Así, definimos

$$A^+(G) := \{[X] \mid X \text{ es un } G\text{-conjunto finito}\}$$

como el conjunto de clases de equivalencia de G -conjuntos finitos.

La unión disjunta de dos conjuntos X y Y se define como

$$X \amalg Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}).$$

Si X y Y son G -conjuntos, entonces $X \amalg Y$ también es un G -conjunto. Para ver esto, consideremos la función

$$\begin{aligned} \cdot : G \times (X \amalg Y) &\rightarrow X \amalg Y \\ g \cdot (x, 0) &\mapsto (g \cdot x, 0) \\ g \cdot (y, 1) &\mapsto (g \cdot y, 1). \end{aligned}$$

y veamos que satisface los axiomas i) y ii) de la definición de acción.

i) Sea 1_G el elemento neutro de G . Entonces,

$$\begin{aligned} 1_G \cdot (x, 0) &= (1_G \cdot x, 0) = (x, 0), & (x, 0) \in X \amalg Y \\ 1_G \cdot (y, 1) &= (1_G \cdot y, 1) = (y, 1), & (y, 1) \in X \amalg Y. \end{aligned}$$

ii) $g \cdot (h \cdot (x, 0)) = g \cdot (h \cdot x, 0) = (g \cdot (h \cdot x), 0) = ((gh)x, 0) = (gh) \cdot (x, 0)$, para cualesquiera $g, h \in G$ y $(x, 0) \in X \amalg Y$. Análogamente se prueba para $(y, 1) \in X \amalg Y$.

Para cada $[X], [Y] \in A^+(G)$, se define la operación $+$: $A^+(G) \times A^+(G) \rightarrow A^+(G)$ como

$$[X] + [Y] := [X \amalg Y].$$

Es sencillo comprobar que esta operación está bien definida en $A^+(G)$ y se denomina suma.

Proposición 2.2.1. *$(A^+(G), +)$ es un monoide conmutativo y cancelativo.*

Demostración. Sean $[X], [Y]$ y $[Z]$ elementos de $A^+(G)$. Entonces,

$$\begin{aligned} [X] + ([Y] + [Z]) &= [X] + [Y \amalg Z] \\ &= [X \amalg (Y \amalg Z)] \\ &= [(X \amalg Y) \amalg Z] \\ &= [X \amalg Y] + [Z] \\ &= ([X] + [Y]) + [Z], \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se obtiene del isomorfismo $X \amalg (Y \amalg Z) \cong (X \amalg Y) \amalg Z$ de G -conjuntos. Así, la suma es asociativa en $A^+(G)$. Además, la suma es conmutativa porque $X \amalg Y \cong Y \amalg X$ es un isomorfismo de G -conjuntos y en consecuencia

$$[X] + [Y] = [X \amalg Y] = [Y \amalg X] = [Y] + [X].$$

Por otro lado, veamos que para cada $[X] \in A^+(G)$, se tiene que $[X] + [\emptyset] = [X \amalg \emptyset] = [X]$. Es decir, la clase $[\emptyset]$ es el elemento neutro de $A^+(G)$, el cual denotamos por 0. Lo anterior muestra que $A^+(G)$ es un monoide conmutativo; solo queda probar que es cancelativo. Supongamos que $[X] + [Z] = [Y] + [Z]$. Por el Corolario 2.1.9, sea $\{H_1, \dots, H_n\}$ un conjunto de representantes de las clases de G -conjugación de subgrupos de G . Entonces existen $\lambda_i, \mu_i, \nu_i \in \mathbb{N}$ tales que

$$X \cong \coprod_{i=1}^n \lambda_i G/H_i, \quad Y \cong \coprod_{i=1}^n \mu_i G/H_i, \quad Z \cong \coprod_{i=1}^n \nu_i G/H_i.$$

Así,

$$X \amalg Z \cong \coprod_{i=1}^n (\lambda_i + \nu_i) G/H_i, \quad Y \amalg Z \cong \coprod_{i=1}^n (\mu_i + \nu_i) G/H_i. \quad (2.2)$$

Como $[X] + [Z] = [Y] + [Z]$, se cumple $X \amalg Z \cong Y \amalg Z$. En consecuencia, las descomposiciones en (2.2) corresponden al mismo G -conjunto. Por la unicidad de los coeficientes en el Corolario 2.1.9 se sigue que $\lambda_i + \nu_i = \mu_i + \nu_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Restando ν_i en ambos lados de la igualdad se obtiene $\lambda_i = \mu_i$ y

$$X \cong \coprod_{i=1}^n \lambda_i G/H_i = \coprod_{i=1}^n \mu_i G/H_i \cong Y.$$

Por lo tanto, $X \cong Y$ y $[X] = [Y]$. De este modo se concluye que $A^+(G)$ es un monoide cancelativo. $\square$

En el resultado anterior demostramos que $(A^+(G), +)$ es un monoide conmutativo. Lo que veremos a continuación es que, con el producto adecuado, se le puede dar estructura de semianillo conmutativo. Si X y Y son dos G -conjuntos, se tiene una acción de G sobre el producto cartesiano $X \times Y$ la cual está dada por

$$\begin{aligned} \cdot : G \times (X \times Y) &\rightarrow X \times Y \\ g \cdot (x, y) &\mapsto (gx, gy). \end{aligned}$$

En efecto, es una acción, ya que cumple con los axiomas i) y ii) de la definición de acción.

- i) Sea 1_G el elemento neutro de G . Entonces, $1_G \cdot (x, y) = (1_G x, 1_G y) = (x, y)$, para todo $x \in X$ y $y \in Y$.
- ii) Para cualesquiera $g, h \in G$, $x \in X$ y $y \in Y$ se tiene, $g \cdot (h \cdot (x, y)) = g \cdot (hx, hy) = ((gh)x, (gh)y) = (gh) \cdot (x, y)$.

Como $X \times Y$ es un G -conjunto, esto define una operación binaria $\cdot : A^+(G) \times A^+(G) \rightarrow A^+(G)$. Así, el producto en $A^+(G)$ está dado por

$$[X] \cdot [Y] = [X \times Y].$$

Definición 2.2.2 (Semianillo de Burnside de un grupo finito). Dado un grupo finito G , el **semianillo de Burnside** de G es el semianillo $(A^+(G), +, \cdot)$, con la suma y producto anteriormente definidos. La identidad multiplicativa corresponde a la clase de isomorfismo de G -conjuntos de cardinalidad 1.

En general, $(A^+(G), +, \cdot)$ no es un anillo porque ningún elemento no trivial en $A^+(G)$ tiene inverso aditivo. Esto es consecuencia de la cardinalidad de G -conjuntos. La manera natural de añadir los inversos es tomando la construcción de Grothendieck $K(A^+(G))$ de $A^+(G)$. Esto es,

$$K(A^+(G)) = \frac{\mathbb{Z}[A^+(G)]}{\langle [X \amalg Y] - [X] - [Y] \rangle},$$

donde $\mathbb{Z}[A^+(G)]$ es el grupo abeliano libre con base $A^+(G)$ y $\langle [X \amalg Y] - [X] - [Y] \rangle$ es el subgrupo de $\mathbb{Z}[A^+(G)]$ generado por $[X \amalg Y] - [X] - [Y]$. Esta última relación permite que la suma de $K(A^+(G))$ extienda la suma ya definida en $A^+(G)$ cuando vemos $A^+(G)$ dentro de $K(A^+(G))$ mediante el mapeo que envía X a su clase.

Definición 2.2.3 (Anillo de Burnside de un grupo finito). Sea G un grupo finito. El **anillo de Burnside** de G es la construcción de Grothendieck del semianillo $(A^+(G), +, \cdot)$, y se denota por $A(G) := K(A^+(G))$. A los elementos de $A(G)$ se les llama G -conjuntos virtuales.

Dado que $\mathbb{Z}[A^+(G)]$ es el grupo abeliano libre generado por $[X]$, con X un G -conjunto finito, todo elemento de $\mathbb{Z}[A^+(G)]$ puede escribirse como una combinación lineal finita

$$\sum_i n_i [X_i], \quad n_i \in \mathbb{Z}.$$

Separando los coeficientes positivos y negativos, obtenemos

$$\sum_i n_i [X_i] = \sum_{n_i > 0} n_i [X_i] - \sum_{n_i < 0} (-n_i) [X_i].$$

En el cociente $A(G) = \mathbb{Z}[A^+(G)] / \langle [X \amalg Y] - [X] - [Y] \rangle$ la relación $[X \amalg Y] = [X] + [Y]$ implica que cualquier suma finita de generadores puede escribirse como la clase de un único G -conjunto, pues

$$[X_1] + \cdots + [X_k] = [X_1 \amalg \cdots \amalg X_k].$$

Por lo tanto, todo elemento de $A(G)$ puede representarse como $[X] - [Y]$ para ciertos G -conjuntos finitos X y Y . A tales elementos los llamamos G -conjuntos virtuales.

Dado $[X] \in A^+(G)$, por el Corolario 2.1.9 existe una descomposición

$$[X] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [G/H_i],$$

donde $H_1, \dots, H_n$ son representantes de las clases de G -conjugación de subgrupos de G . Por lo tanto, si $[X] - [Y] \in A(G)$ es un G -conjunto virtual, existen enteros λ_i y μ_i tales que

$$[X] - [Y] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [G/H_i] - \sum_{i=1}^n \mu_i [G/H_i] = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) [G/H_i].$$

Esto muestra que los elementos $[G/H_i]$ generan $A(G)$ como grupo abeliano. Además, la descomposición del Corolario 2.1.9 es única, por lo que los coeficientes λ_i están determinados de manera única para cada G -conjunto finito. De aquí se deduce que si

$$\sum_{i=1}^n a_i [G/H_i] = 0$$

en $A(G)$, entonces necesariamente $a_i = 0$ para todo i . Por lo tanto, los elementos $[G/H_i]$ son linealmente independientes. En consecuencia, $\{[G/H_1], \dots, [G/H_n]\}$ forma una base de $A(G)$ como grupo abeliano y

$$A(G) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}[G/H_i].$$

Teorema 2.2.4. *El anillo de Burnside $A(G)$ de un grupo finito G es un $\mathbb{Z}$ -módulo libre con tantos generadores como clases de conjugación de subgrupos de G .*

Ejemplo 2.2.5. Sea $G = \mathbb{Z}/2 = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle$ el grupo cíclico de orden 2. El grupo $\mathbb{Z}/2$ solamente tiene dos subgrupos que son el subgrupo trivial $\{1\}$ y $\mathbb{Z}/2$ mismo. Ya que estos dos subgrupos tienen diferente orden, solo se tienen dos clases de conjugación. Por el teorema anterior, el anillo de Burnside de $\mathbb{Z}/2$ como $\mathbb{Z}$ -módulo libre es

$$A(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2/1] \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2. \quad (2.3)$$

Por otro lado, para determinar la estructura multiplicativa de $A(\mathbb{Z}/2)$ consideremos los generadores $X = [\mathbb{Z}/2/1]$ y $Y = [\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2]$. Luego,

$$X \cdot X = [\mathbb{Z}/2/1] \cdot [\mathbb{Z}/2/1] = [\mathbb{Z}/2/1 \times \mathbb{Z}/2/1]$$

Notemos que $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 = \{(1, 1), (1, g), (g, 1), (g, g)\}$, y este conjunto tiene dos órbitas dadas por $\{(1, 1), (g, g)\}$ y $\{(1, g), (g, 1)\}$. De este modo, $X \cdot X = [\mathbb{Z}/2/1 \times \mathbb{Z}/2/1] = [\mathbb{Z}/2/1] \amalg [\mathbb{Z}/2/1] = 2X$. Para las otras relaciones se tiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} [X] \cdot [Y] &= [\mathbb{Z}/2/1 \times \mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2] = [\mathbb{Z}/2/1] = [Y] \cdot [X], \\ [Y] \cdot [Y] &= [\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2] = [\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2]. \end{aligned}$$

Por lo anterior, Y es la identidad multiplicativa, y por tanto, la única relación que se tiene es respecto a X . Así, el anillo de Burnside de $\mathbb{Z}/2$ es

$$A(\mathbb{Z}/2) = \frac{\mathbb{Z}[X]}{\langle X^2 - 2X \rangle}.$$

En el ejemplo anterior, determinar la estructura multiplicativa del anillo de Burnside fue relativamente sencillo ya que $G = \mathbb{Z}/2$ solamente tiene dos elementos, pero para grupos con más elementos calcular las relaciones dadas por el producto puede ser un tanto complicado. El siguiente resultado da una descripción elegante de cómo calcular el producto en el anillo de Burnside.

Lema 2.2.6. Sea G un grupo y sean H, K subgrupos de G . Denotamos por $H \backslash G / K$ al conjunto de dobles clases laterales $HgK = \{h g k \mid h \in H, k \in K\}$. Si $[H \backslash G / K] \subseteq G$ es un conjunto de representantes de estas dobles clases laterales, entonces

$$[G/H] \cdot [G/K] = \sum_{g \in [H \backslash G / K]} \left[\frac{G}{H \cap gKg^{-1}} \right].$$

Demostración. Sea $\bar{g} = (H, gK) \in G/H \times G/K$. El subgrupo de isotropía de $\bar{g}$ es

$$\begin{aligned} G_{\bar{g}} &= \{g' \in G \mid g' \cdot \bar{g} = \bar{g}\} \\ &= \{g' \in G \mid g'H = H, g'gK = gK\} \\ &= \{g' \in G \mid g'H = H, g^{-1}g'g \in K\} \\ &= H \cap gKg^{-1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para cada $g, g' \in G$, se tiene que (H, gK) y $(H, g'K)$ están en la misma órbita si y solo si existe $h \in H$ tal que $hgK = g'K$. Es decir, si y solo si g y g' pertenecen a la misma doble clase lateral HgK . Además, para todo $(g_1H, g_2K) \in G/H \times G/K$, se tiene

$$g_1^{-1} \cdot (g_1H, g_2K) = (H, g_1^{-1}g_2K),$$

por lo que todo elemento del producto pertenece a la órbita de algún (H, gK) . En consecuencia, cada órbita contiene un representante de esta forma, y dos de ellos determinan la misma órbita si y solo si pertenecen a la misma doble clase lateral. Esto implica que las órbitas de la acción de G sobre $G/H \times G/K$ están en correspondencia biyectiva con las dobles clases laterales $H \backslash G/K$. Así,

$$G/H \times G/K \cong \coprod_{g \in H \backslash G/K} G\bar{g}. \tag{2.5}$$

donde $\bar{g} = (H, gK)$. La órbita de $\bar{g}$ es un G -conjunto transitivo; por la Proposición 2.1.6, se tiene que $G\bar{g} = G/G_{\bar{g}}$. Por (2.4) y (2.5), se sigue que

$$G/H \times G/K \cong \coprod_{g \in H \backslash G/K} G/G_{\bar{g}} \cong \coprod_{g \in H \backslash G/K} G/H \cap gKg^{-1}. \tag{2.6}$$

Como dos elementos en $A^+(G)$ son iguales si y solo si sus representantes son isomorfos como G -conjuntos, lo anterior implica

$$[G/H] \cdot [G/K] = [G/H \times G/K] = \sum_{g \in H \backslash G/K} [G/H \cap gKg^{-1}],$$

tal como se quería. □

Dado un grupo finito G y un subgrupo $H \leq G$, existen dos operaciones naturales, la restricción y la inducción, que relacionan los anillos de Burnside $A(H)$ y $A(G)$. Estas operaciones permiten interpretar $A(-)$ como un funtor de Green (véase [Die06]). Si X es un G -conjunto, entonces puede considerarse como un H -conjunto mediante la restricción de la acción de G a H . Al H -conjunto resultante se le conoce como la **restricción de G a H** , y se denota como $\text{res}_H^G X$. De manera análoga, si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación G -equivariante, la misma función define una aplicación H -equivariante $\text{res}_H^G f : \text{res}_H^G X \rightarrow \text{res}_H^G Y$; así, se obtiene

un homomorfismo de anillos $\text{res}_H^G : A(G) \rightarrow A(H)$. Por otra parte, si X es un H -conjunto, el **G -conjunto inducido** por X se define como $\text{ind}_H^G X := G \times_H X$. Esto es, el cociente de $G \times X$ por la relación $(gh, x) \sim (g, hx)$, para todo $h \in H$. Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación H -equivariante, la función

$$\begin{aligned} \text{ind}_H^G f : \text{ind}_H^G X &\rightarrow \text{ind}_H^G Y \\ (g, x) &\mapsto (g, f(x)) \end{aligned}$$

está bien definida y es G -equivariante. En consecuencia, se obtiene un homomorfismo de grupos abelianos $\text{ind}_H^G : A(H) \rightarrow A(G)$.

Proposición 2.2.7 ([Die06], Capítulo 6.1). *Sea G un grupo finito y H, K subgrupos de G . Entonces, se cumplen las siguientes propiedades.*

1. *Fórmula de descomposición de Mackey: para todo $X \in A(H)$,*

$$\text{res}_K^G \text{ind}_H^G X = \sum_{x \in K \backslash G/H} \text{ind}_{K \cap xHx^{-1}}^K \circ \text{res}_{K \cap xHx^{-1}}^{xHx^{-1}} \circ c_x(X).$$

2. *Para todo $Y \in A(H)$ y $X \in A(G)$,*

$$\text{ind}_H^G (Y \cdot \text{res}_H^G X) = \text{ind}_H^G Y \cdot X.$$

2.3. Homomorfismo de marcas del anillo de Burnside

En esta sección describiremos algunas propiedades del anillo de Burnside $A(G)$ de un grupo finito mediante el homomorfismo de marcas definido sobre $A(G)$. Si no hay lugar a confusión, denotaremos simplemente por X al elemento $[X]$ en $A(G)$.

Definición 2.3.1 (Conjunto de puntos fijos). Sea X un G -conjunto finito y $H \leq G$. Se define el **conjunto de puntos fijos** de X bajo H como

$$X^H := \{x \in X \mid h \cdot x = x, \text{ para todo } h \in H\}.$$

A cada G -conjunto finito X se le puede asociar el número entero $|X^H|$, dado por la cardinalidad de su conjunto de puntos fijos bajo $H \leq G$. Esto define una aplicación

$$\varphi_H : A^+(G) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad X \mapsto |X^H|,$$

la cual, por linealidad, se extiende a $A(G)$. A este homomorfismo se le denomina la **marca asociada a H** . El siguiente resultado, que no probaremos, muestra que φ_H es un homomorfismo de anillos.

Proposición 2.3.2 ([Bur09], Cap. XII). Sea $H \leq G$. Entonces φ_H satisface las siguientes propiedades.

a) $\varphi_H(\emptyset) = 0$.

b) Si 1 denota la identidad multiplicativa de $A(G)$, entonces $\varphi_H(1) = 1$.

c) Si $X, Y \in A(G)$, entonces

$$\varphi_H(X + Y) = \varphi_H(X) + \varphi_H(Y)$$

$$\varphi_H(X \times Y) = \varphi_H(X) \cdot \varphi_H(Y).$$

d) Dos elementos X y Y en $A(G)$ son isomorfos si y solo si $\varphi_H(X) = \varphi_H(Y)$ para todo $H \leq G$.

Por el Teorema 2.2.4, el anillo de Burnside $A(G)$ visto como $\mathbb{Z}$ -módulo libre está generado por los G -conjuntos transitivos G/H_i , donde H_i son representantes de las clases de G -conjugación de subgrupos de G . Esto motiva el siguiente resultado el cual exhibe la marca de un subgrupo de G en un generador de $A(G)$.

Proposición 2.3.3. Sean $H, K \leq G$. Entonces la marca de H en G/K es

$$\varphi_H(G/K) = \frac{|N_G(H, K)|}{|K|},$$

donde $N_G(H, K) := \{g \in G \mid g^{-1}Hg \leq K\}$ denota el transportador en G de H a K .

Demostración. Primero observemos que si $N_G(H, K) = \emptyset$, entonces $(G/K)^H = \emptyset$, y la igualdad es inmediata. Supongamos ahora que

$$N_G(H, K) \neq \emptyset$$

. La acción de G sobre G/K está dada por $h \cdot gK = hgK$ para $h \in H$ y $gK \in G/K$. Por definición, los puntos fijos de G/K bajo H son

$$(G/K)^H = \{gK \in G/K \mid h \cdot gK = gK \text{ para todo } h \in H\}.$$

Luego $gK \in (G/K)^H$ si y solo si

$$hgK = gK \iff g^{-1}hg \in K \iff gHg^{-1} \leq K,$$

para todo $h \in H$. Por lo tanto, cada elemento de $(G/K)^H$ corresponde a una clase lateral gK con $g \in N_G(H, K)$. Como dos elementos gK y $g'K$ representan el mismo punto de G/K si y solo si $g^{-1}g' \in K$, el número de puntos fijos es $|(G/K)^H| = \frac{|N_G(H, K)|}{|K|}$. Así,

$$\varphi_H(G/K) = |(G/K)^H| = \frac{|N_G(H, K)|}{|K|}$$

tal como se quería. □

Lema 2.3.4. *Sea G un grupo finito y H, K subgrupos de G . Entonces $\varphi_H = \varphi_K$ si y solo si H es G -conjugado a K .*

Demostración. Supongamos primero que $\varphi_H = \varphi_K$. En particular $\varphi_H(G/L) = \varphi_K(G/L)$ para todo $L \leq G$. Tomando $L = H$ y usando la proposición anterior, $\varphi_H(G/H) = \frac{|N_G(H)|}{|H|}$. Como $\varphi_H = \varphi_K$, se sigue que

$$\varphi_K(G/H) = \frac{|N_G(K, H)|}{|H|} = \varphi_H(G/H).$$

Por lo tanto $|N_G(K, H)| > 0$, y existe $g \in G$ tal que $gKg^{-1} \leq H$. Intercambiando el papel de H y K , se obtiene $g'Hg'^{-1} \leq K$ para algún $g' \in G$. De estas inclusiones se deduce que $|H| = |K|$, y por tanto $gKg^{-1} = H$. Luego H y K son conjugados en G .

Recíprocamente, supongamos que $K = gHg^{-1}$ para algún $g \in G$. Sea X un G -conjunto finito. Entonces la aplicación

$$X^H \longrightarrow X^K, \quad x \mapsto gx,$$

está bien definida y es biyectiva, con inversa $x \mapsto g^{-1}x$. En consecuencia $|X^H| = |X^K|$, y por lo tanto $\varphi_H(X) = \varphi_K(X)$ para todo $X \in A^+(G)$. Puesto que $A^+(G)$ genera a $A(G)$ como grupo abeliano, se concluye que $\varphi_H = \varphi_K$ en $A(G)$. $\square$

Sea $\mathcal{S}(G)$ un conjunto de representantes de clases de conjugación de subgrupos de G . Por el lema anterior, subgrupos conjugados definen la misma marca; así, podemos elegir una marca φ_H por cada clase de conjugación de subgrupos de G y definir

$$\begin{aligned} \varphi : A(G) &\rightarrow \prod_{H \in \mathcal{S}(G)} \mathbb{Z} \\ [X] &\mapsto (\varphi_H(X))_{H \in \mathcal{S}(G)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como cada φ_H es un homomorfismo de anillos, la aplicación φ también es un homomorfismo de anillos. Al anillo $\Omega(G) := \prod_{H \in \mathcal{S}(G)} \mathbb{Z}$ se le conoce como el **anillo fantasma** de G . Dado que $\mathcal{S}(G)$ tiene un representante por cada clase de conjugación de subgrupos de G , se sigue que $\Omega(G) \cong \mathbb{Z}^{|Cl(G)|}$.

Un elemento $\xi \in \Omega(G)$ es una familia de números enteros $\xi = (\xi_H)_{H \in \mathcal{S}(G)}$. Si $K \leq G$ es cualquier subgrupo, denotaremos por ξ_K la coordenada correspondiente al representante de la clase de conjugación de K .

Proposición 2.3.5 ([Die06], Proposición 1.2.2). *El homomorfismo de anillos $\varphi : A(G) \rightarrow \Omega(G)$ es inyectivo y tiene conúcleo finito.*

Del resultado anterior se sigue que $A(G)$ es un subanillo de $\Omega(G)$. Definimos el **grupo de obstrucción** de G como el conúcleo de φ , esto es,

$$\text{Obs}(G) := \prod_{H \in \mathcal{S}(G)} \mathbb{Z}/|W_G H|\mathbb{Z},$$

donde $W_G H = N_G(H)/H$ es el grupo de Weyl de H en G . Si $\xi \in \Omega(G)$, para cada $H \in \mathcal{S}(G)$, se tiene una aplicación dada por

$$\psi_H(\xi) = \sum_{[g] \in W_G H} \xi_{[gHg^{-1}]} \bmod |W_G H|.$$

Proposición 2.3.6 ([Die06], Proposición 1.2.3). *La aplicación $\psi : \Omega(G) \rightarrow \text{Obs}(G)$ definida como $\psi(\xi) = (\psi_H(\xi))_{H \in \mathcal{S}(G)}$ es un homomorfismo de grupos. Además, la sucesión*

$$0 \rightarrow A(G) \xrightarrow{\varphi} \Omega(G) \xrightarrow{\psi} \text{Obs}(G) \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de grupos abelianos.

Corolario 2.3.7. *Si G es un grupo finito, entonces $\Psi : \Omega(G)/\varphi(A(G)) \rightarrow \text{Obs}(G)$ es un isomorfismo de grupos abelianos.*

Al considerar la racionalización $A_{\mathbb{Q}}(G) := A(G) \otimes \mathbb{Q}$ del anillo de Burnside, los resultados anteriores se generalizan. Si extendemos por linealidad el homomorfismo fantasma, se tiene que

$$\varphi_{\mathbb{Q}} : A_{\mathbb{Q}}(G) \rightarrow \Omega_{\mathbb{Q}}(G) = \prod_{[H] \in \text{Cl}(G)} \mathbb{Q}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{Q}$ -álgebras. En particular, $A_{\mathbb{Q}}(G) \cong \Omega_{\mathbb{Q}}(G) \cong \mathbb{Q}^{|\text{Cl}(G)|}$.

2.4. S -conjuntos $\mathcal{F}$ -estables

En este apartado introduciremos los elementos $\mathcal{F}$ -estables del anillo de Burnside de un p -grupo S . Salvo que se indique lo contrario, todo sistema de fusión se supondrá saturado.

Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Si $P \leq S$ y $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$, entonces todo S -conjunto X puede considerarse como un P -conjunto mediante la acción $g \cdot x = f(g) \cdot x$, con $g \in P$ y $x \in X$. Denotaremos por ${}_{P,f}X$ a este P -conjunto. En particular, si $\iota : P \hookrightarrow S$ es la inclusión, entonces ${}_{P,\iota}X$ es el P -conjunto obtenido al restringir la acción de S a P .

Definición 2.4.1 (Conjunto $\mathcal{F}$ -estable). Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Un S -conjunto X se dice **$\mathcal{F}$ -estable** si para todo subgrupo $P \leq S$ y todo morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$, los P -conjuntos ${}_{P,f}X$ y ${}_{P,\iota}X$ son isomorfos.

El siguiente resultado caracteriza los conjuntos $\mathcal{F}$ -estables en términos del homomorfismo de marcas.

Proposición 2.4.2 ([Ree15], Lema 4.1). *Sea X un S -conjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- i) X es $\mathcal{F}$ -estable.
- ii) $\varphi_P(X) = \varphi_{f(P)}(X)$, para todo $P \leq S$ y todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$.
- iii) $\varphi_P(X) = \varphi_Q(X)$, para todo par de subgrupos $P, Q \leq S$ que sean $\mathcal{F}$ -conjugados.

Como consecuencia del inciso iii), las clases de isomorfismo de S -conjuntos $\mathcal{F}$ -estables son cerradas bajo suma disjunta y producto cartesiano. Por lo tanto, forman un subsemianillo de $A^+(S)$, el cual denotaremos por $A^+(\mathcal{F})$.

Definición 2.4.3 (Anillo de Burnside de un sistema de fusión). Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . El anillo de Burnside de $\mathcal{F}$, denotado por $A(\mathcal{F})$, es el subanillo de $A(S)$ formado por los elementos $\mathcal{F}$ -estables. Es decir,

$$A(\mathcal{F}) = \{x \in A(S) \mid \varphi_P(x) = \varphi_Q(x) \text{ si } P \text{ y } Q \text{ son } \mathcal{F}\text{-conjugados}\}.$$

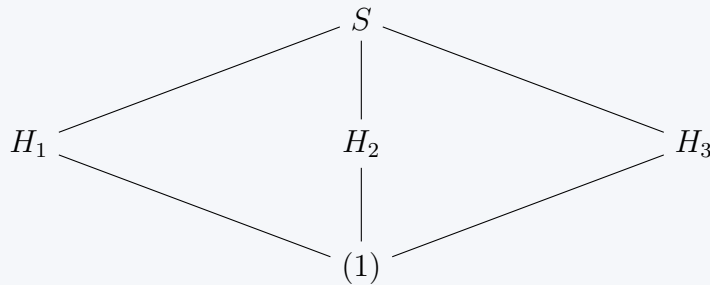
Dado que $\mathcal{F}$ es un sistema de fusión saturado, la Proposición 4.4 de [Ree15] muestra que esta definición coincide con la construcción de Grothendieck de $A^+(\mathcal{F})$.

A continuación presentamos un ejemplo en el que se calcula explícitamente el anillo de Burnside de un sistema de fusión.

Ejemplo 2.4.4. Sea $G = A_4$ el grupo alternante en 4 elementos y sea

$$S = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

su 2-subgrupo de Sylow. Consideremos el sistema de fusión $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(A_4)$ de A_4 relativo a S . Los objetos de $\mathcal{F}$ son los subgrupos de S . Denotemos por $H_1 = \{(1), (12)(34)\}$, $H_2 = \{(1), (13)(24)\}$ y $H_3 = \{(1), (14)(23)\}$ a los subgrupos de orden dos de S . Entonces la retícula de subgrupos de S está dada por



Como S es abeliano, cada subgrupo de S representa una clase de conjugación de subgrupos de S . Por lo tanto, el anillo de Burnside de S , como grupo abeliano libre, está

dado por

$$A(S) = \mathbb{Z}[S/1] \oplus \bigoplus_{i=1}^3 \mathbb{Z}[S/H_i] \oplus \mathbb{Z}[S/S].$$

Así, todo elemento de $A(S)$ se puede escribir de la forma

$$U = a[S/1] + b_1[S/H_1] + b_2[S/H_2] + b_3[S/H_3] + c[S/S].$$

Los subgrupos H_1 , H_2 y H_3 son $\mathcal{F}$ -conjugados, pues son conjugados entre sí por elementos de A_4 . Por el inciso iii) de la Proposición 2.4.2, el elemento U es $\mathcal{F}$ -estable si y solo si

$$\varphi_{H_1}(U) = \varphi_{H_2}(U) = \varphi_{H_3}(U).$$

Usando el homomorfismo de marcas, y por la Proposición 2.3.3, se obtiene

$$\varphi_{H_1}(U) = 0 \cdot a + 2 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 1 \cdot c = 2b_1 + c$$

$$\varphi_{H_2}(U) = 0 \cdot a + 0 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 1 \cdot c = 2b_2 + c$$

$$\varphi_{H_3}(U) = 0 \cdot a + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 2 \cdot b_3 + 1 \cdot c = 2b_3 + c.$$

Por lo tanto, la condición de $\mathcal{F}$ -estabilidad implica que $2b_1 + c = 2b_2 + c = 2b_3 + c$, y en consecuencia $b_1 = b_2 = b_3$. Luego todo elemento $\mathcal{F}$ -estable de $A(S)$ es de la forma

$$U = a[S/1] + b([S/H_1] + [S/H_2] + [S/H_3]) + c[S/S].$$

De este modo

$$A(\mathcal{F}) = \mathbb{Z}[S/S] \oplus \mathbb{Z}[S/1] \oplus \mathbb{Z}([S/H_1] + [S/H_2] + [S/H_3]).$$

Denotemos por $1 := [S/S]$, $X := [S/1]$, $Y := [S/H_1 \amalg S/H_2 \amalg S/H_3]$. Entonces

$$A(\mathcal{F}) = \mathbb{Z}1 \oplus \mathbb{Z}X \oplus \mathbb{Z}Y.$$

Resta determinar la estructura multiplicativa de $A(\mathcal{F})$. Primero, es inmediato ver que 1 es el neutro multiplicativo. Además, como $S/1$ es un S -conjunto libre, para todo S -conjunto finito Z se tiene $S/1 \times Z \cong |Z|(S/1)$. En particular,

$$X^2 = [S/1 \times S/1] = 4[S/1] = 4X \tag{2.8}$$

y, como Y tiene 6 elementos,

$$XY = [S/1]([S/H_1] + [S/H_2] + [S/H_3]) = 6[S/1] = 6X. \tag{2.9}$$

Ahora calculemos Y^2 . Por la fórmula de dobles clases laterales,

$$S/H_i \times S/H_j \cong \coprod_{r \in [H_i \backslash S/H_j]} S/(H_i \cap {}^r H_j).$$

Como S es abeliano, se tiene ${}^r H_j = H_j$ para todo $r \in S$. Además, las dobles clases $H_i \backslash S/H_j$ están en biyección con las clases laterales de $H_i H_j$ en S . Por lo tanto, $\#(H_i \backslash S/H_j) = [S : H_i H_j]$. Así,

$$S/H_i \times S/H_j \cong [S : H_i H_j] S/(H_i \cap H_j).$$

Si $i = j$, entonces $H_i H_j = H_i$ y $H_i \cap H_j = H_i$, de modo que $S/H_i \times S/H_i \cong 2S/H_i$. Por otra parte, si $i \neq j$, entonces $H_i H_j = S$ y $H_i \cap H_j = \{1\}$, por lo que $S/H_i \times S/H_j \cong S/1$. Luego

$$\begin{aligned} Y^2 &= ([S/H_1] + [S/H_2] + [S/H_3])^2 \\ &= 2([S/H_1] + [S/H_2] + [S/H_3]) + 6[S/1] \\ &= 2Y + 6X. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Finalmente, por (2.8), (2.9) y (2.10), el anillo de Burnside de $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(A_4)$ está dado por

$$A(\mathcal{F}) = \frac{\mathbb{Z}[X, Y]}{\langle X^2 - 4X, XY - 6X, Y^2 - 6X - 2Y \rangle}.$$

El Teorema A de [Ree15] establece que el monoide $A^+(\mathcal{F})$ de clases de isomorfismo de S -conjuntos $\mathcal{F}$ -estables es libre, y que su rango es igual al número de clases de $\mathcal{F}$ -conjugación de subgrupos de S . Para probar este resultado, Reeh construye, para cada clase $[P] \in \text{Cl}(\mathcal{F})$, un elemento $\mathcal{F}$ -estable $\alpha_{[P]} \in A^+(\mathcal{F})$. Estos elementos son irreducibles en $A^+(\mathcal{F})$; es decir, ninguno de ellos puede escribirse como suma de dos elementos no triviales de $A^+(\mathcal{F})$. Más aún, Reeh demuestra que el conjunto $\mathcal{B} = \{\alpha_{[P]} \mid [P] \in \text{Cl}(\mathcal{F})\}$ genera libremente el monoide $A^+(\mathcal{F})$. En consecuencia, al pasar a la construcción de Grothendieck, el mismo conjunto determina una base del grupo abeliano libre $A(\mathcal{F})$. En otras palabras, todo elemento de $A(\mathcal{F})$ puede expresarse de manera única como una combinación lineal entera de los elementos $\alpha_{[P]}$.

El siguiente resultado exhibe algunas propiedades importantes de los elementos $\alpha_{[P]}$, las cuales serán de utilidad en el estudio de los ideales primos del anillo $A(\mathcal{F})$.

Proposición 2.4.5 ([Lem22], Proposición 1.9). *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Para cada $[P] \in \text{Cl}(\mathcal{F})$, existe un elemento $\mathcal{F}$ -estable $\alpha_{[P]} \in A^+(\mathcal{F})$ que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\alpha_{[P]}$ es una combinación lineal de elementos de la forma $[S/P']$, donde $P' \leq S$ es $\mathcal{F}$ -subconjugado a P , es decir, $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(P', P) \neq \emptyset$.
2. Existe un subgrupo $P_0 \in [P]$ tal que $\alpha_{[P]}$ tiene exactamente una componente transitiva de la forma $[S/P_0]$, mientras que $[S/P_0]$ no aparece como componente transitiva de $\alpha_{[Q]}$ cuando $[Q] \neq [P]$.
3. Para el subgrupo P_0 del inciso anterior, se tiene

$$\varphi_{P_0}(\alpha_{[P]}) = \frac{|N_S(P_0)|}{|P_0|}.$$

4. $\varphi_Q(\alpha_{[P]}) \neq 0$ si y solo si Q es $\mathcal{F}$ -subconjugado a P .

2.5. Ideales primos del anillo de Burnside

El objetivo de esta sección es describir y clasificar los ideales primos del anillo de Burnside de elementos $\mathcal{F}$ -estables, $A(\mathcal{F})$. Para ello, daremos una descripción explícita del espectro primo de $A(\mathcal{F})$ y estudiaremos las relaciones entre sus ideales primos. Como consecuencia, mostraremos que $\text{Spec}(A(\mathcal{F}))$ es conexo. Más adelante veremos que estas propiedades permiten obtener una demostración alternativa del Teorema de completación de Segal–Carlsson para $A(\mathcal{F})$.

Omitiremos la descripción de los ideales primos del anillo de Burnside de un grupo finito; sugerimos al lector interesado consultar [Dre69]. El contenido expuesto en este apartado está motivado por las ideas desarrolladas por N. Lemoine en [Lem22].

Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Si $P \leq S$, el homomorfismo de marcas asociado a P es la aplicación $\varphi_P: A(S) \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $\varphi_P(X) = |X^P|$ en $A^+(S)$. Como $A(\mathcal{F})$ es un subanillo de $A(S)$, podemos restringir φ_P a $A(\mathcal{F})$. Denotaremos esta restricción por $\tilde{\varphi}_P$. Observemos que $\tilde{\varphi}_P$ está dada por la composición $\varphi_P \circ \iota$, donde $\iota: A(\mathcal{F}) \hookrightarrow A(S)$ es la inclusión. En particular, $\tilde{\varphi}_P$ es un homomorfismo de anillos.

Definimos $I_P := \tilde{\varphi}_P^{-1}(0)$ y también definimos $I_{P,q} := \tilde{\varphi}_P^{-1}(q\mathbb{Z})$ para cada número primo q . Notemos que no se exige que q sea distinto de p ; esta distinción será relevante en la clasificación de los ideales primos de $A(\mathcal{F})$. Por otro lado, consideremos q un número primo y sea $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ la proyección canónica. Como π y $\tilde{\varphi}_P$ son homomorfismos de anillos, la composición $\Phi := \pi \circ \tilde{\varphi}_P: A(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ también es un homomorfismo de anillos. Además,

$$\text{Ker}(\Phi) = \{X \in A(\mathcal{F}) \mid \tilde{\varphi}_P(X) \equiv 0 \pmod{q}\} = I_{P,q}$$

es un ideal de $A(\mathcal{F})$. Más aún, $I_{P,q}$ es un ideal primo. En efecto, como $[S/S] \in A(\mathcal{F})$ y $\tilde{\varphi}_P([S/S]) = 1$, el homomorfismo $\tilde{\varphi}_P: A(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{Z}$ es sobreyectivo. En consecuencia, para

todo número primo q , el homomorfismo $\Phi : A(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ también es sobreyectivo. Por el primer teorema de isomorfía,

$$A(\mathcal{F})/I_{P,q} \cong \text{Im}(\Phi) = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}.$$

Como $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ es un campo, $I_{P,q}$ es un ideal maximal y, en particular, un ideal primo. De manera análoga, se demuestra que $I_P = \text{Ker}(\tilde{\varphi}_P)$ es un ideal primo de $A(\mathcal{F})$.

Proposición 2.5.1. *Sea I un ideal primo de $A(\mathcal{F})$ tal que $I_P \subseteq I$, para algún $P \leq S$. Entonces $I = I_{P,q}$, donde q es la característica de $A(\mathcal{F})/I$. Si $q = 0$, entonces $I = I_P$.*

Demostración. Como $I_P = \text{Ker}(\tilde{\varphi}_P)$ y $\tilde{\varphi}_P : A(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{Z}$ es sobreyectivo, por el primer teorema de isomorfía se tiene $A(\mathcal{F})/I_P \cong \mathbb{Z}$. Dado que $I_P \subseteq I$, el ideal I determina un ideal I/I_P de $A(\mathcal{F})/I_P$. Bajo el isomorfismo anterior, este ideal corresponde a un ideal primo de $\mathbb{Z}$, ya que

$$(A(\mathcal{F})/I_P)/(I/I_P) \cong A(\mathcal{F})/I$$

es un dominio entero. Por lo tanto, el ideal correspondiente en $\mathbb{Z}$ es de la forma $q\mathbb{Z}$, donde $q = 0$ ó q es un número primo. Además, q coincide con la característica de $A(\mathcal{F})/I$. En consecuencia, $I = \tilde{\varphi}_P^{-1}(q\mathbb{Z})$. Si q es primo, entonces $I = \tilde{\varphi}_P^{-1}(q\mathbb{Z}) = I_{P,q}$. Por otra parte, si $q = 0$, entonces $I = \tilde{\varphi}_P^{-1}(\langle 0 \rangle) = I_P$. $\square$

Lema 2.5.2. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S , y sea q un número primo distinto de p . Para cada par de subgrupos $P, Q \leq S$, se tiene que P es $\mathcal{F}$ -conjugado a Q si y solo si $I_{P,q} = I_{Q,q}$.*

Demostración. Supongamos primero que P es $\mathcal{F}$ -conjugado a Q . Si $X \in A(\mathcal{F})$, entonces por la Proposición 2.4.2, se tiene $\tilde{\varphi}_P(X) = \tilde{\varphi}_Q(X)$. Por lo tanto,

$$X \in I_{P,q} \iff \tilde{\varphi}_P(X) \equiv 0 \pmod{q} \iff \tilde{\varphi}_Q(X) \equiv 0 \pmod{q} \iff X \in I_{Q,q}.$$

Luego $I_{P,q} = I_{Q,q}$.

Por otra parte, supongamos que $I_{P,q} = I_{Q,q}$, con $q \neq p$. Consideremos los elementos $\alpha_{[P]}$ y $\alpha_{[Q]}$ dados por la Proposición 2.4.5. Reemplazando, si es necesario, a P y Q por subgrupos $\mathcal{F}$ -conjugados, podemos suponer que

$$\tilde{\varphi}_P(\alpha_{[P]}) = \frac{|N_S(P)|}{|P|} \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}_Q(\alpha_{[Q]}) = \frac{|N_S(Q)|}{|Q|}.$$

Como S es un p -grupo, los cocientes anteriores son potencias de p . Puesto que $q \neq p$, se sigue que $\tilde{\varphi}_P(\alpha_{[P]}) \not\equiv 0 \pmod{q}$ y $\tilde{\varphi}_Q(\alpha_{[Q]}) \not\equiv 0 \pmod{q}$. Por lo tanto, $\alpha_{[P]} \notin I_{P,q}$ y $\alpha_{[Q]} \notin I_{Q,q}$. Como $I_{P,q} = I_{Q,q}$, obtenemos que $\alpha_{[P]} \notin I_{Q,q}$ y $\alpha_{[Q]} \notin I_{P,q}$. Equivalentemente, $\tilde{\varphi}_Q(\alpha_{[P]}) \not\equiv 0 \pmod{q}$ y $\tilde{\varphi}_P(\alpha_{[Q]}) \not\equiv 0 \pmod{q}$. En particular, $\tilde{\varphi}_Q(\alpha_{[P]}) \neq 0$ y $\tilde{\varphi}_P(\alpha_{[Q]}) \neq 0$. Por el inciso iv)

de la Proposición 2.4.5, se concluye que Q es $\mathcal{F}$ -subconjugado a P y viceversa. Es decir, $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ y $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, P)$ son ambos no vacíos. Dado que los morfismos en un sistema de fusión son monomorfismos de grupos y los grupos son finitos, se tiene $|P| = |Q|$. Por lo tanto, cualquiera de estos morfismos es un isomorfismo. En consecuencia, P y Q son $\mathcal{F}$ -conjugados. $\square$

Dado un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p -grupo S , el **anillo fantasma asociado a $\mathcal{F}$** se define como

$$\Omega(\mathcal{F}) = \prod_{[P] \in \text{Cl}(\mathcal{F})} \mathbb{Z},$$

donde las coordenadas están indexadas por las clases de $\mathcal{F}$ -conjugación de subgrupos de S . La aplicación $\text{Cl}(S) \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{F})$ que envía una clase de S -conjugación a su clase de $\mathcal{F}$ -conjugación induce un homomorfismo $\Omega(\mathcal{F}) \rightarrow \Omega(S)$ que envía una tupla indexada por clases de $\mathcal{F}$ -conjugación a la tupla correspondiente en $\Omega(S)$, repitiendo el mismo valor en todas las clases de S -conjugación contenidas en una misma clase de $\mathcal{F}$ -conjugación. De esta manera, podemos identificar $\Omega(\mathcal{F})$ con el subanillo de $\Omega(S)$ formado por las tuplas que son constantes en cada clase de $\mathcal{F}$ -conjugación.

Como $A(\mathcal{F})$ es el subanillo de elementos $\mathcal{F}$ -estables de $A(S)$, el homomorfismo de marcas de $A(S)$ se restringe a un homomorfismo inyectivo $\tilde{\varphi} : A(\mathcal{F}) \rightarrow \Omega(\mathcal{F})$ dado por $\tilde{\varphi}(X) = (\tilde{\varphi}_P(X))_{[P] \in \text{Cl}(\mathcal{F})}$. Este homomorfismo está bien definido porque si X es $\mathcal{F}$ -estable, entonces $\tilde{\varphi}_P(X) = \tilde{\varphi}_Q(X)$ siempre que P y Q sean $\mathcal{F}$ -conjugados. Además, por el Teorema B de [Ree15], se tiene una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow A(\mathcal{F}) \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \Omega(\mathcal{F}) \rightarrow \text{Obs}(\mathcal{F}) \rightarrow 0,$$

donde $\text{Obs}(\mathcal{F})$ es el grupo de obstrucción de $\mathcal{F}$. En particular, $\tilde{\varphi}(A(\mathcal{F}))$ tiene índice finito en $\Omega(\mathcal{F})$. De esto se sigue que $\Omega(\mathcal{F})$ es un $\tilde{\varphi}(A(\mathcal{F}))$ -módulo finitamente generado. Un hecho estándar de álgebra conmutativa establece que si B es un A -módulo finitamente generado, entonces B es integral sobre A . Por lo cual, $\Omega(\mathcal{F})$ es integral sobre $\tilde{\varphi}(A(\mathcal{F}))$. Luego, por el Teorema 5.10 de [AM18], todo ideal primo de $\tilde{\varphi}(A(\mathcal{F}))$ es la contracción de un ideal primo de $\Omega(\mathcal{F})$. En virtud de que $\tilde{\varphi}$ es inyectivo, podemos identificar $A(\mathcal{F})$ con su imagen en $\Omega(\mathcal{F})$. Así, todo ideal primo de $A(\mathcal{F})$ se obtiene como la preimagen, bajo $\tilde{\varphi}$, de un ideal primo de $\Omega(\mathcal{F})$. Dado que $\Omega(\mathcal{F})$ es un producto finito de copias de $\mathbb{Z}$, sus ideales primos son de la forma

$$\mathbb{Z} \times \cdots \times q\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z},$$

donde q es un número primo ó $q = 0$. Por lo tanto, todo ideal primo de $A(\mathcal{F})$ es de la forma $I_{P,q} = \tilde{\varphi}_P^{-1}(q\mathbb{Z})$, para algún subgrupo $P \leq S$ y algún número primo q , o bien $q = 0$.

Proposición 2.5.3. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Entonces todo ideal primo de $A(\mathcal{F})$ es de la forma $I_{P,q}$, para algún subgrupo $P \leq S$ y algún número primo q , o bien $q = 0$.*

A partir de esta descripción, conviene distinguir tres casos según el valor de q . Esto es, los ideales primos de $A(\mathcal{F})$ son de la forma I_P , $I_{P,p}$, $I_{P,q}$, con $q \neq p$ y P algún subgrupo de S . Los siguientes resultados describen las propiedades particulares de estos ideales y permiten comparar cuándo dos de ellos son iguales o cuándo uno contiene a otro.

Teorema 2.5.4. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S y sea $P \leq S$. Si Q es un subgrupo normal de P tal que $|P/Q| = p$, entonces $I_{P,p} = I_{Q,p}$.*

Demostración. Sea X un S -conjunto finito, y sea $X^Q = \{x \in X \mid q \cdot x = x \text{ para todo } q \in Q\}$ el conjunto de puntos fijos de X bajo Q . Dado que Q es normal en P , el subconjunto X^Q es invariante bajo la acción de P . En efecto, si $x \in X^Q$, $\tilde{p} \in P$ y $q \in Q$, entonces

$$q \cdot (\tilde{p} \cdot x) = \tilde{p} \cdot (\tilde{p}^{-1}q\tilde{p}) \cdot x = \tilde{p} \cdot x,$$

ya que $\tilde{p}^{-1}q\tilde{p} \in Q$. Por lo tanto, $\tilde{p} \cdot x \in X^Q$. Además, Q actúa trivialmente sobre X^Q , de modo que la acción de P sobre X^Q induce una acción de P/Q sobre X^Q . Como $|P/Q| = p$, las órbitas de esta acción tienen tamaño 1 ó p . En consecuencia,

$$|X^Q| \equiv |(X^Q)^{P/Q}| = |X^P| \pmod{p}.$$

y $\varphi_Q(X) \equiv \varphi_P(X) \pmod{p}$. Por linealidad, la misma congruencia se cumple para todo elemento de $A(\mathcal{F})$. Esto es, si $z \in A(\mathcal{F})$ entonces

$$z \in I_{P,p} \iff \tilde{\varphi}_P(z) \equiv 0 \pmod{p} \iff \tilde{\varphi}_Q(z) \equiv 0 \pmod{p} \iff z \in I_{Q,p}.$$

De este modo, concluimos que $I_{P,p} = I_{Q,p}$. □

Corolario 2.5.5. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Si $P \leq S$, entonces $I_{P,p} = I_{1,p}$.*

Demostración. Como P es un p -grupo finito, existe una serie normal

$$1 = P_0 \trianglelefteq P_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq P_n = P$$

tal que $|P_i/P_{i-1}| = p$ para todo $i = 1, \dots, n$. Aplicando el Teorema 2.5.4 a cada par $P_{i-1} \trianglelefteq P_i$, obtenemos $I_{P_i,p} = I_{P_{i-1},p}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Por lo tanto,

$$I_{P,p} = I_{P_n,p} = I_{P_{n-1},p} = \cdots = I_{P_0,p} = I_{1,p},$$

tal como se quería. □

Proposición 2.5.6. Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S , y $P, Q \leq S$. Si q, q' son números primos o cero, entonces $I_{P,q} \subseteq I_{Q,q'}$ si y solo si ocurre uno de los siguientes casos:

- i) $q = q' \neq p$ y $P \sim_{\mathcal{F}} Q$
- ii) $q = 0, q' \notin \{0, p\}$ y $P \sim_{\mathcal{F}} Q$
- iii) $q = 0$ y $q' = p$
- iv) $q = q' = p$.

Demostración. Primero probamos que cualquiera de las condiciones anteriores implica la contención. Si $q = q' \neq p$ y $P \sim_{\mathcal{F}} Q$, entonces las marcas $\tilde{\varphi}_P$ y $\tilde{\varphi}_Q$ coinciden en $A(\mathcal{F})$. Por lo tanto, $I_{P,q} = I_{Q,q}$, lo cual demuestra el primer caso.

Ahora, si $q = 0, q' \notin \{0, p\}$ y $P \sim_{\mathcal{F}} Q$, entonces, para todo $X \in I_P$, se tiene $\tilde{\varphi}_P(X) = 0$. Como $P \sim_{\mathcal{F}} Q$, se tiene $\tilde{\varphi}_Q(X) = 0$. En particular, $\tilde{\varphi}_Q(X) \equiv 0 \pmod{q'}$. Luego $X \in I_{Q,q'}$, y $I_P \subseteq I_{Q,q'}$.

Si $q = 0$ y $q' = p$, entonces $I_P \subseteq I_{P,p}$. Por el Corolario 2.5.5, se tiene $I_{P,p} = I_{1,p} = I_{Q,p}$. Por lo tanto, $I_P \subseteq I_{Q,p}$.

Finalmente, si $q = q' = p$, nuevamente por el Corolario 2.5.5, $I_{P,p} = I_{1,p} = I_{Q,p}$. En particular, $I_{P,p} \subseteq I_{Q,p}$.

Por otra parte, supongamos que $I_{P,q} \subseteq I_{Q,q'}$. Entonces, se tiene un homomorfismo sobreyectivo de anillos $A(\mathcal{F})/I_{P,q} \rightarrow A(\mathcal{F})/I_{Q,q'}$. Como $A(\mathcal{F})/I_{P,q} \cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ y $A(\mathcal{F})/I_{Q,q'} \cong \mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}$, la existencia de tal homomorfismo sobreyectivo implica que $q = 0$ ó $q = q'$. Si $q = q' = p$, estamos en el cuarto caso. Si $q = 0$ y $q' = p$, estamos en el tercer caso. Supongamos entonces que $q' \neq p$. Probaremos que $P \sim_{\mathcal{F}} Q$.

Consideremos los elementos $\alpha_{[P]}$ y $\alpha_{[Q]}$ de la Proposición 2.4.5. Reemplazando, si es necesario, a P y Q por subgrupos $\mathcal{F}$ -conjugados, podemos suponer que

$$\tilde{\varphi}_P(\alpha_{[P]}) = \frac{|N_S(P)|}{|P|} \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}_Q(\alpha_{[Q]}) = \frac{|N_S(Q)|}{|Q|}.$$

Como S es un p -grupo, ambos cocientes son potencias de p . Dado que $q' \neq p$, se sigue que estos valores no se anulan en $\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}$. En el caso $q' = 0$, esto significa simplemente que son enteros no nulos.

Sea $Y := \tilde{\varphi}_P(\alpha_{[P]})\alpha_{[Q]} - \tilde{\varphi}_P(\alpha_{[Q]})\alpha_{[P]} \in A(\mathcal{F})$. Entonces

$$\tilde{\varphi}_P(Y) = \tilde{\varphi}_P(\alpha_{[P]})\tilde{\varphi}_P(\alpha_{[Q]}) - \tilde{\varphi}_P(\alpha_{[Q]})\tilde{\varphi}_P(\alpha_{[P]}) = 0.$$

Por lo tanto, $Y \in I_P$. Si $q = 0$, entonces $Y \in I_{P,q}$. Si $q = q' \neq p$, entonces también $Y \in I_{P,q}$, pues $I_P \subseteq I_{P,q}$. En cualquier caso, como $I_{P,q} \subseteq I_{Q,q'}$, se tiene $Y \in I_{Q,q'}$. Por otro lado,

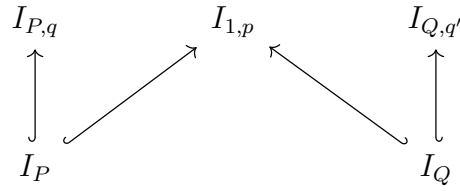
$$\tilde{\varphi}_Q(Y) = \tilde{\varphi}_P(\alpha_{[P]})\tilde{\varphi}_Q(\alpha_{[Q]}) - \tilde{\varphi}_P(\alpha_{[Q]})\tilde{\varphi}_Q(\alpha_{[P]}).$$

El primer producto $\tilde{\varphi}_P(\alpha_{[P]})\tilde{\varphi}_Q(\alpha_{[Q]})$ no se anula en $\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}$, ya que ambos factores son potencias de p y $q' \neq p$. Como $\tilde{\varphi}_Q(Y) \equiv 0 \pmod{q'}$, se sigue que $\tilde{\varphi}_P(\alpha_{[Q]})\tilde{\varphi}_Q(\alpha_{[P]})$ tampoco se anula en $\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}$. En particular, $\tilde{\varphi}_P(\alpha_{[Q]}) \neq 0$ y $\tilde{\varphi}_Q(\alpha_{[P]}) \neq 0$. Por el inciso iv) de la Proposición 2.4.5, esto implica que P y Q son mutuamente $\mathcal{F}$ -subconjugados; por lo cual, $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q) \neq \emptyset$ y $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, P) \neq \emptyset$. Por consiguiente, P y Q son $\mathcal{F}$ -conjugados. $\square$

Proposición 2.5.7. *Los ideales primos de $A(\mathcal{F})$ son de la forma $I_{P,q}$, con $P \leq S$ y q un número primo o cero. Además, se cumple lo siguiente:*

1. Si $q, q' \neq p$, entonces $I_{P,q} = I_{Q,q'}$ si y solo si $q = q'$ y $P \sim_{\mathcal{F}} Q$.
2. Todos los ideales $I_{P,q}$ con $q \neq 0$ son maximales.
3. Los ideales I_P son minimales.

De los resultados anteriores, se obtiene el siguiente diagrama de inclusiones



donde $q, q' \neq 0, p$. El diagrama anterior muestra que todo ideal primo de $A(\mathcal{F})$ está relacionado, mediante una cadena de inclusiones, con el ideal primo $I_{1,p}$. En consecuencia, $\text{Spec}(A(\mathcal{F}))$ tiene una única componente conexa.

Corolario 2.5.8. *El espectro primo de $A(\mathcal{F})$ es conexo en la topología de Zariski.*

Esta propiedad contrasta con el caso del anillo de Burnside de un grupo finito arbitrario. En general, si G es un grupo finito, el espacio $\text{Spec}(A(G))$ no necesariamente es conexo; de hecho, sus componentes conexas están en correspondencia biyectiva con las clases de conjugación de subgrupos perfectos de G (véase la Proposición 2 de [Dre69]). En cambio, para un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p -grupo S , el espectro $\text{Spec}(A(\mathcal{F}))$ es conexo.

Por resultados de álgebra conmutativa, se tiene que el espectro primo de un anillo conmutativo y noetheriano es conexo si y solo si no tiene idempotentes primitivos no triviales. Como consecuencia del corolario anterior, el anillo $A(\mathcal{F})$ no tiene idempotentes primitivos no triviales. Para precisar en esto, introducimos los siguientes conceptos.

Definición 2.5.9. Sea A un anillo conmutativo unitario.

- Un elemento $a \in A$ se dice **idempotente** si $a^2 = a$.

- Dos idempotentes $e, f \in A$ se dicen **ortogonales** si $ef = 0$. Más generalmente, un conjunto E de idempotentes de A se dice **ortogonal** si cualesquiera dos elementos distintos de E son ortogonales.
- Un idempotente no nulo $e \in A$ se dice **primitivo** si, para cualesquiera dos idempotentes ortogonales $e_1, e_2 \in A$, la igualdad $e = e_1 + e_2$ implica que $e_1 = 0$ ó $e_2 = 0$.

Ahora recordemos lo siguiente. Dado un ideal I de $A(\mathcal{F})$, se tiene

$$V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A(\mathcal{F})) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Además, para $f \in A(\mathcal{F})$, el abierto distinguido asociado a f está dado por $D(f) = \text{Spec}(A(\mathcal{F})) \setminus V(\langle f \rangle)$.

Sea $e \in A(\mathcal{F})$ un idempotente. Como $e(1-e) = 0$, para todo ideal primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A(\mathcal{F}))$ se tiene que $e \in \mathfrak{p}$ ó $(1-e) \in \mathfrak{p}$. Además, no pueden ocurrir ambas condiciones al mismo tiempo, pues entonces $1 = e + (1-e) \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\text{Spec}(A(\mathcal{F})) = D(e) \amalg D(1-e)$. Más aún, $D(e) = V(\langle 1-e \rangle)$ y $D(1-e) = V(\langle e \rangle)$, de modo que $D(e)$ y $D(1-e)$ son abiertos y cerrados. Si e fuera un idempotente distinto de 0 y de 1, se verifica fácilmente que tanto $D(e)$ como $D(1-e)$ serían no vacíos. Así, un idempotente no trivial e daría una descomposición de $\text{Spec}(A(\mathcal{F}))$ como unión disjunta de dos abiertos y cerrados no vacíos, lo cual contradice la conexidad de $\text{Spec}(A(\mathcal{F}))$. Por lo tanto, los únicos idempotentes de $A(\mathcal{F})$ son 0 y 1.

2.6. Teorema de completación de Segal–Carlsson en grupos p -locales finitos

Años después de la publicación de [Ati61], donde M. Atiyah formula y demuestra el teorema de completación para el anillo de representaciones de un grupo finito G (tema que será tratado con detalle en el Capítulo 3), G. Segal conjeturó que el morfismo natural

$$A(G)_{I_G}^\wedge \longrightarrow \pi_{\mathbb{S}}^0(BG)$$

es un isomorfismo de anillos. Aquí $A(G)_{I_G}^\wedge$ denota la completación del anillo de Burnside de G respecto a su ideal de aumentación, y $\pi_{\mathbb{S}}^0(BG)$ denota la cohomotopía estable del espacio clasificante de G .

Después de casi dos décadas de desarrollo teórico, la conjetura de Segal fue demostrada por G. Carlsson en [Car84]. En esta sección presentamos los aspectos necesarios para formular y demostrar una versión del Teorema de Segal–Carlsson para el caso de grupos p -locales finitos. La prueba que presentamos es distinta a la presentada por A. Díaz y A. Libman en [DL09]; para ello, seguiremos el esquema general desarrollado en [BC20].

Cohomotopía estable

Sean X y Y dos CW-complejos punteados de dimensión finita. Denotaremos por $[X, Y]_*$ al conjunto de clases de homotopía punteadas de aplicaciones punteadas de X en Y . El conjunto de aplicaciones estables de X en Y se define como

$$\{X, Y\} := \varinjlim_n [\Sigma^n X, \Sigma^n Y]_*,$$

donde el límite directo se toma respecto a los homomorfismos inducidos por el funtor de suspensión. La suspensión permite definir una suma en el conjunto de aplicaciones estables de la siguiente manera: si $\alpha, \beta : \Sigma^n X \rightarrow \Sigma^n Y$ son aplicaciones punteadas, entonces

$$\Sigma\alpha + \Sigma\beta : \Sigma^{n+1} X \longrightarrow \Sigma^{n+1} Y.$$

Esta operación induce una estructura de grupo abeliano en $\{X, Y\}$. Además, la composición de aplicaciones induce una aplicación bilineal

$$\{Y, Z\} \times \{X, Y\} \longrightarrow \{X, Z\}.$$

En particular, cuando $X = Y$, el grupo abeliano $\{X, X\}$ tiene una estructura de anillo, cuyo producto está dado por la composición de aplicaciones estables.

Por otro lado, como el funtor de suspensión Σ es adjunto izquierdo del funtor de lazos Ω , se tiene una biyección natural $[\Sigma^n X, \Sigma^n Y]_* \cong [X, \Omega^n \Sigma^n Y]_*$. Por lo tanto,

$$\{X, Y\} = \varinjlim_n [X, \Omega^n \Sigma^n Y]_*.$$

Como X es un CW-complejo finito, el funtor $[X, -]_*$ conmuta con colímites filtrados. Así, $\{X, Y\} \cong [X, \Omega^\infty \Sigma^\infty Y]_*$, donde $\Omega^\infty \Sigma^\infty Y := \varinjlim_n \Omega^n \Sigma^n Y$.

Definición 2.6.1 ((co)homotopía estable). Sea X un CW-complejo. Denotamos por $X_+ = X \amalg \{*\}$ el espacio obtenido al añadir a X un punto base disjunto. Definimos la **homotopía estable** y la **cohomotopía estable** de X por

$$\pi_k^{\mathbb{S}}(X) := \{S^k, X_+\} \quad \text{y} \quad \pi_{\mathbb{S}}^k(X) := \{X_+, S^k\}.$$

Una razón importante para considerar la cohomotopía estable, y no únicamente la cohomotopía, es que la cohomotopía estable define una teoría de cohomología generalizada. En particular, $\pi_{\mathbb{S}}^0(X)$ posee una estructura natural de anillo, inducida por la estructura multiplicativa del espectro esfera y por la diagonal $X_+ \rightarrow X_+ \wedge X_+$. Esta estructura permitirá relacionar el anillo de Burnside de un grupo finito con la cohomotopía estable de su espacio clasificante mediante un homomorfismo de anillos.

Consideremos ahora un G -conjunto finito Z . La acción de G sobre Z determina un homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow \text{Sym}(Z) \cong \Sigma_{|Z|}$. Además, se tiene un mapeo $B\rho : BG \rightarrow B\Sigma_{|Z|}$ entre los espacios clasificantes, inducido por ρ . Usando la inclusión $B\Sigma_{|Z|} \hookrightarrow \prod_{n \geq 0} B\Sigma_n$ y la completación a grupo $\varphi : \prod_{n \geq 0} B\Sigma_n \rightarrow \varinjlim_n \Omega^n S^n$ se obtiene un mapeo $\alpha_G : BG \rightarrow \varinjlim_n \Omega^n S^n$ dado por la composición

$$BG \xrightarrow{B\rho} B\Sigma_{|Z|} \xrightarrow{\iota} \prod_{n \geq 0} B\Sigma_n \xrightarrow{\varphi} \varinjlim_n \Omega^n S^n.$$

$\alpha_G(Z)$

De esta manera, el mapeo $\alpha_G(Z)$ determina una clase en $[BG, \varinjlim_n \Omega^n S^n] = \pi_{\mathbb{S}}^0(BG)$. Además, la clase de homotopía estable de $\alpha_G(Z)$ depende solo de la clase de isomorfismo del G -conjunto Z en $A(G)$ [Lai79]. Por lo tanto, la asignación $Z \mapsto \alpha_G(Z)$ se extiende a un homomorfismo de anillos

$$\alpha_G : A(G) \rightarrow \pi_{\mathbb{S}}^0(BG) = [BG, \varinjlim_n \Omega^n S^n]. \quad (2.11)$$

Antes de enunciar el Teorema de completación de Segal–Carlsson definiremos el ideal de aumentación del anillo $A(G)$.

Definición 2.6.2 (Ideal de aumentación). Sea $\varepsilon : A(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ la aplicación que envía cada G -conjunto virtual a su cardinalidad virtual. El **ideal de aumentación** de $A(G)$ se define como $I_G := \text{Ker}(\varepsilon)$.

Teorema 2.6.3 (Teorema de completación de Segal–Carlsson). Sea G un grupo finito. Entonces el homomorfismo de anillos $\alpha_G : A(G) \rightarrow \pi_{\mathbb{S}}^0(BG)$ induce un isomorfismo

$$\alpha_G^\wedge : A(G)_{I_G}^\wedge \rightarrow \pi_{\mathbb{S}}^0(BG),$$

donde $A(G)_{I_G}^\wedge$ denota la completación del anillo de Burnside de G respecto al ideal de aumentación de $A(G)$.

Teorema de completación en el anillo de S -conjuntos $\mathcal{F}$ -estables

Sea $\varepsilon_{\mathcal{F}} : A(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{Z}$ el morfismo de anillos que envía cada clase de S -conjuntos virtuales $\mathcal{F}$ -estables a su cardinalidad virtual. Definimos el **ideal de aumentación** de $A(\mathcal{F})$ como $I_{\mathcal{F}} := \text{Ker}(\varepsilon)$.

Recordemos que, para cada $P \leq S$ y cada número primo q , o bien $q = 0$, definimos $I_{P,q} := \tilde{\varphi}_P^{-1}(q\mathbb{Z})$. En particular, si $P = 1$ es el subgrupo trivial y $q = 0$, se obtiene

$$I_{1,0} = \tilde{\varphi}_1^{-1}((0)) = \{X \in A(\mathcal{F}) \mid \tilde{\varphi}_1(X) = 0\}.$$

Como $\tilde{\varphi}_1(X)$ coincide con la cardinalidad virtual de X , se sigue que $I_{1,0} = I_{\mathcal{F}}$.

Observación 2.6.4. Sea $\text{res} : A(\mathcal{F}) \rightarrow A(S)$ el morfismo de restricción, y sean I_S e $I_{\mathcal{F}}$ los ideales de aumentación de $A(S)$ y $A(\mathcal{F})$, respectivamente. Entonces $\text{res}(I_{\mathcal{F}}) \subseteq I_S$. En efecto, si $X \in I_{\mathcal{F}}$, entonces $\tilde{\varphi}_1(X) = 0$. Por lo tanto, $\varphi_1(\text{res}(X)) = \tilde{\varphi}_1(X) = 0$ y $\text{res}(X) \in I_S$.

Lema 2.6.5. Sea $\tilde{I}_{P,q} = \varphi_P^{-1}(q\mathbb{Z})$ un ideal primo de $A(S)$, donde $P \leq S$ y q es un número primo o cero. Si $\text{res}^{-1}(\tilde{I}_{P,q}) = I_{1,q'}$, con q' algún número primo o cero, entonces $\tilde{I}_{P,q} = \tilde{I}_{1,q'}$.

Demostración. Como $\text{res} : A(\mathcal{F}) \rightarrow A(S)$ es la inclusión de $A(\mathcal{F})$ en $A(S)$, se tiene

$$\text{res}^{-1}(\tilde{I}_{P,q}) = \{X \in A(\mathcal{F}) \mid \varphi_P(\text{res}(X)) \in q\mathbb{Z}\}.$$

Pero para $X \in A(\mathcal{F})$, se tiene que $\varphi_P(\text{res}(X)) = \tilde{\varphi}_P(X)$. Por lo tanto, $\text{res}^{-1}(\tilde{I}_{P,q}) = I_{P,q}$. Luego $I_{P,q} = I_{1,q'}$.

Ahora consideremos los siguientes casos. Si $q = p$, entonces $\tilde{I}_{P,p} = \tilde{I}_{1,p}$. Además, como $I_{P,p} = I_{1,q'}$, los cocientes correspondientes tienen la misma característica, de modo que $q' = p$. Por lo tanto, $\tilde{I}_{P,q} = \tilde{I}_{1,q'}$. Supongamos ahora que $q \neq p$. Como $I_{P,q} = I_{1,q'}$, nuevamente las características de los cocientes son iguales, de donde $q = q'$. En particular, $q' \neq p$. Por la Proposición 2.5.7, se sigue que $P \sim_{\mathcal{F}} 1$; en consecuencia, $P = 1$. Por lo tanto, $\tilde{I}_{P,q} = \tilde{I}_{1,q} = \tilde{I}_{1,q'}$. $\square$

El siguiente resultado compara los ideales primos de $A(S)$ que contienen a $\text{res}(I_{\mathcal{F}})$ con aquellos que contienen al ideal de aumentación de $A(S)$.

Proposición 2.6.6. Sea $\tilde{I}_{P,q}$ un ideal primo de $A(S)$. Entonces $\text{res}(I_{\mathcal{F}}) \subseteq \tilde{I}_{P,q}$ si y solo si $I_S \subseteq \tilde{I}_{P,q}$.

Demostración. Supongamos primero que $\text{res}(I_{\mathcal{F}}) \subseteq \tilde{I}_{P,q}$. Entonces $I_{\mathcal{F}} \subseteq \text{res}^{-1}(\tilde{I}_{P,q})$. Como

$$\text{res}^{-1}(\tilde{I}_{P,q}) = \{X \in A(\mathcal{F}) \mid \varphi_P(\text{res}(X)) \in q\mathbb{Z}\} = \{X \in A(\mathcal{F}) \mid \tilde{\varphi}_P(X) \in q\mathbb{Z}\} = I_{P,q},$$

se sigue que $I_{\mathcal{F}} = I_{1,0} \subseteq I_{P,q}$.

Por la Proposición 2.5.7, se tienen los siguientes casos. Si $P \sim_{\mathcal{F}} 1$, entonces $P = 1$. En este caso $\tilde{I}_{P,q} = \tilde{I}_{1,q}$, y claramente $I_S = \tilde{I}_{1,0} \subseteq \tilde{I}_{1,q}$. Luego $I_S \subseteq \tilde{I}_{P,q}$. El otro caso es $q = p$. Como S es un p -grupo, se tiene $\tilde{I}_{P,p} = \tilde{I}_{1,p}$. Además, $I_S = \tilde{I}_{1,0} \subseteq \tilde{I}_{1,p}$. Por lo tanto, $I_S \subseteq \tilde{I}_{P,p} = \tilde{I}_{P,q}$.

Por otra parte, supongamos que $I_S \subseteq \tilde{I}_{P,q}$. Por la Observación 2.6.4, se tiene $\text{res}(I_{\mathcal{F}}) \subseteq I_S$. En consecuencia, $\text{res}(I_{\mathcal{F}}) \subseteq I_S \subseteq \tilde{I}_{P,q}$. $\square$

Teorema 2.6.7. La topología I_S -ádica de $A(S)$ coincide con la topología $I_{\mathcal{F}}$ -ádica vía el morfismo de restricción $\text{res} : A(\mathcal{F}) \rightarrow A(S)$.

Demostración. Sea $J := \text{res}(I_{\mathcal{F}}) \subseteq A(S)$. Por la Proposición 2.6.6, un ideal primo $\mathfrak{p}$ de $A(S)$ contiene a J si y solo si contiene a I_S . Por lo tanto, los conjuntos de ideales primos de $A(S)$ que contienen a J y a I_S coinciden.

Como el radical de un ideal es la intersección de todos los ideales primos que lo contienen, se sigue que

$$\sqrt{J} = \bigcap_{J \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \bigcap_{I_S \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{I_S}.$$

Dado que $A(S)$ es un anillo noetheriano, se tiene que si dos ideales tienen el mismo radical, entonces las topologías ádicas que inducen son equivalentes (véase [ZS13], Capítulo 8). Como $J = \text{res}(I_{\mathcal{F}})$, concluimos que la topología $\text{res}(I_{\mathcal{F}})$ -ádica de $A(S)$ coincide con la topología I_S -ádica de $A(S)$. $\square$

Además, por la Proposición 1.12 de [Lai79], la topología I_S -ádica inducida sobre el ideal de aumentación I_S coincide con la topología p -ádica sobre I_S . En consecuencia, por el Teorema 2.6.7, la topología $\text{res}(I_{\mathcal{F}})$ -ádica inducida sobre I_S también coincide con la topología p -ádica.

Antes de dar la demostración del Teorema de completación de Segal–Carlsson para el caso de grupos p -locales finitos, introduciremos de manera breve la construcción del complejo de cocadenas asociada a una categoría pequeña con coeficientes en un funtor.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña, y $M : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ un funtor contravariante. Definimos el **grupo de n -cocadenas** de $\mathcal{C}$ con coeficientes en M como

$$C^n(\mathcal{C}; M) := \prod_{c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} c_n} M(c_0),$$

donde el producto corre sobre todas las cadenas de n morfismos componibles en $\mathcal{C}$. Para una cocadena $u \in C^n(\mathcal{C}; M)$ su diferencial $d : C^n(\mathcal{C}; M) \rightarrow C^{n+1}(\mathcal{C}; M)$ está dada por

$$\begin{aligned} (du)(f_1, \dots, f_{n+1}) &= M(f_1)(u(f_2, \dots, f_{n+1})) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (-1)^i u(f_1, \dots, f_{i+1} \circ f_i, \dots, f_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} u(f_1, \dots, f_n). \end{aligned}$$

En particular, si $u \in C^0(\mathcal{C}; M) = \prod_{c \in \text{Ob}(\mathcal{C})} M(c)$, entonces $(du)(f : c \rightarrow d) = M(f)(u_d) - u_c$. Por lo tanto,

$$H^0(C^\bullet(\mathcal{C}; M)) \cong \varprojlim_{\mathcal{C}} M.$$

Si $\eta : M \rightarrow N$ es una transformación natural entre funtores contravariantes $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$, entonces η induce un morfismo de complejos $\eta_* : C^\bullet(\mathcal{C}; M) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{C}; N)$, definido coordenada a coordenada por

$$(\eta_* u)(f_1, \dots, f_n) = \eta_{c_0}(u(f_1, \dots, f_n)).$$

Nos interesa aplicar la construcción anterior al caso particular de un sistema de fusión $\mathcal{F}$. Para ello, consideraremos los funtores contravariantes

$$\begin{aligned} A : \mathcal{F}^{op} &\longrightarrow \text{Ab}, & \pi_{\mathbb{S}}^0 : \mathcal{F}^{op} &\longrightarrow \text{Ab}, \\ P &\longmapsto A(P), & P &\longmapsto \pi_{\mathbb{S}}^0(BP). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si $f : P \rightarrow Q$ es un morfismo en $\mathcal{F}$, entonces $A(f) : A(Q) \rightarrow A(P)$ está dado por restricción de Q -conjuntos a P mediante f , mientras que $\pi_{\mathbb{S}}^0(f) : \pi_{\mathbb{S}}^0(BQ) \rightarrow \pi_{\mathbb{S}}^0(BP)$ está inducido por el mapeo $Bf : BP \rightarrow BQ$. La naturalidad del homomorfismo de Segal–Carlsson (véase [Lai79], Sección 3) $\alpha_P : A(P) \rightarrow \pi_{\mathbb{S}}^0(BP)$ respecto a los morfismos de la categoría $\mathcal{F}$ induce una transformación natural $\alpha : A \rightarrow \pi_{\mathbb{S}}^0$. Por lo tanto, se obtiene un morfismo de complejos

$$\alpha_* : C^\bullet(\mathcal{F}; A) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{F}; \pi_{\mathbb{S}}^0).$$

Una vez hecha la construcción anterior, procedemos a demostrar el teorema de completación.

Teorema 2.6.8 (Teorema de completación). *Sea $(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$ un grupo p -local finito. Entonces existe un isomorfismo de anillos*

$$A(\mathcal{F})_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge \cong \pi_{\mathbb{S}}^0((|\mathcal{L}|_p^\wedge)).$$

Demostración. Consideremos los funtores contravariantes $A : \mathcal{F}^{op} \longrightarrow \text{Ab}$ y $\pi_{\mathbb{S}}^0 : \mathcal{F}^{op} \longrightarrow \text{Ab}$ definidos en (2.12). Por la construcción previa, se tiene una transformación natural $\alpha : A \rightarrow \pi_{\mathbb{S}}^0$ que induce un morfismo de complejos $\alpha_* : C^\bullet(\mathcal{F}; A) \rightarrow C^\bullet(\mathcal{F}; \pi_{\mathbb{S}}^0)$.

Ahora consideremos a $A(P)$ como $A(\mathcal{F})$ -módulo mediante el homomorfismo de restricción $\text{res}_P^S : A(\mathcal{F}) \rightarrow A(P)$. Si $f : P \rightarrow Q$ es un morfismo en $\mathcal{F}$, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & A(\mathcal{F}) & \\ \text{res}_P^S \swarrow & & \searrow \text{res}_Q^S \\ A(P) & \xrightarrow{A(f)=f^*} & A(Q). \end{array}$$

En particular, los morfismos de restricción son homomorfismos de $A(\mathcal{F})$ -módulos. En consecuencia, $C^\bullet(\mathcal{F}; A)$ es un complejo de $A(\mathcal{F})$ -módulos. Además, cada $A(P)$ es un grupo abeliano libre de rango finito. Como la categoría $\mathcal{F}$ tiene un número finito de objetos y de morfismos, cada término $C^n(\mathcal{F}; A)$ es un producto finito de grupos de la forma $A(P)$. Por lo tanto, cada $C^n(\mathcal{F}; A)$ es un $A(\mathcal{F})$ -módulo finitamente generado.

Dado que $A(\mathcal{F})$ es noetheriano, el funtor de completación $I_{\mathcal{F}}$ -ádica es exacto sobre $A(\mathcal{F})$ -módulos finitamente generados (véase [AM18], Cap. 10). En consecuencia,

$$H^0(C^\bullet(\mathcal{F}; A)_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge) \cong H^0(C^\bullet(\mathcal{F}; A))_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge.$$

Además, como la completación conmuta con productos finitos, se tiene un isomorfismo de complejos

$$C^\bullet(\mathcal{F}; A)_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge \cong C^\bullet(\mathcal{F}; A_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge),$$

donde $A_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge(P) := A(P)_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge$. Por el Teorema 2.6.7, para cada $P \leq S$, la topología $\text{res}_P^S(I_{\mathcal{F}})$ -ádica de $A(P)$ coincide con la topología I_P -ádica. Por lo tanto, $A(P)_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge \cong A(P)_{I_P}^\wedge$. Por el Teorema de completación de Segal–Carlsson, obtenemos un isomorfismo natural $A(P)_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge \cong A(P)_{I_P}^\wedge \cong \pi_{\mathbb{S}}^0(BP)$. Así, los funtores $A_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge$ y $\pi_{\mathbb{S}}^0$ son naturalmente isomorfos. En consecuencia, $C^\bullet(\mathcal{F}; A_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge) \cong C^\bullet(\mathcal{F}; \pi_{\mathbb{S}}^0)$.

Como la cohomología en grado cero del complejo asociado a un funtor calcula el límite inverso, obtenemos

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbb{S}}^0(|\mathcal{L}|_p^\wedge) &\cong \varprojlim_{\mathcal{F}} \pi_{\mathbb{S}}^0(BP) \\ &\cong H^0(C^\bullet(\mathcal{F}; \pi_{\mathbb{S}}^0)) \\ &\cong H^0(C^\bullet(\mathcal{F}; A_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge)) \\ &\cong H^0(C^\bullet(\mathcal{F}; A)_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge) \\ &\cong H^0(C^\bullet(\mathcal{F}; A))_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge \\ &\cong \left(\varprojlim_{\mathcal{F}} A(P) \right)_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge \\ &\cong A(\mathcal{F})_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge, \end{aligned}$$

donde el primer isomorfismo se tiene por el Teorema 4.2 de [CCM20]. Observemos que los isomorfismos anteriores son como grupos abelianos; sin embargo, todos los isomorfismos que aparecen son inducidos por homomorfismos naturales de anillos. Es decir, por las restricciones en cohomotopía estable, el morfismo de Segal–Carlsson y la identificación $A(\mathcal{F}) = \varprojlim_{\mathcal{F}} A(P)$.

Por lo tanto, el isomorfismo $A(\mathcal{F})_{I_{\mathcal{F}}}^\wedge \cong \pi_{\mathbb{S}}^0(|\mathcal{L}|_p^\wedge)$ es un isomorfismo de anillos. $\square$

Capítulo 3

Anillo de representaciones de grupos finitos y sistemas de fusión

3.1. Representaciones complejas

Sea G un grupo finito. Una **representación lineal compleja** de G es un homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$, donde V es un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial y $\text{Aut}(V)$ denota el grupo de automorfismos de V . Si $\dim V = n$, entonces, al elegir una base de V , podemos identificar $\text{Aut}(V)$ con $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. El **grado** de la representación ρ es la dimensión de V .

Dos representaciones $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ y $\tau : G \rightarrow \text{Aut}(W)$ se dicen **equivalentes** si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $\phi : V \rightarrow W$ tal que $\phi\rho(g)\phi^{-1} = \tau(g)$ para todo $g \in G$.

Una representación de G también puede describirse como una acción lineal de G sobre un espacio vectorial. Esto es, una **acción lineal** de G sobre un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial V es una acción $\cdot : G \times V \rightarrow V$ tal que

$$g \cdot (\alpha v + w) = \alpha(g \cdot v) + g \cdot w,$$

para todo $g \in G$, $v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. En este caso diremos que V es un **$\mathbb{C}$ - G -módulo**. Un **homomorfismo** entre dos $\mathbb{C}$ - G -módulos V y W es una transformación lineal G -equivariante $\phi : V \rightarrow W$. Si además ϕ es biyectiva, diremos que V y W son isomorfos como $\mathbb{C}$ - G -módulos.

Proposición 3.1.1. *Dos $\mathbb{C}$ - G -módulos V y W son isomorfos si y solo si las representaciones asociadas $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ y $\tau : G \rightarrow \text{Aut}(W)$ son equivalentes.*

Demostración. Sea $\phi : V \rightarrow W$ un isomorfismo de espacios vectoriales. Entonces $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ y $\tau : G \rightarrow \text{Aut}(W)$ son representaciones equivalentes mediante ϕ si y solo si $\phi\rho(g)\phi^{-1} = \tau(g)$ para todo $g \in G$. Equivalentemente, $\rho(g)(v) = \phi^{-1}\tau(g)\phi(v)$ para todo $g \in G$ y $v \in V$. En términos de las acciones lineales, esto equivale a $g \cdot v = \phi^{-1}(g \cdot \phi(v))$, lo cual, a su vez, es equivalente a $\phi(g \cdot v) = g \cdot \phi(v)$. Por lo tanto, ρ y τ son equivalentes si y

solo si existe un isomorfismo lineal $\phi : V \rightarrow W$ que es G -equivariante, es decir, si y solo si V y W son isomorfos como $\mathbb{C}$ - G -módulos. $\square$

Sea G un grupo. Definimos el **álgebra de grupo** con coeficientes en $\mathbb{C}$ como

$$\mathbb{C}[G] := \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in \mathbb{C}, \lambda_g = 0 \text{ para casi todo } g \in G \right\}.$$

Usaremos la notación $\mathbb{C}G$ para referirnos al álgebra de grupo $\mathbb{C}[G]$. Como $\mathbb{C}$ -módulo, $\mathbb{C}G$ es el módulo libre generado por G . La suma y el producto están dados por

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \lambda_g g + \sum_{g \in G} \lambda'_g g &:= \sum_{g \in G} (\lambda_g + \lambda'_g) g \\ \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \cdot \left(\sum_{g \in G} \lambda'_g g \right) &:= \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} \lambda_h \lambda'_{h^{-1}g} \right) g. \end{aligned}$$

Para propósitos de este trabajo, solo estaremos interesados en el caso de coeficientes en $\mathbb{C}$. No obstante, la definición se puede extender a cualquier anillo conmutativo R .

Observemos que $\mathbb{C}$ se identifica con el subanillo $\mathbb{C}1 \subseteq \mathbb{C}G$, donde 1 denota el elemento neutro de G . Por lo tanto, todo $\mathbb{C}G$ -módulo V es, por restricción de escalares, un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial, donde la multiplicación por escalares está dada por $\lambda v = (\lambda 1) \cdot v$. Si V es un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial provisto de una acción lineal de G , dicha acción se extiende de manera única por linealidad a una acción de $\mathbb{C}G$ sobre V , definida por

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \cdot v = \sum_{g \in G} \lambda_g (g \cdot v).$$

Recíprocamente, si V es un $\mathbb{C}G$ -módulo, al restringir la acción a G se obtiene una acción lineal de G sobre V . Así, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.1.2. *Las categorías $\mathbb{C}G\text{-Mod}$ y $\mathbb{C}\text{-}G\text{-Mod}$ son isomorfas.*

De esta manera, se tienen tres formas equivalentes de definir una representación lineal compleja de un grupo. En virtud de estas equivalencias, a partir de ahora utilizaremos la notación de $\mathbb{C}G$ -módulo para referirnos a los $\mathbb{C}$ - G -módulos.

Definición 3.1.3. Sea V un $\mathbb{C}G$ -módulo.

- Un **$\mathbb{C}G$ -submódulo** de V es un submódulo de V en el sentido usual. Equivalentemente, es un subespacio vectorial $S \leq V$ tal que $g \cdot s \in S$, para todo $g \in G$ y $s \in S$.
- Diremos que V es **irreducible** si sus únicos $\mathbb{C}G$ -submódulos son $\{0\}$ y V .

Lema 3.1.4 ([JL01], Corolario 10.7). *Si G es finito, entonces todo $\mathbb{C}G$ -módulo irreducible es de dimensión finita.*

Un complemento de un subespacio vectorial $S \leq V$ es un subespacio $T \leq V$ tal que $V = S \oplus T$. Es bien sabido que todo subespacio admite un complemento. En analogía con este resultado, uno puede preguntarse si ocurre lo mismo para los $\mathbb{C}G$ -submódulos. Es decir, si dado un $\mathbb{C}G$ -submódulo $U \leq V$, existe un complemento de U que también sea un $\mathbb{C}G$ -submódulo.

Teorema 3.1.5 (Teorema de Maschke). *Sea G un grupo finito y sea V un $\mathbb{C}G$ -módulo de dimensión finita. Entonces todo $\mathbb{C}G$ -submódulo de V admite un complemento que también es un $\mathbb{C}G$ -submódulo.*

Una demostración detallada de este resultado puede encontrarse en el Teorema 8.1 de [JL01].

Corolario 3.1.6. *Todo $\mathbb{C}G$ -módulo de dimensión finita no cero se descompone como suma directa de $\mathbb{C}G$ -submódulos irreducibles. Más aún, esta descomposición es única salvo isomorfismo y permutación de los factores.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre $\dim_{\mathbb{C}} V$. Si $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$, entonces V es irreducible y no hay nada que probar.

Sea V un $\mathbb{C}G$ -módulo de dimensión finita no cero. Si V es irreducible, entonces $V = V$ ya es una descomposición como suma directa de submódulos irreducibles. Supongamos entonces que V no es irreducible. Por definición, existe un $\mathbb{C}G$ -submódulo propio no cero $U \leq V$. Por el Teorema de Maschke, existe un $\mathbb{C}G$ -submódulo $W \leq V$ tal que $V = U \oplus W$. Como U y W tienen dimensión estrictamente menor que la de V , por hipótesis de inducción ambos se descomponen como suma directa de $\mathbb{C}G$ -submódulos irreducibles. Por lo tanto, V también se descompone como suma directa de $\mathbb{C}G$ -submódulos irreducibles.

Esto demuestra la existencia de la descomposición. La demostración de la unicidad puede consultarse en el Capítulo 2, Sección 2.6 de [Ser+77]. $\square$

Tanto el Teorema de Maschke como el corolario anterior se cumplen sobre cualquier campo en el que $|G|$ sea invertible. Esto equivale a pedir que la característica de k sea 0 ó que $\text{char}(k) \nmid |G|$.

Lema 3.1.7 ([JL01], Proposición 9.18). *Sea G un grupo finito. Entonces G es abeliano si y solo si todo $\mathbb{C}G$ -módulo irreducible es de dimensión uno.*

Nuevamente, el resultado anterior se puede generalizar a kG -módulos si se piden dos condiciones sobre el campo: que k sea algebraicamente cerrado y que $|G|$ sea invertible en k .

Proposición 3.1.8 ([JL01], Teorema 9.8). *El número de representaciones irreducibles complejas de un grupo abeliano finito G , salvo equivalencia, es exactamente $|G|$.*

Este resultado es un caso particular de un hecho más general: para todo grupo finito, el número de representaciones irreducibles complejas, salvo equivalencia, coincide con el número de clases de conjugación del grupo. En el caso abeliano, cada clase de conjugación tiene un único elemento, por lo que el número de clases de conjugación es precisamente $|G|$. Más adelante recuperaremos este resultado usando caracteres.

La idea de la demostración consiste en usar el teorema fundamental de grupos abelianos finitos para obtener una presentación de G de la forma

$$G = \langle g_1, g_2, \dots, g_r \mid g_i^{n_i} = e, g_i g_j = g_j g_i \rangle.$$

Después, se construyen las representaciones irreducibles de dimensión uno enviando cada generador g_i a una raíz n_i -ésima de la unidad. El Lema 3.1.7 garantiza que todas las representaciones irreducibles de G son de dimensión uno.

Corolario 3.1.9. *Si $G = \mathbb{Z}/n$ es el grupo cíclico de orden n , entonces sus representaciones irreducibles son de la forma $\rho : G \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C})$, donde $\rho(g) = \omega$ es una raíz n -ésima de la unidad.*

3.2. Anillo de representaciones de un grupo finito

Dado un grupo finito G , definimos

$$\text{Rep}(G) := \{[V] \mid V \text{ es un } \mathbb{C}G\text{-módulo de dimensión finita}\}$$

como el conjunto de clases de isomorfismo de representaciones complejas de dimensión finita de G .

La suma directa de dos representaciones V y W de G es el $\mathbb{C}G$ -módulo $V \oplus W$ en el que G actúa diagonalmente, es decir, $g \cdot (v, w) = (g \cdot v, g \cdot w)$ para todo $(v, w) \in V \oplus W$ y $g \in G$. Esto define una operación binaria en $\text{Rep}(G)$ dada por $[V] + [W] := [V \oplus W]$. En efecto, si $V \cong V'$ y $W \cong W'$ como $\mathbb{C}G$ -módulos, entonces $V \oplus W \cong V' \oplus W'$. Por lo tanto, la operación está bien definida sobre clases de isomorfismo.

Proposición 3.2.1. *Sea G un grupo finito. Entonces $(\text{Rep}(G), +)$ es un monoide conmutativo y cancelativo.*

Demostración. La asociatividad y conmutatividad se siguen de los isomorfismos naturales $(U \oplus V) \oplus W \cong U \oplus (V \oplus W)$ y $V \oplus W \cong W \oplus V$ como $\mathbb{C}G$ -módulos. El elemento neutro

es la clase del $\mathbb{C}G$ -módulo nulo 0, pues $[V] + [0] = [V \oplus 0] = [V]$. Por lo tanto, $(\text{Rep}(G), +)$ es un monoide conmutativo.

Veamos ahora que es cancelativo. Supongamos que $[U] + [V] = [U] + [W]$. Entonces $U \oplus V \cong U \oplus W$. Por el Corolario 3.1.6, y la unicidad de descomposición en irreducibles, podemos escribir

$$\begin{aligned} U &\cong U_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus U_r^{n_r}, \\ V &\cong U_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus U_r^{m_r}, \\ W &\cong U_1^{k_1} \oplus \cdots \oplus U_r^{k_r}, \end{aligned}$$

donde $U_1, \dots, U_r$ son irreducibles no isomorfos entre sí y $n_j, m_j, k_j \in \mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned} U \oplus V &\cong U_1^{(n_1+m_1)} \oplus \cdots \oplus U_r^{(n_r+m_r)} \\ U \oplus W &\cong U_1^{(n_1+k_1)} \oplus \cdots \oplus U_r^{(n_r+k_r)}. \end{aligned}$$

Como $U \oplus V \cong U \oplus W$, la unicidad de la descomposición en irreducibles implica que $n_j + m_j = n_j + k_j$ para todo $j = 1, \dots, r$. Por lo tanto, $m_j = k_j$ para todo j , y se sigue que $V \cong W$. En consecuencia, $[V] = [W]$, y $\text{Rep}(G)$ es cancelativo. $\square$

Otra manera de construir $\mathbb{C}G$ -módulos es mediante el producto tensorial. Dados dos $\mathbb{C}G$ -módulos V y W , su producto tensorial es el $\mathbb{C}$ -espacio vectorial $V \otimes W$ con la acción diagonal de G dada por $g \cdot (v \otimes w) = (g \cdot v) \otimes (g \cdot w)$, para todo $g \in G$ y $v \otimes w \in V \otimes W$. De esta manera, $V \otimes W$ es nuevamente un $\mathbb{C}G$ -módulo. Esto induce una operación en $\text{Rep}(G)$ dada por $[V] \cdot [W] = [V \otimes W]$. Esta operación está bien definida sobre clases de isomorfismo y es distributiva respecto a la suma. Por lo tanto, $\text{Rep}(G)$ tiene estructura de semianillo conmutativo, cuyo neutro multiplicativo es el $\mathbb{C}G$ -módulo trivial $\mathbb{C}$.

Definición 3.2.2 (Anillo de representaciones). El **anillo de representaciones** de un grupo finito G es la construcción de Grothendieck del semianillo de representaciones $\text{Rep}(G)$; es decir,

$$R(G) := \frac{\mathbb{Z}[\text{Rep}(G)]}{\langle [V] + [W] - [V \oplus W] \rangle}.$$

Los elementos de $R(G)$ se llaman **representaciones virtuales** de G . Todo elemento de $R(G)$ puede representarse como una diferencia formal $[V] - [W]$, donde V y W son $\mathbb{C}G$ -módulos de dimensión finita.

Por el Corolario 3.1.6, toda representación compleja de dimensión finita de G se descompone como suma directa de representaciones irreducibles. Es decir, si V es un $\mathbb{C}G$ -módulo de dimensión finita, entonces $V \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{n_i}$, donde cada V_i es irreducible y $n_i \in \mathbb{N}$ es la multiplicidad de V_i en la descomposición. Por lo tanto, en $R(G)$ se tiene $[V] = \sum_{i=1}^r n_i [V_i]$. Esto muestra que las clases de representaciones irreducibles generan a $R(G)$ como $\mathbb{Z}$ -módulo.

Veamos ahora que estas clases son linealmente independientes. Sea $\text{Irred}(G)$ un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de G , y supongamos que $\sum_{i=1}^r a_i [V_i] = 0$, donde $V_i \in \text{Irred}(G)$ y $a_i \in \mathbb{Z}$. Escribimos $a_i = a_i^+ - a_i^-$, con $a_i^+, a_i^- \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^r a_i^+ [V_i] = \sum_{i=1}^r a_i^- [V_i].$$

Como $\text{Rep}(G)$ es cancelativo, la aplicación natural $\text{Rep}(G) \rightarrow R(G)$ es inyectiva. Por lo tanto,

$$\bigoplus_{i=1}^r V_i^{a_i^+} \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i^{a_i^-}.$$

Por la unicidad de la descomposición en irreducibles, se sigue que $a_i^+ = a_i^-$ para todo $i = 1, \dots, r$. Así, $a_i = 0$ para todo i . Por lo tanto, las clases $[V_i]$, con $V_i \in \text{Irred}(G)$, son linealmente independientes. En consecuencia, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2.3. *Sea G un grupo finito. Entonces el anillo de representaciones $R(G)$ es un $\mathbb{Z}$ -módulo libre con base dada por las clases de representaciones irreducibles complejas de G . Es decir,*

$$R(G) \cong \bigoplus_{V \in \text{Irred}(G)} \mathbb{Z}[V].$$

Ejemplo 3.2.4. Sea $G = \mathbb{Z}/2 = \langle \sigma \mid \sigma^2 = 1 \rangle$ el grupo cíclico de orden dos. Como G es abeliano, todas sus representaciones irreducibles complejas son de dimensión uno. Por lo tanto, una representación irreducible de G está determinada por la imagen de σ , la cual debe satisfacer $\rho(\sigma)^2 = 1$. Así, $\rho(\sigma)$ solo puede ser 1 ó -1 . De esta manera, G tiene exactamente dos representaciones irreducibles complejas: la representación trivial $\mathbb{C}$ y la representación signo $\mathbb{C}_\sigma$, dada por $\sigma \cdot v = -v$, para todo $v \in \mathbb{C}$. Por el Teorema 3.2.3, el anillo de representaciones de G , como $\mathbb{Z}$ -módulo libre, está dado por

$$R(\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}[\mathbb{C}] \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{C}_\sigma].$$

Denotemos por $1 = [\mathbb{C}]$ a la clase de la representación trivial y por $X = [\mathbb{C}_\sigma]$ a la clase de la representación signo. Entonces 1 es el neutro multiplicativo de $R(G)$. Además, se tiene $\mathbb{C}_\sigma \otimes \mathbb{C}_\sigma \cong \mathbb{C}$ como $\mathbb{C}G$ -módulos. En efecto, la acción de σ sobre $\mathbb{C}_\sigma \otimes \mathbb{C}_\sigma$ es trivial, pues

$$\sigma \cdot (v \otimes w) = (\sigma \cdot v) \otimes (\sigma \cdot w) = (-v) \otimes (-w) = v \otimes w.$$

Luego

$$X^2 = [\mathbb{C}_\sigma]^2 = [\mathbb{C}_\sigma \otimes \mathbb{C}_\sigma] = [\mathbb{C}] = 1.$$

Por lo tanto, todo elemento de $R(\mathbb{Z}/2)$ se escribe de manera única como $a + bX$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, y la única relación multiplicativa está dada por $X^2 = 1$. En consecuencia,

$$R(\mathbb{Z}/2) \cong \frac{\mathbb{Z}[X]}{\langle X^2 - 1 \rangle}.$$

Las representaciones de un grupo finito pueden relacionarse con las representaciones de sus subgrupos mediante dos construcciones fundamentales como lo son la restricción y la inducción. Si $H \leq G$, entonces toda representación de G puede restringirse a una representación de H . En sentido inverso, a partir de una representación de H se puede construir una representación de G mediante inducción. Para precisar esto, introducimos la siguiente definición.

Definición 3.2.5. Sea G un grupo finito y sea $H \leq G$.

- Si V es un $\mathbb{C}G$ -módulo, la **restricción** de V de G a H es el $\mathbb{C}H$ -módulo $\text{res}_H^G V$ cuyo espacio vectorial subyacente es V , y la acción de H está dada por la acción de G restringida a H .
- Si V es un $\mathbb{C}H$ -módulo, la **inducción** de V de H a G es el $\mathbb{C}G$ -módulo $\text{ind}_H^G V := \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V$, donde G actúa por multiplicación izquierda en el primer factor.

Consideremos un subgrupo H de un grupo finito G . Entonces la restricción definida anteriormente induce un homomorfismo de anillos $\text{res}_H^G(G) : R(G) \rightarrow R(H)$ dado por $\text{res}_H^G([V]) = [\text{res}_H^G V]$. Por otro lado, la inducción induce un homomorfismo de grupos abelianos $\text{ind}_H^G(H) : R(H) \rightarrow R(G)$ definido como $\text{ind}_H^G([V]) = [\text{ind}_H^G V]$. En general, ind_H^G no es un homomorfismo de anillos. Se verifica fácilmente que ambas construcciones son funtoriales

Observación 3.2.6. Sea $H \leq G$ y sea X un conjunto de representantes de las clases laterales izquierdas G/H . Entonces, como $\mathbb{C}H$ -módulo derecho, $\mathbb{C}G = \bigoplus_{x \in X} x\mathbb{C}H$. En consecuencia, si V es un $\mathbb{C}H$ -módulo, se tiene

$$\text{ind}_H^G V = \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} V \cong \bigoplus_{x \in X} x\mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} V.$$

Además, para cada $x \in X$ se tiene un isomorfismo de espacios vectoriales $x\mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} V \cong x \otimes V$, donde $x \otimes V$ denota una copia de V etiquetada por x . Por lo tanto, como espacio vectorial,

$$\text{ind}_H^G V \cong \bigoplus_{x \in X} x \otimes V.$$

La acción de G sobre esta descomposición se describe de la siguiente manera. Si $a \in G$ y $x \in X$, escribimos $ax = x'h$ con $x' \in X$ y $h \in H$. Entonces $a \cdot (x \otimes v) = x' \otimes (h \cdot v)$. En

particular, esta descomposición depende de la elección de representantes X y debe entenderse como una descomposición del espacio vectorial subyacente, no como una descomposición en $\mathbb{C}G$ -submódulos.

3.3. Caracteres

Toda representación compleja de dimensión finita de un grupo finito G determina una función distinguida, llamada su carácter. Recíprocamente, dos representaciones complejas de dimensión finita tienen el mismo carácter si y solo si son equivalentes. Por lo tanto, los caracteres determinan a las representaciones complejas de G salvo isomorfismo. En esta sección recordaremos algunas propiedades básicas de los caracteres y su relación con el anillo de representaciones de G .

Definición 3.3.1 (Carácter). Sea $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ una representación compleja de grado finito. El **carácter** asociado a ρ es la función $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$. Si no hay riesgo de confusión, escribiremos χ_V para denotar el carácter asociado al $\mathbb{C}G$ -módulo V .

Nótese que, en general, un carácter $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ no es un homomorfismo de grupos. Sin embargo, si V es de dimensión uno, entonces cada $\rho(g)$ está dada por multiplicación por un escalar no cero. En este caso, al identificar $\text{Aut}(V)$ con $\mathbb{C}^\times$, el carácter coincide con la representación correspondiente. A continuación enunciamos algunas propiedades de los caracteres. Estas propiedades son estándar, y una demostración puede encontrarse en [JL01], Capítulo 13.

Proposición 3.3.2. *Sea G un grupo finito.*

1. *Sean V y W dos $\mathbb{C}G$ -módulos de dimensión finita. Entonces $V \cong W$ si y solo si $\chi_V = \chi_W$.*
2. *Si $g, h \in G$ son conjugados, entonces $\chi_V(g) = \chi_V(h)$ para todo $\mathbb{C}G$ -módulo V de dimensión finita.*
3. *Si $g \in G$ es un elemento de orden m , entonces $\chi_V(g)$ es una suma de raíces m -ésimas de la unidad.*

Observemos que la propiedad 2 del resultado anterior nos dice que los caracteres son constantes en cada clase de conjugación de G . A este tipo de funciones se les conoce como **funciones de clase**. Dado un grupo finito G , definimos $\text{Class}(G) := \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es función de clase}\}$. Es decir, $\text{Class}(G)$ es el conjunto de funciones $\mathbb{C}$ -valuadas en G que

son constantes en cada clase de conjugación. Este conjunto tiene estructura de $\mathbb{C}$ -espacio vectorial con las operaciones dadas por

$$(f_1 + f_2)(g) = f_1(g) + f_2(g), \quad (\lambda f)(g) = \lambda f(g),$$

para $f_1, f_2 \in \text{Class}(G)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Por otra parte, la aplicación $\langle -, - \rangle : \text{Class}(G) \times \text{Class}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$$

define un producto interno en $\text{Class}(G)$.

Proposición 3.3.3 (Ortonormalidad de caracteres). *Sea G un grupo finito. Si V y W son representaciones irreducibles complejas de G con caracteres asociados χ_V y χ_W , respectivamente, entonces*

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } V \not\cong W, \\ 1, & \text{si } V \cong W. \end{cases}$$

Este resultado es conocido como la relación de ortonormalidad de caracteres, y una demostración detallada puede encontrarse en [JL01], Teorema 14.12.

Diremos que un carácter χ de G es **irreducible** si es el carácter asociado a una representación irreducible de G . Sea $\text{Irred}(G) = \{V_1, \dots, V_r\}$ un conjunto de representantes de las clases de isomorfismo de representaciones irreducibles complejas de G , y denotemos por χ_i al carácter asociado a V_i . Por la Proposición 3.3.3, se tiene

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (3.1)$$

En particular, los caracteres irreducibles $\chi_1, \dots, \chi_r$ son distintos.

Proposición 3.3.4. *El conjunto $\mathcal{B} = \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_r\}$ de caracteres irreducibles de G es linealmente independiente en $\text{Class}(G)$.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{i=1}^r \alpha_i \chi_i = 0$ para algunos $\alpha_i \in \mathbb{C}$. Tomando producto interno con χ_j , obtenemos

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^r \alpha_i \chi_i, \chi_j \right\rangle = \sum_{i=1}^r \alpha_i \langle \chi_i, \chi_j \rangle = \alpha_j.$$

Como esto ocurre para todo $j \in 1, \dots, r$, se sigue que $\alpha_j = 0$ para todo j . Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente en el espacio $\text{Class}(G)$ de funciones de clase. $\square$

Teorema 3.3.5. *El número de caracteres irreducibles de un grupo finito G es igual al número de clases de conjugación de G .*

Demostración. Sean $\chi_1, \dots, \chi_n$ los caracteres irreducibles de G y $C_1, \dots, C_k$ las clases de conjugación de G . Por la Proposición 3.3.3, el conjunto $\mathcal{B} = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ es linealmente independiente en $\text{Class}(G)$. Luego $\dim \mathcal{B} = n \leq \dim \text{Class}(G) = k$. Por otro lado, por el Teorema de Maschke, se tiene

$$\mathbb{C}G = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n,$$

donde cada W_i es suma de $\mathbb{C}G$ -submódulos irreducibles con carácter asociado χ_i para todo $i = 1, \dots, n$. Como el elemento neutro 1 de G es un elemento de $\mathbb{C}G$, este se puede expresar en $\mathbb{C}G$ como $1 = f_1 + \dots + f_n$, con $f_i \in W_i$. Sea $Z(\mathbb{C}G) := \{z \in \mathbb{C}G \mid zr = rz, \forall r \in \mathbb{C}G\}$ el centro de $\mathbb{C}G$. Entonces todo $z \in Z(\mathbb{C}G)$ es de la forma

$$z = z \cdot 1 = z(f_1 + \dots + f_n), \quad f_i \in W_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Dado que $\mathbb{C}$ es un campo algebraicamente cerrado y cada W_i es irreducible, por la Proposición 9.14 de [JL01], existe $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tal que $zf_i = \lambda_i f_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Así,

$$z = z(f_1 + \dots + f_n) = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n. \quad (3.2)$$

Esto muestra que el centro del álgebra de grupo $Z(\mathbb{C}G)$ está contenido en el subespacio de $\mathbb{C}G$ generado por $f_1, \dots, f_n$. Por la Proposición 12.22 de [JL01], $\dim(Z(\mathbb{C}G)) = k$; esto implica que $k \leq n$. Dado que $k \leq n$ y $n \leq k$, se concluye que $k = n$ y el número de caracteres irreducibles es igual al número de clases de G -conjugación. $\square$

Corolario 3.3.6. *Los caracteres irreducibles forman una base ortonormal de $\text{Class}(G)$.*

Si χ_V y χ_W son los caracteres asociados a dos representaciones de dimensión finita V y W de un grupo finito G , entonces

$$\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W \quad \text{y} \quad \chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W, \quad (3.3)$$

donde el producto del lado derecho es el producto punto a punto de funciones.

Consideremos un conjunto $\text{Irred}(G) = \{V_1, \dots, V_r\}$ de representantes de las clases de isomorfismo de representaciones irreducibles complejas de G , y sea $\chi_i = \chi_{V_i}$ el carácter asociado a V_i . Por el Teorema 3.2.3, todo elemento de $R(G)$ se escribe de manera única como una combinación lineal entera $\sum_{i=1}^r n_i [V_i]$, con $n_i \in \mathbb{Z}$. Sea $\chi: R(G) \rightarrow \text{Class}(G)$ la aplicación dada por

$$\chi \left(\sum_{i=1}^r n_i [V_i] \right) = \sum_{i=1}^r n_i \chi_i.$$

Las igualdades en (3.3) muestran que χ respeta la suma y el producto, por lo que es un homomorfismo de anillos. Además, como los caracteres irreducibles $\chi_1, \dots, \chi_r$ son linealmente independientes en $\text{Class}(G)$, si $\chi(\sum_{i=1}^r n_i [V_i]) = 0$, entonces $\sum_{i=1}^r n_i \chi_i = 0$, y por independencia lineal se sigue que $n_i = 0$ para todo i . Por lo tanto, χ es inyectivo. Así, la imagen de $R(G)$ en $\text{Class}(G)$ es el subanillo formado por las combinaciones lineales enteras de los caracteres irreducibles.

Por otro lado, los caracteres irreducibles $\chi_1, \dots, \chi_r$ forman una base del espacio vectorial $\text{Class}(G)$. En consecuencia, al extender escalares de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{C}$, se obtiene un isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R(G) \rightarrow \text{Class}(G), \quad \lambda \otimes [V] \mapsto \lambda \chi_V.$$

De manera equivalente, si $[V_1], \dots, [V_r]$ es la base de $R(G)$ dada por las representaciones irreducibles, entonces este isomorfismo envía $\lambda \otimes [V_i]$ a $\lambda \chi_i$.

En resumen, $R(G)$ puede identificarse con el anillo de funciones de clase que son combinaciones lineales enteras de los caracteres irreducibles, mientras que $\text{Class}(G)$ se obtiene permitiendo coeficientes complejos en esa misma base.

3.4. Representaciones invariantes bajo fusión

Las ideas expuestas en esta sección están motivadas por el trabajo desarrollado en [BC20]. A lo largo de esta sección, $\mathcal{F}$ denotará un sistema de fusión saturado sobre un p -grupo S .

Definición 3.4.1 (Representación invariante bajo fusión). Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Una representación compleja V de S se dice **invariante bajo fusión** si, para todo subgrupo $P \leq S$ y todo morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$, las representaciones $\text{res}_P^S V$ y $f^* \text{res}_{f(P)}^S V$ son isomorfas como representaciones de P .

Por la Proposición 3.3.2, dos representaciones complejas de grado finito son isomorfas si y solo si sus caracteres asociados son iguales. Por lo tanto, una representación V de S es invariante bajo fusión si y solo si $\chi_V(s) = \chi_V(f(s))$ para todo $P \leq S$, todo morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$ y todo $s \in P$.

Denotaremos por $\text{Rep}(\mathcal{F})$ al conjunto de clases de isomorfismo de representaciones invariantes bajo fusión. La suma directa y el producto tensorial de representaciones invariantes bajo fusión son nuevamente invariantes bajo fusión. Por lo cual, $\text{Rep}(\mathcal{F})$ tiene estructura de semianillo conmutativo.

Definición 3.4.2. Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . El **anillo de representaciones** de $\mathcal{F}$, denotado por $R(\mathcal{F})$, es la construcción de Grothendieck del semianillo $\text{Rep}(\mathcal{F})$.

De manera equivalente (véase [CCM20], Proposición 5.7), el anillo de representaciones de $\mathcal{F}$ se define como el subanillo de $R(S)$ formado por los elementos $\mathcal{F}$ -estables. Esto es,

$$R(\mathcal{F}) = \{x \in R(S) \mid \text{res}_P^S(x) = f^* \text{res}_Q^S(x) \text{ para todo } f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)\}.$$

Por la Proposición 5.7 de [CCM20], los elementos $\mathcal{F}$ -estables de $R(S)$ corresponden al límite

$$R(\mathcal{F}) \cong \varprojlim_{\mathcal{F}} R(P).$$

Sean U y V dos representaciones invariantes bajo fusión. Si $V \cong U \oplus W$ como representaciones de S , entonces W también es invariante bajo fusión. En efecto, $\chi_W = \chi_V - \chi_U$, y, como χ_V y χ_U son constantes en clases de $\mathcal{F}$ -conjugación, también lo es χ_W . De este modo, diremos que una representación V invariante bajo fusión es **irreducible** si no admite una descomposición $V \cong U \oplus W$ con U y W representaciones invariantes bajo fusión. Esta noción no coincide necesariamente con la irreducibilidad como representación de S , ya que una representación irreducible de $\mathcal{F}$ puede ser reducible como representación de S . En particular, la descomposición de $\mathcal{F}$ en irreducibles puede no ser única. Para un ejemplo de esta situación, véase la Proposición 4.2 de [CG24].

Sea $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ el conjunto de clases de $\mathcal{F}$ -conjugación de elementos de S . Denotaremos por $\text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \mathbb{C})$ al $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de funciones $S \rightarrow \mathbb{C}$ que son constantes en cada clase de $\mathcal{F}$ -conjugación. Si V es una representación de $\mathcal{F}$, entonces su carácter χ_V pertenece a $\text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \mathbb{C})$. Por lo tanto, el carácter induce un homomorfismo de anillos $\chi_{\mathcal{F}} : R(\mathcal{F}) \rightarrow \text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \mathbb{C})$. Al extender escalares a $\mathbb{C}$, se obtiene un homomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} R(\mathcal{F}) \rightarrow \text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \mathbb{C})$.

Lema 3.4.3 ([BC20], Lema 2.1). *La aplicación $\chi_{\mathcal{F}} : R(\mathcal{F}) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \mathbb{C})$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras.*

Demostración. Sea $\mathcal{X}_S$ el conjunto de clases de conjugación de elementos de S . Como toda clase de S -conjugación está contenida en una clase de $\mathcal{F}$ -conjugación, existe una aplicación natural sobreyectiva $r : \mathcal{X}_S \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$. Esta induce un homomorfismo inyectivo de $\mathbb{C}$ -álgebras $r^* : \text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Map}(\mathcal{X}_S, \mathbb{C})$ dado por $r^*(f) = f \circ r$. Además, la inclusión $R(\mathcal{F}) \subseteq R(S)$ induce un homomorfismo $j : R(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow R(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Con estas aplicaciones se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R(\mathcal{F}) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\chi_{\mathcal{F}}} & \text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \mathbb{C}) \\ \downarrow j & & \downarrow r^* \\ R(S) \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\chi_S} & \text{Map}(\mathcal{X}_S, \mathbb{C}) \end{array}$$

Veamos primero que $\chi_{\mathcal{F}}$ es inyectiva. Si $z \in R(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ satisface $\chi_{\mathcal{F}}(z) = 0$, entonces por la conmutatividad del diagrama se tiene $\chi_S(j(z)) = r^*(\chi_{\mathcal{F}}(z)) = 0$. Como χ_S es inyectiva, se sigue que $j(z) = 0$. Puesto que j es inyectiva, concluimos que $z = 0$.

Ahora probemos que $\chi_{\mathcal{F}}$ es sobreyectiva. Sea $f \in \text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \mathbb{C})$. Entonces $r^*f \in \text{Map}(X_S, \mathbb{C})$. Como χ_S es sobreyectiva, existe $z \in R(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ tal que $\chi_S(z) = r^*f$. Observemos que la función r^*f es constante en clases de $\mathcal{F}$ -conjugación, por lo que el elemento z pertenece a la imagen de $R(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \rightarrow R(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. En efecto, como $R(\mathcal{F}) \cong \varprojlim_{\mathcal{F}} R(P)$ y $\mathbb{C}$ es plano sobre $\mathbb{Z}$, se obtiene

$$R(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong \varprojlim_{\mathcal{F}} (R(P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}).$$

Por lo tanto, existe $z' \in R(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ tal que $j(z') = z$. De nuevo por la conmutatividad del diagrama,

$$r^*(\chi_{\mathcal{F}}(z')) = \chi_S(j(z')) = \chi_S(z) = r^*f.$$

Como r^* es inyectiva, se sigue que $\chi_{\mathcal{F}}(z') = f$. Luego $\chi_{\mathcal{F}}$ es sobreyectiva. Por lo tanto, $\chi_{\mathcal{F}}$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras. $\square$

Por el Teorema 3.2.3, $R(S)$ es un $\mathbb{Z}$ -módulo libre de rango finito. Como $R(\mathcal{F})$ es un subgrupo de $R(S)$, se sigue que $R(\mathcal{F})$ también es un grupo abeliano libre.

Corolario 3.4.4. *El rango de $R(\mathcal{F})$ como grupo abeliano libre es igual al número de clases de $\mathcal{F}$ -conjugación de elementos de S .*

Demostración. Por el Lema 3.4.3, se tiene un isomorfismo de $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales $R(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong \text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \mathbb{C})$. Por lo tanto,

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} R(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} (R(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \mathbb{C}).$$

Como $\text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, \mathbb{C})$ es el espacio de funciones sobre $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$, su dimensión es $|\mathcal{X}_{\mathcal{F}}|$. En consecuencia, $\text{rank}_{\mathbb{Z}} R(\mathcal{F}) = |\mathcal{X}_{\mathcal{F}}|$. $\square$

3.5. Ideales primos del anillo de representaciones

Sea S un grupo finito de orden m , y sea $\omega = e^{2\pi i/m}$ una raíz m -ésima de la unidad. Denotaremos por $A = \mathbb{Z}[\omega]$ al anillo generado por ω . Como los valores de los caracteres de S son sumas de raíces de la unidad de orden divisor de m , todo carácter de S toma valores en A .

Sea $R_A(S) := R(S) \otimes_{\mathbb{Z}} A$. Si $\chi_1, \dots, \chi_r$ son los caracteres irreducibles de S , entonces, por el Teorema 3.2.3,

$$R(S) \cong \mathbb{Z}\chi_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\chi_r$$

como $\mathbb{Z}$ -módulo. Por lo tanto, $R_A(S) \cong A\chi_1 \oplus \cdots \oplus A\chi_r$ como A -módulo.

Si $\mathcal{X}_S$ es el conjunto de clases de conjugación de elementos de S , entonces $\text{Map}(\mathcal{X}_S, A)$ es el anillo de funciones de clase en S con valores en A , con las operaciones puntuales. La inclusión de $R_A(S)$ en las funciones de clase permite considerar $R_A(S) \subseteq \text{Map}(\mathcal{X}_S, A)$. Además, se tienen inclusiones naturales

$$\mathbb{Z} \subseteq R(S) \subseteq R_A(S) \subseteq \text{Map}(\mathcal{X}_S, A).$$

Estas inclusiones inducen morfismos entre los espectros primos correspondientes, en sentido contravariante.

Recordemos ahora la descripción de M. Atiyah de los ideales primos de $R_A(S)$ dada en [Ati61]. Si $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ y $x \in \mathcal{X}_S$, entonces $I_{\mathfrak{p},x} := \{f \in \text{Map}(X_S, A) \mid f(x) \in \mathfrak{p}\}$ es un ideal primo de $\text{Map}(X_S, A)$. Más aún, todo ideal primo de $\text{Map}(X_S, A)$ es de esta forma. La Proposición 6.4 de [Ati61] muestra que todo ideal primo de $R_A(S)$ se obtiene por restricción de uno de estos ideales. Es decir, los ideales primos de $R_A(S)$ son de la forma

$$I_{\mathfrak{p},x}^A := R_A(S) \cap I_{\mathfrak{p},x} = \{\chi \in R_A(S) \mid \chi(x) \in \mathfrak{p}\}.$$

Con esta motivación, estudiaremos ahora los ideales primos del anillo de representaciones de un sistema de fusión. Para ello, seguiremos las ideas de [BC20].

Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Definimos $R_A(\mathcal{F}) := R(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$. Por medio del carácter, podemos considerar $R_A(\mathcal{F})$ como un subanillo de $\text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, A)$. Así, se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.5.1 ([BC20], Lema 2.3). *Todo ideal primo de $R_A(\mathcal{F})$ es la restricción de un ideal primo de $\text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, A)$. Además, todo ideal primo de $R(\mathcal{F})$ es la restricción de un ideal primo de $R_A(\mathcal{F})$.*

Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A y $x \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$. Entonces el conjunto $\{f \in \text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, A) \mid f(x) \in \mathfrak{p}\}$ es un ideal primo de $\text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, A)$, y todo ideal primo es de esta forma. Sea

$$I_{\mathfrak{p},x} := R_A(\mathcal{F}) \cap \{f \in \text{Map}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}}, A) \mid f(x) \in \mathfrak{p}\}.$$

Entonces, por el Lema 3.5.1, todo ideal primo de $R_A(\mathcal{F})$ es de esta forma. Observemos que si $\mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle$, entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de A . En este caso, $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = q(\mathfrak{p})\mathbb{Z}$ para algún número primo $q(\mathfrak{p})$, y el cociente $A/\mathfrak{p}$ es un campo finito de característica $q(\mathfrak{p})$.

Lema 3.5.2 ([BC20], Lema 2.4). *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Si $\mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle$ es un ideal primo de $\text{Map}(X_{\mathcal{F}}, A)$ y $q(\mathfrak{p}) = p$, entonces $\chi(s) = \chi(1)$, para todo $\chi \in R_A(\mathcal{F})$ y $s \in S$.*

Este resultado se deduce del Lema 6.3 de [Ati61]; una demostración detallada puede consultarse en [BC20], Lema 2.4.

Dado $x \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$, definimos

$$x_{\mathfrak{p}} := \begin{cases} 1, & \text{si } \mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle \text{ y } q(\mathfrak{p}) = p, \\ x, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde 1 denota la clase de $\mathcal{F}$ -conjugación del elemento identidad. Con esta notación, por el lema anterior se tiene $\chi(x) \equiv \chi(x_{\mathfrak{p}}) \pmod{\mathfrak{p}}$ [BC20]. Luego se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.5.3 ([BC20], Lema 2.5). *Sean $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \text{Spec}(A)$, y $x, y \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$. Entonces $I_{\mathfrak{p},x} \subseteq I_{\mathfrak{q},y}$ si y solo si $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ y $x_{\mathfrak{p}} = y_{\mathfrak{q}}$.*

Demostración. Supongamos primero que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ y $x_{\mathfrak{p}} = y_{\mathfrak{q}}$. Sea $\chi \in I_{\mathfrak{p},x}$. Entonces $\chi(x) \in \mathfrak{p}$, y por tanto $\chi(x) \in \mathfrak{q}$. Como $\chi(x) \equiv \chi(x_{\mathfrak{p}}) \pmod{\mathfrak{p}}$, se sigue que $\chi(x_{\mathfrak{p}}) \in \mathfrak{p}$. Dado que $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ y $x_{\mathfrak{p}} = y_{\mathfrak{q}}$, se tiene $\chi(y_{\mathfrak{q}}) = \chi(x_{\mathfrak{p}}) \in \mathfrak{q}$. Aplicando la congruencia anterior al ideal $\mathfrak{q}$, se tiene $\chi(y) \equiv \chi(y_{\mathfrak{q}}) \pmod{\mathfrak{q}}$. Por lo tanto, $\chi(y) \in \mathfrak{q}$. Luego $\chi \in I_{\mathfrak{q},y}$, y $I_{\mathfrak{p},x} \subseteq I_{\mathfrak{q},y}$.

Por otra parte, supongamos que $I_{\mathfrak{p},x} \subseteq I_{\mathfrak{q},y}$. Al intersectar estos ideales con A , se tiene $\mathfrak{p} = I_{\mathfrak{p},x} \cap A$ y $\mathfrak{q} = I_{\mathfrak{q},y} \cap A$. Así, es suficiente probar que $x_{\mathfrak{p}} = y_{\mathfrak{q}}$. Supongamos que $x_{\mathfrak{p}} \neq y_{\mathfrak{q}}$. Por la construcción hecha en el Lema 2.5 de [BC20], existe un carácter $\chi \in R_A(\mathcal{F})$ tal que $\chi(x_{\mathfrak{p}}) \in \mathfrak{p}$ y $\chi(y_{\mathfrak{q}}) \notin \mathfrak{q}$. Ya que $\chi(x) \equiv \chi(x_{\mathfrak{p}}) \pmod{\mathfrak{p}}$ y $\chi(y) \equiv \chi(y_{\mathfrak{q}}) \pmod{\mathfrak{q}}$, se obtiene que $\chi(x) \in \mathfrak{p}$ y $\chi(y) \in \mathfrak{q}$. Esto es, $\chi \in I_{\mathfrak{p},x}$ pero $\chi \notin I_{\mathfrak{q},y}$, lo cual contradice la inclusión $I_{\mathfrak{p},x} \subseteq I_{\mathfrak{q},y}$. Por lo tanto, $x_{\mathfrak{p}} = y_{\mathfrak{q}}$. $\square$

Proposición 3.5.4 ([BC20], Proposición 2.6). *Los ideales primos de $R_A(\mathcal{F})$ son de la forma $I_{\mathfrak{p},x}$. Además, se tiene lo siguiente.*

- i) *Dos ideales $I_{\mathfrak{p},x}$ e $I_{\mathfrak{q},y}$ coinciden si y solo si $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ y $x_{\mathfrak{p}} = y_{\mathfrak{q}}$.*
- ii) *Si $\mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle$, entonces $I_{\mathfrak{p},x}$ es un ideal maximal.*
- iii) *El ideal $I_{\langle 0 \rangle, x}$ es un ideal primo minimal.*
- iv) *Los ideales maximales que contienen a $I_{\langle 0 \rangle, x}$ son los ideales $I_{\mathfrak{p},x}$, con $\mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle$.*
- v) *Los ideales primos minimales contenidos en $I_{\mathfrak{p},x}$, con $\mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle$, son los ideales $I_{\langle 0 \rangle, y}$ tales que $x_{\mathfrak{p}} = y$.*

Corolario 3.5.5 ([BC20], Corolario 2.7). *Los espectros primos $\text{Spec}(R_A(\mathcal{F}))$ y $\text{Spec}(R(\mathcal{F}))$ son conexos en la topología de Zariski.*

Demostración. La conexidad de $\text{Spec}(R_A(\mathcal{F}))$ se sigue de la Proposición 3.5.4. En efecto, los ideales primos minimales de $R_A(\mathcal{F})$ son los ideales $I_{\langle 0 \rangle, x}$, con $x \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$. Por otro lado, si $\mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle$ y $q(\mathfrak{p}) = p$, entonces $x_{\mathfrak{p}} = 1$ para todo $x \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$. En particular, los ideales $I_{\mathfrak{p}, x}$ coinciden con $I_{\mathfrak{p}, 1}$. Por la proposición anterior, este ideal maximal contiene a todos los ideales primos minimales. Así, los cerrados irreducibles $V(I_{\langle 0 \rangle, x})$, donde $x \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$, tienen intersección no vacía, pues todos contienen a $I_{\mathfrak{p}, 1}$. Como todo ideal primo contiene un ideal primo minimal, se tiene

$$\text{Spec}(R_A(\mathcal{F})) = \bigcup_{x \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}} V(I_{\langle 0 \rangle, x}).$$

Por lo tanto, $\text{Spec}(R_A(\mathcal{F}))$ es conexo.

Por otro lado, la inclusión natural $R(\mathcal{F}) \hookrightarrow R_A(\mathcal{F})$ induce una aplicación continua $\text{Spec}(R_A(\mathcal{F})) \rightarrow \text{Spec}(R(\mathcal{F}))$. Por el Lema 3.5.1, todo ideal primo de $R(\mathcal{F})$ es la restricción de un ideal primo de $R_A(\mathcal{F})$. Por lo tanto, la aplicación anterior es sobreyectiva. Como la imagen continua de un espacio conexo es conexa, se concluye que $\text{Spec}(R(\mathcal{F}))$ también es conexo. $\square$

Como consecuencia de lo anterior, $R(\mathcal{F})$ no tiene idempotentes primitivos no triviales. Esto permite distinguir el anillo $R(\mathcal{F})$ del anillo de representaciones $R(G)$, que en general puede tener idempotentes no triviales (véase [CR66], Sección 26.1).

3.6. Teorema de completación de Atiyah en grupos p -locales finitos

Para concluir este capítulo, dedicaremos esta sección al teorema de completación, propuesto y demostrado por M. Atiyah en [Ati61] para el caso de grupos finitos, así como al caso de grupos p -locales finitos, demostrada por N. Bárcenas y J. Cantarero en [BC20].

Sea G un grupo finito. El espacio clasificante BG de G tiene estructura de CW-complejo de dimensión infinita en la que todos sus n -esqueletos $B^n G$ son finitos. Consideremos la filtración $B^0 G \subseteq B^1 G \subseteq \cdots \subseteq B^n G \subseteq \cdots \subseteq BG$. Por la sucesión exacta de Milnor asociada a esta filtración, se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n K^{-1}(B^n G) \longrightarrow K(BG) \longrightarrow \varprojlim_n K(B^n G) \longrightarrow 0.$$

Como el sistema inverso $K^{-1}(B^n G)_{n \geq 0}$ satisface la condición de Mittag-Leffler, se tiene $\varprojlim_n K^{-1}(B^n G) = 0$. Por lo tanto,

$$K(BG) \cong \varprojlim_n K(B^n G).$$

Sea V una representación compleja de G de grado finito. Consideremos el espacio $E^n G \times_G V = (E^n G \times V)/G$, donde el cociente se toma respecto de la acción de G sobre $E^n G \times V$ dada por

$$g \cdot \left(\sum t_l g_l, v \right) := \left(\sum t_l g_l g^{-1}, gv \right).$$

Definimos $\alpha_G^n : R(G) \rightarrow K(B^n G)$ como $\alpha_G^n([V]) = [E^n G \times_G V]$. Este morfismo es tal que para toda n el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} R(G) & \xrightarrow{\alpha_G^{n-1}} & K(B^{n-1}G) \\ \alpha_G^n \downarrow & \nearrow \iota^* & \\ K(B^n G) & & \end{array}$$

De esta manera, se obtiene un morfismo $\alpha_G : R(G) \rightarrow K(BG)$.

El **ideal de aumentación** de $R(G)$, denotado por I_G , se define como el núcleo de la aplicación $\varepsilon : R(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ que envía cada representación a su dimensión. Al dotar a $R(G)$ con la topología I_G -ádica y a $K(BG)$ con la topología del límite, se tiene que α_G se extiende a un morfismo entre las completaciones $R(G)_{I_G}^\wedge$ y $K(BG)^\wedge$.

Teorema 3.6.1 (Teorema de completación de Atiyah–Segal, [Ati61]). *Sea G un grupo finito. Entonces, el homomorfismo $\alpha_G : R(G) \rightarrow K(BG)$ induce un isomorfismo de anillos topológicos $\alpha_G^\wedge : R(G)_{I_G}^\wedge \rightarrow K(BG)^\wedge$.*

Dado que $K(BG)$ es completo respecto a la topología del límite, se tiene $K(BG)^\wedge = K(BG)$.

Teorema de completación para grupos p -locales finitos

Para demostrar el teorema de completación de Atiyah para grupos p -locales finitos, primero compararemos la topología $I_{\mathcal{F}}$ -ádica con la topología I_S -ádica inducida por el morfismo de restricción. En lo que sigue, $\mathcal{F}$ denotará un sistema de fusión saturado sobre un p -grupo S .

El morfismo de aumentación de $R(\mathcal{F})$ es el homomorfismo de anillos $\varepsilon_{\mathcal{F}} : R(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{Z}$ definido por $\varepsilon_{\mathcal{F}}([V] - [W]) = \dim(V) - \dim(W)$. El **ideal de aumentación** de $R(\mathcal{F})$ se define como $I_{\mathcal{F}} := \text{Ker}(\varepsilon_{\mathcal{F}})$.

Lema 3.6.2 ([BC20], Lema 2.8). *El ideal $I_{\langle 0 \rangle, 1}$ coincide con $I_{\mathcal{F}} \otimes A$.*

La demostración es análoga al caso clásico para anillos de representaciones de grupos finitos; véase también [Ati61], Lema 6.5.

Sea $\mathcal{X}_S$ el conjunto de clases de conjugación de elementos de S . Para $y \in \mathcal{X}_S$ y $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, definimos $I'_{\mathfrak{p}, y} := \{\chi \in R_A(S) \mid \chi(y) \in \mathfrak{p}\}$. Denotemos por $\text{res} : R_A(\mathcal{F}) \rightarrow R_A(S)$ al homomorfismo inducido por la restricción. Entonces, se tiene el siguiente resultado.

Lema 3.6.3 ([BC20], Lema 2.9). *Si $\text{res}^{-1}(I'_{\mathfrak{p},y}) = I_{\mathfrak{q},1}$, entonces $I'_{\mathfrak{p},y} = I'_{\mathfrak{q},1}$.*

Este resultado es el análogo, en el contexto de sistemas de fusión, del Lema 6.6 de [Ati61], y su demostración es inmediata.

Proposición 3.6.4 ([BC20], Lema 2.10). *Sea I un ideal primo de $R(S)$. Entonces I contiene a $\text{res}(I_{\mathcal{F}})$ si y solo si contiene al ideal de aumentación I_S de $R(S)$.*

Demostración. Como la restricción preserva la dimensión virtual, se tiene $\text{res}(I_{\mathcal{F}}) \subseteq I_S$. Por lo tanto, si I contiene a I_S , entonces también contiene a $\text{res}(I_{\mathcal{F}})$.

Por otra parte, supongamos que I contiene a $\text{res}(I_{\mathcal{F}})$. Por la descripción de los ideales primos de $R(S)$, existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A y $y \in \mathcal{X}_S$ tal que $I = R(S) \cap I_{\mathfrak{p},y}$. Como $\text{res}(I_{\mathcal{F}}) \subseteq I$, al extender escalares a A obtenemos $\text{res}(A \otimes I_{\mathcal{F}}) \subseteq I'_{\mathfrak{p},y}$. Por el Lema 3.6.2, $I_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathbb{Z}} A = I_{\langle 0 \rangle,1}$; luego $\text{res}(I_{\langle 0 \rangle,1}) = I'_{\mathfrak{p},y}$. Por lo tanto, $I_{\langle 0 \rangle,1} \subseteq \text{res}^{-1}(I'_{\mathfrak{p},y})$. Notemos que el ideal $\text{res}^{-1}(I'_{\mathfrak{p},y})$ es un ideal primo de $R_A(\mathcal{F})$. Por la descripción de los ideales primos de $R_A(\mathcal{F})$, y dado que contiene a $I_{\langle 0 \rangle,1}$, existe un ideal primo $\mathfrak{q}$ de A tal que $\text{res}^{-1}(I'_{\mathfrak{p},y}) = I_{\mathfrak{q},1}$. Luego, por el Lema 3.6.3, se sigue que $I'_{\mathfrak{p},y} = I'_{\mathfrak{q},1}$. Consideremos $\chi \in I_S$. Entonces $\chi(1) = 0$, pues I_S es el ideal de aumentación de $R(S)$. En particular, $\chi(1) \in \mathfrak{q}$, y por tanto $\chi \in I'_{\mathfrak{q},1} = I'_{\mathfrak{p},y}$. Como además $\chi \in R(S)$, se sigue que $\chi \in R(S) \cap I'_{\mathfrak{q},1} = I'_{\mathfrak{p},y} = I$. En consecuencia, $I_S \subseteq I$. $\square$

Teorema 3.6.5. *La topología I_S -ádica de $R(S)$ coincide, vía el morfismo de restricción $\text{res} : R(\mathcal{F}) \rightarrow R(S)$, con la topología inducida por el ideal $I_{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Por la Proposición 3.6.4, los ideales primos de $R(S)$ que contienen a $\text{res}(I_{\mathcal{F}})$ son exactamente los ideales primos que contienen a I_S . Por lo tanto, $\sqrt{\text{res}(I_{\mathcal{F}})} = \sqrt{I_S}$. Como $R(S)$ es noetheriano, las topologías definidas por dos ideales con el mismo radical coinciden [ZS13]. En consecuencia, la topología inducida por $\text{res}(I_{\mathcal{F}})$ coincide con la topología I_S -ádica de $R(S)$. $\square$

Teorema 3.6.6 (Teorema de completación). *Sea $(S, \mathcal{F}, \mathcal{L})$ un grupo p -local finito. Entonces existe un isomorfismo $R(\mathcal{F})_{I_{\mathcal{F}}}^{\wedge} \rightarrow K(|\mathcal{L}|_p^{\wedge})$ de anillos.*

La demostración es análoga a la del Teorema 2.6.8. La demostración detallada puede consultarse en [BC20], Teorema 3.1.

Capítulo 4

Anillo global de representaciones de grupos finitos y sistemas de fusión

En este capítulo se define el anillo global de representaciones de un sistema de fusión y se estudian las propiedades análogas a las que satisface el anillo global de representaciones de un grupo finito. Comenzaremos estudiando las representaciones globales de un grupo finito y su anillo global de representaciones, así como algunas de sus propiedades elementales. Para esto, seguiremos las ideas expuestas en [RV15].

4.1. Monoide de representaciones globales

Definición 4.1.1 (Representación global). Sea G un grupo finito y X un G -conjunto finito. Una **representación global** de G consiste en un $\mathbb{C}G$ -módulo V junto con una familia $\{V_x\}_{x \in X}$ de subespacios vectoriales de V tal que

$$V = \bigoplus_{x \in X} V_x$$

es una descomposición en suma directa y, además, para todo $g \in G$ y $x \in X$ se cumple que $g \cdot V_x = V_{gx}$. En este caso, se dice que el $\mathbb{C}G$ -módulo V es X -graduado.

Una representación global de G se puede expresar mediante una pareja (X, V) , donde X es un G -conjunto y V es un $\mathbb{C}G$ -módulo X -graduado, lo cual es consistente con la definición de [RV15].

Ejemplo 4.1.2. Sea G un grupo finito y $H \leq G$. Si W es un $\mathbb{C}H$ -módulo, definimos $G \times_H W := G \times W / \sim$, donde $(gh, w) \sim (g, h \cdot w)$ para todo $g \in G$, $h \in H$ y $w \in W$.

Se verifica fácilmente que $G \times_H W$ es un $\mathbb{C}G$ -módulo. Además,

$$G \times_H W = \bigoplus_{gH \in G/H} (G \times_H W)_{gH},$$

donde $(G \times_H W)_{gH} := \{[g, w] \mid w \in W\}$, y para todo $a \in G$ se cumple $a \cdot (G \times_H W)_{gH} = (G \times_H W)_{agH}$. Por lo tanto, $G \times_H W$ es un $\mathbb{C}G$ -módulo G/H -graduado, y la pareja $(G/H, G \times_H W)$ es una representación global de G .

Definición 4.1.3 (Homomorfismos e isomorfismos de representaciones globales). Sea G un grupo finito y sean (X, V) y (Y, W) dos representaciones globales de G . Un **homomorfismo** de (X, V) a (Y, W) es una pareja (α, φ) , donde $\alpha : X \rightarrow Y$ es una función G -equivariante y $\varphi : V \rightarrow W$ es un homomorfismo de $\mathbb{C}G$ -módulos tal que $\varphi(V_x) \subset W_{\alpha(x)}$ para todo $x \in X$. Si además $\alpha : X \rightarrow Y$ es biyectiva y $\varphi : V \rightarrow W$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}G$ -módulos, diremos entonces que (α, φ) es un **isomorfismo** entre (X, V) y (Y, W) . En caso de que exista un isomorfismo entre dos representaciones globales, diremos que estas son isomorfas.

La relación “ser una representación global isomorfa a” define una relación de equivalencia en el conjunto de representaciones globales de G . La clase de isomorfismo de una representación global (X, V) será denotada por $[(X, V)]$. Así,

$$\text{glRep}(G) := \{[(X, V)] \mid (X, V) \text{ es una representación global de } G\},$$

denota el conjunto de clases de isomorfismo de representaciones globales de G .

Sea $V = \bigoplus_{x \in X} V_x$ un $\mathbb{C}G$ -módulo X -graduado, y sea $W = \bigoplus_{y \in Y} W_y$ un $\mathbb{C}G$ -módulo Y -graduado. Definimos la **suma directa externa** de V con W como

$$V \boxplus W := \bigoplus_{x \in X} V_x \oplus \bigoplus_{y \in Y} W_y = \bigoplus_{z \in X \amalg Y} (V \boxplus W)_z,$$

donde

$$(V \boxplus W)_z = \begin{cases} V_z, & \text{si } z \in X, \\ W_z, & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

Si $g \in G$ y $z \in X \amalg Y$, entonces $g \cdot (V \boxplus W)_z = (V \boxplus W)_{gz}$, que coincide con V_{gz} cuando $z \in X$, y con W_{gz} cuando $z \in Y$. De este modo, $V \boxplus W$ es un $\mathbb{C}G$ -módulo $X \amalg Y$ -graduado. Por lo tanto, $(X \amalg Y, V \boxplus W)$ es una representación global de G .

Sean $[(X, V)], [(Y, W)] \in \text{glRep}(G)$. La suma de estas dos clases está dada por

$$[(X, V)] + [(Y, W)] := [(X \amalg Y, V \boxplus W)]. \quad (4.1)$$

A continuación, veremos que esta operación está bien definida, lo cual quiere decir que es independiente de la elección del representante de cada clase de isomorfismo. Consideremos (X, V) , (X', V') , (Y, W) y (Y', W') representaciones globales de G tales que $(X, V) \cong (X', V')$ y $(Y, W) \cong (Y', W')$. Entonces, existen isomorfismos $(\alpha, \varphi) : (X, V) \rightarrow (X', V')$ y $(\beta, \psi) : (Y, W) \rightarrow (Y', W')$ que satisfacen

$$\varphi(V_x) \subseteq V'_{\alpha(x)}, \quad \psi(W_y) \subseteq W'_{\beta(y)}.$$

Dado que α y β son funciones biyectivas G -equivariantes, la función $\alpha \amalg \beta : X \amalg Y \rightarrow X' \amalg Y'$ inducida en la unión disjunta también es una biyección G -equivariante. Análogamente, $\varphi \boxplus \psi : V \boxplus W \rightarrow V' \boxplus W'$ también es un isomorfismo de $\mathbb{C}G$ -módulos porque φ y ψ lo son. Además, $\varphi \boxplus \psi$ respeta la graduación de la graduación. En efecto, si $z \in X$, entonces $(V \boxplus W)_z = V_z$ y $(\alpha \amalg \beta)(z) = \alpha(z)$. Por lo tanto,

$$(\varphi \boxplus \psi)((V \boxplus W)_z) = \varphi(V_z) = V'_{\alpha(z)} = (V' \boxplus W')_{(\alpha \amalg \beta)(z)}.$$

De manera análoga, si $z \in Y$, entonces $(V \boxplus W)_z = W_z$ y $(\alpha \amalg \beta)(z) = \beta(z)$, de donde

$$(\varphi \boxplus \psi)((V \boxplus W)_z) = \psi(W_z) = W'_{\beta(z)} = (V' \boxplus W')_{(\alpha \amalg \beta)(z)}.$$

De lo anterior se tiene que $(\alpha \amalg \beta, \varphi \boxplus \psi)$ es un isomorfismo de representaciones globales. Por lo tanto, $[(X \amalg Y, V \boxplus W)] = [(X' \amalg Y', V' \boxplus W')]$ y la operación está bien definida.

Proposición 4.1.4. *Sea G un grupo finito. Entonces $(\text{glRep}(G), +)$ es un monoide conmutativo.*

Demostración. Por la asociatividad y conmutatividad de la unión disjunta de conjuntos y de la suma directa de $\mathbb{C}G$ -módulos, se sigue que la operación $+$ es asociativa y conmutativa. Además, $[(\emptyset, 0)]$ es el elemento neutro de $\text{glRep}(G)$, ya que

$$[(X, V)] + [(\emptyset, 0)] = [(X \amalg \emptyset, V \boxplus 0)] = [(X, V)]$$

para toda $[(X, V)] \in \text{glRep}(G)$. Así, se concluye que $(\text{glRep}(G), +)$ es un monoide conmutativo. $\square$

El principal resultado de esta sección establece que el monoide $\text{glRep}(G)$ de representaciones globales es libre. Demostraremos este hecho probando que dicho monoide es de factorización única, ya que un monoide es libre si y solo si posee esta propiedad (véase [GH06], Teorema 1.2.9). Para ello, es necesario introducir algunos conceptos y resultados preliminares.

Definición 4.1.5. Sea M un monoide conmutativo.

1. Se dice que M es **reducido** si su único elemento invertible es el 0.
2. Un elemento $a \in M$ distinto de cero es un **átomo** si $a = b + c$ implica $b = 0$ ó $c = 0$.
3. El monoide M es **atómico** si es reducido y es generado por su conjunto de átomos.
4. Se dice que el monoide M es de **factorización única** si es atómico, y cada elemento distinto de cero se expresa de manera única como suma de sus átomos.

Proposición 4.1.6. *El monoide conmutativo $(\text{glRep}(G), +)$ es reducido.*

Demostración. Supongamos que $[(X, V)] \in \text{glRep}(G)$ es un elemento invertible, entonces existe $[(Y, W)] \in \text{glRep}(G)$ tal que $[(X, V)] + [(Y, W)] = [(\emptyset, 0)]$. Luego $(\alpha, \varphi) : (X \amalg Y, V \boxplus W) \rightarrow (\emptyset, 0)$ es un isomorfismo de representaciones globales. Como $\alpha : X \amalg Y \rightarrow \emptyset$ es una función biyectiva, se tiene que $X \amalg Y = \emptyset$; así, X y Y son el conjunto vacío. En consecuencia,

$$V = \bigoplus_{x \in X} V_x = 0, \quad W = \bigoplus_{y \in Y} W_y = 0, \quad V \boxplus W = 0,$$

y $[(X, V)] = [(\emptyset, 0)]$. De la arbitrariedad de $[(X, V)] \in \text{glRep}(G)$ se sigue que todo elemento invertible es el elemento neutro de $\text{glRep}(G)$. Por lo tanto, $\text{glRep}(G)$ es reducido. $\square$

A continuación, se muestran explícitamente los átomos del monoide $\text{glRep}(G)$.

Teorema 4.1.7. *El elemento $[(X, V)] \in \text{glRep}(G)$ es un átomo si y solo si $[(X, V)] = [(G/H, G \times_H W)]$ para algún subgrupo $H \leq G$ y alguna representación W de H .*

Antes de dar la demostración, introducimos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 4.1.8. *Si $[(X, V)] \in \text{glRep}(G)$ es un átomo, entonces X es un G -conjunto transitivo.*

Demostración. Supongamos que $[(X, V)] \in \text{glRep}(G)$ es un átomo y es tal que X no es transitivo. Entonces existen dos G -conjuntos Y y Z no vacíos tales que $X = Y \amalg Z$. Sean

$$W_1 := \bigoplus_{x \in Y} V_x \quad \text{y} \quad W_2 := \bigoplus_{x \in Z} V_x,$$

que son dos $\mathbb{C}G$ -módulos graduados por Y y Z , respectivamente. Observemos que para todo $g \in G$ y $x \in Y$ se cumple

$$g \cdot (W_1)_x = g \cdot V_x = V_{g \cdot x} = (W_1)_{g \cdot x}, \quad x \in Y.$$

De manera análoga se cumple para W_2 . En consecuencia, (Y, W_1) y (Z, W_2) son representaciones globales de G . Luego, por construcción,

$$[(X, V)] = [(Y, W_1)] + [(Z, W_2)].$$

Así que $[(X, V)]$ no es átomo. De esta manera, concluimos que X es transitivo. $\square$

Demostración. (Teorema 4.1.7) Supongamos que $[(X, V)]$ es un átomo. Entonces, por el Lema 4.1.8, X es un G -conjunto transitivo. Por la Proposición 2.1.6, existe un subgrupo $H \leq G$ y un isomorfismo G -equivariante $\alpha : G/H \rightarrow X$. Sea $x_0 = \alpha(H)$ y sea $W := V_{x_0}$. Si $h \in H$, entonces

$$hW = hV_{x_0} = V_{hx_0} = V_{x_0} = W,$$

pues $h \in H = G_{x_0}$. Por lo tanto, W es estable bajo la acción de H y, en consecuencia, es un $\mathbb{C}H$ -módulo. Consideremos ahora la representación global $(G/H, G \times_H W)$ del Ejemplo 4.1.2. Definimos la aplicación $\Phi : G \times_H W \rightarrow V$ como $\Phi([g, w]) = gw$. Esta aplicación está bien definida, pues si $(gh, w) \sim (g, hw)$, entonces $\Phi([gh, w]) = ghw = \Phi([g, hw])$. Además, Φ es un isomorfismo de $\mathbb{C}G$ -módulos, ya que para cada $gH \in G/H$ se tiene

$$\Phi((G \times_H W)_{gH}) = gW = gV_{x_0} = V_{gx_0} = V_{\alpha(gH)}.$$

Por lo tanto, Φ respeta la graduación determinada por α . Así, $(\alpha, \Phi) : (G/H, G \times_H W) \rightarrow (X, V)$ es un isomorfismo de representaciones globales. De este modo, se tiene la igualdad $[(X, V)] = [(G/H, G \times_H W)]$

Recíprocamente, supongamos que $[(X, V)] = [(G/H, G \times_H W)]$ en $\text{glRep}(G)$, donde W es una representación de H , y supongamos que

$$[(G/H, G \times_H W)] = [(Y, W_1)] + [(Z, W_2)] = [(Y \amalg Z, W_1 \boxplus W_2)].$$

Entonces existe un isomorfismo de representaciones globales $(\alpha, \varphi) : (G/H, G \times_H W) \rightarrow (Y \amalg Z, W_1 \boxplus W_2)$. Como $\alpha : G/H \rightarrow Y \amalg Z$ es una biyección G -equivariante y G/H es un G -conjunto transitivo, se sigue que $Y \amalg Z$ es transitivo. Pero Y y Z son G -subconjuntos de $Y \amalg Z$; por lo tanto, si ambos fueran no vacíos, $Y \amalg Z$ no sería transitivo. Luego $Y = \emptyset$ ó $Z = \emptyset$. Si $Y = \emptyset$, entonces $W_1 = 0$ y $[(Y, W_1)] = [(\emptyset, 0)]$. Análogamente, si $Z = \emptyset$, entonces $[(Z, W_2)] = [(\emptyset, 0)]$. Por lo tanto, $[(G/H, G \times_H W)]$ es un átomo. Como $[(X, V)] = [(G/H, G \times_H W)]$, concluimos que $[(X, V)]$ es un átomo. $\square$

Teorema 4.1.9. *El monoide conmutativo $\text{glRep}(G)$ es de factorización única.*

Demostración. Primero probaremos que $\text{glRep}(G)$ es atómico. Sea (X, V) una representación global de G . Por la Proposición 2.1.7, el G -conjunto X se descompone como unión disjunta de sus órbitas, es decir,

$$X = \coprod_{i \in I} X_i,$$

donde cada X_i es un G -conjunto transitivo. Para cada $i \in I$, definimos $V^{(i)} := \bigoplus_{x \in X_i} V_x$. Por construcción,

$$V = \bigoplus_{i \in I} V^{(i)}.$$

Además, si $g \in G$ y $x \in X_i$, entonces $gx \in X_i$, pues X_i es una órbita. Por lo tanto, $g \cdot V_x = V_{gx} \subseteq V^{(i)}$. De esta manera, $(X_i, V^{(i)})$ es una representación global de G para todo $i \in I$. Luego

$$[(X, V)] = \sum_{i \in I} [(X_i, V^{(i)})]$$

en $\text{glRep}(G)$. Como cada X_i es transitivo, en la demostración del Teorema 4.1.7 se prueba que cada clase $[(X_i, V^{(i)})]$ es un átomo de $\text{glRep}(G)$. Así, todo elemento de $\text{glRep}(G)$ se expresa como suma de átomos. Dado que $\text{glRep}(G)$ es reducido, se concluye que es un monoide atómico.

Probemos ahora que cada elemento de $\text{glRep}(G)$ se expresa de manera única como suma de átomos. Sea $[(X, V)] \in \text{glRep}(G)$ un elemento no nulo. Supongamos que

$$[(X, V)] = \sum_{i=1}^r [(G/H_i, G \times_{H_i} W_i)], \quad [(X, V)] = \sum_{j=1}^s [(G/K_j, G \times_{K_j} U_j)]$$

son dos descomposiciones de $[(X, V)]$ en átomos. Entonces

$$(X, V) \cong \left(\prod_{i=1}^r G/H_i, \bigoplus_{i=1}^r G \times_{H_i} W_i \right) \cong \left(\prod_{j=1}^s G/K_j, \bigoplus_{j=1}^s G \times_{K_j} U_j \right)$$

como representaciones globales. En particular, existe una biyección G -equivariante

$$\alpha : \prod_{i=1}^r G/H_i \rightarrow \prod_{j=1}^s G/K_j.$$

Por el Corolario 2.1.9, la descomposición de un G -conjunto finito como unión disjunta de órbitas de la forma G/H es única salvo isomorfismo y reordenamiento. Por lo tanto, $r = s$ y, después de reordenar los índices si es necesario, se tiene que G/H_i y G/K_i son isomorfos como G -conjuntos para todo i . Además, la compatibilidad del isomorfismo de representaciones globales con las graduaciones implica que, al restringirlo a cada órbita, se obtienen isomorfismos

$$(G/H_i, G \times_{H_i} W_i) \cong (G/K_i, G \times_{K_i} U_i)$$

de representaciones globales. En consecuencia,

$$[(G/H_i, G \times_{H_i} W_i)] = [(G/K_i, G \times_{K_i} U_i)]$$

para todo i . Así, las dos descomposiciones de $[(X, V)]$ coinciden salvo reordenamiento de los sumandos. Como $[(X, V)]$ fue arbitrario, todo elemento no nulo de $\text{glRep}(G)$ se expresa de manera única como suma de átomos. Por lo tanto, $\text{glRep}(G)$ es un monoide de factorización única. $\square$

Proposición 4.1.10. *Sean $H, K \leq G$, y sean W y V representaciones de H y K , respectivamente. Entonces $(G/H, G \times_H W) \cong (G/K, G \times_K V)$ como representaciones globales de G si y solo si existe $g \in G$ tal que $K = {}^gH$ y $V \cong {}^gW$ como representaciones de K .*

Demostración. Supongamos primero que existe $g \in G$ tal que $K = {}^gH$ y $V \cong {}^gW$. Es claro que la aplicación $\alpha : G/H \rightarrow G/K$ dada por $\alpha(aH) = ag^{-1}K$ es un isomorfismo de G -conjuntos.

Consideremos $\theta : {}^gW \rightarrow V$ un isomorfismo de $\mathbb{C}K$ -módulos, y definamos $\varphi : G \times_H W \rightarrow G \times_K V$ como $\varphi([a, w]) = [ag^{-1}, \theta(w)]$. Si $h \in H$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi([ah, w]) &= [ahg^{-1}, \theta(w)] \\ &= [ag^{-1}(ghg^{-1}), \theta(w)] \\ &= [ag^{-1}, (ghg^{-1})\theta(w)] \\ &= [ag^{-1}, \theta(hw)] \\ &= \varphi([a, hw]), \end{aligned}$$

Por lo tanto, φ está bien definida. Además, es G -equivariante y, al ser θ un isomorfismo, también lo es φ . Finalmente, $\varphi((G \times_H W)_{aH}) = (G \times_K V)_{\alpha(aH)}$. Así, (α, φ) es un isomorfismo de representaciones globales.

Recíprocamente, supongamos que existe un isomorfismo $(\alpha, \varphi) : (G/H, G \times_H W) \rightarrow (G/K, G \times_K V)$ de representaciones globales. Como $\alpha : G/H \rightarrow G/K$ es un isomorfismo de G -conjuntos, existe $g \in G$ tal que $\alpha(H) = g^{-1}K$. La equivariancia de α implica que los subgrupos de isotropía de estos dos puntos coinciden. Por tanto,

$$H = G_H = G_{\alpha(H)} = G_{g^{-1}K} = g^{-1}Kg,$$

y, en consecuencia, $K = gHg^{-1} = {}^gH$.

Ahora, φ se restringe a un isomorfismo $\varphi_H : (G \times_H W)_H \rightarrow (G \times_K V)_{g^{-1}K}$, de tal modo que $\varphi_H([1, w]) = [g^{-1}, \theta(w)]$ para cierto isomorfismo lineal $\theta : W \rightarrow V$. De la G -equivarianza de φ se sigue que

$$\begin{aligned} [g^{-1}, \theta(hw)] &= \varphi_H([1, hw]) \\ &= \varphi_H(h[1, w]) \\ &= h\varphi_H([1, w]) \\ &= [hg^{-1}, \theta(w)] \\ &= [g^{-1}, (ghg^{-1})\theta(w)], \end{aligned}$$

para todo $h \in H$. Luego $\theta(hw) = (ghg^{-1})\theta(w)$. En consecuencia, $\theta : {}^gW \rightarrow V$ es un isomorfismo de representaciones de $K = {}^gH$. Por lo tanto, $V \cong {}^gW$. $\square$

Corolario 4.1.11. *El monoide $\text{glRep}(G)$ es libre. Más aún, una base está dada por las clases $[(G/H, G \times_H W)]$, donde H recorre un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G , y W recorre un conjunto de representantes de las órbitas de la acción de $N_G(H)$ sobre las clases de isomorfismo de representaciones de H .*

4.2. Anillo global de representaciones de un grupo finito

Iniciaremos esta sección mostrando que el monoide $\text{glRep}(G)$ de representaciones globales tiene estructura de semianillo. Para ello, primero definiremos el producto tensorial de dos representaciones globales.

Sean V un $\mathbb{C}G$ -módulo X -graduado y W un $\mathbb{C}G$ -módulo Y -graduado. El producto tensorial $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ tiene una acción de G dada en generadores por $g \cdot (v \otimes w) = (gv) \otimes (gw)$, para todo $g \in G$, $v \in V$ y $w \in W$. Con esta acción, $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ es un $\mathbb{C}G$ -módulo. Consideremos ahora la descomposición

$$V \otimes_{\mathbb{C}} W = \left(\bigoplus_{x \in X} V_x \right) \otimes_{\mathbb{C}} \left(\bigoplus_{y \in Y} W_y \right) = \bigoplus_{(x,y) \in X \times Y} V_x \otimes_{\mathbb{C}} W_y.$$

Para cada $(x, y) \in X \times Y$, definimos $(V \otimes_{\mathbb{C}} W)_{(x,y)} := V_x \otimes_{\mathbb{C}} W_y$. Entonces

$$V \otimes_{\mathbb{C}} W = \bigoplus_{(x,y) \in X \times Y} (V \otimes_{\mathbb{C}} W)_{(x,y)}.$$

Además, si $g \in G$, se tiene

$$g \cdot (V_x \otimes_{\mathbb{C}} W_y) = gV_x \otimes_{\mathbb{C}} gW_y = V_{gx} \otimes_{\mathbb{C}} W_{gy} = (V \otimes_{\mathbb{C}} W)_{(gx,gy)}.$$

En consecuencia, $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ es un $\mathbb{C}G$ -módulo $X \times Y$ -graduado y $(X \times Y, V \otimes_{\mathbb{C}} W)$ es una representación global de G .

La construcción anterior permite definir un producto en el monoide $\text{glRep}(G)$ dado por

$$[(X, V)] \cdot [(Y, W)] = [(X \times Y, V \otimes_{\mathbb{C}} W)], \quad (4.2)$$

el cual se verifica fácilmente que es una operación binaria bien definida. Además, este producto distribuye sobre la suma directa externa. Es decir, para cualesquiera tres elementos $[(X, V)]$, $[(Y, W)]$ y $[(Z, U)]$ de $\text{glRep}(G)$, se tiene

$$\begin{aligned} ([[(X, V)] + [(Y, W)]] \cdot [(Z, U)]) &= [(X \amalg Y, V \boxplus W)] \cdot [(Z, U)] \\ &= [((X \amalg Y) \times Z, (V \boxplus W) \otimes_{\mathbb{C}} U)] \\ &= [(X \times Z) \amalg (Y \times Z), (V \otimes_{\mathbb{C}} U) \boxplus (W \otimes_{\mathbb{C}} U)] \\ &= [X \times Z, V \otimes_{\mathbb{C}} U] + [Y \times Z, W \otimes_{\mathbb{C}} U] \\ &= ([[(X, V)] \cdot [(Z, U)]] + ([[(Y, W)] \cdot [(Z, U)]]). \end{aligned}$$

Análogamente, se tiene

$$[(Z, U)] \cdot [(X, V)] + [Y, W] = [(Z, U)] \cdot [(X, V)] + [(Z, U)] \cdot [(Y, W)].$$

En consecuencia, $\text{glRep}(G)$ es un semianillo conmutativo.

La construcción de Grothendieck de $\text{glRep}(G)$ es el anillo

$$T(G) := K(\text{glRep}(G)) = \frac{\mathbb{Z}[\text{glRep}(G)]}{\langle [(X, V)] + [(Y, W)] - [(X \amalg Y, V \boxplus W)] \rangle},$$

considerado en [RV15]. Por el Corolario 4.1.11, $\text{glRep}(G)$ es un monoide abeliano libre. Por lo tanto, $T(G) = K(\text{glRep}(G))$ es el grupo abeliano libre generado por la misma base de $\text{glRep}(G)$; es decir, por las clases $[(G/H, G \times_H W)]$, donde H y W se eligen como en el Corolario 4.1.11.

Ahora, procederemos a definir el anillo global de representaciones. Para esto consideremos la siguiente construcción. Para cualesquiera dos $\mathbb{C}G$ -módulos X -graduados V y W , definimos su **suma directa interna** por

$$V \oplus W = \bigoplus_{x \in X} V_x \oplus \bigoplus_{x \in X} W_x := \bigoplus_{x \in X} (V_x \oplus W_x).$$

Como V y W son $\mathbb{C}G$ -módulos X -graduados, $\bigoplus_{x \in X} (V_x \oplus W_x)$ es una descomposición de la suma directa interna $V \oplus W$. Además, la acción de cada $g \in G$ sobre la suma directa interna V con W cumple

$$g \cdot (V_x \oplus W_x) = g \cdot V_x \oplus g \cdot W_x = V_{gx} \oplus W_{gx}.$$

Así, $V \oplus W$ es un $\mathbb{C}G$ -módulo X -graduado y la pareja $(X, V \oplus W)$ es una representación global de G .

Sea $\mathcal{L}_G$ el conjunto de ternas (X, V, W) , donde X es un G -conjunto finito y V, W son $\mathbb{C}G$ -módulos X -graduados. Cada terna $(X, V, W) \in \mathcal{L}_G$ determina un elemento $[(X, V \oplus W)] - [(X, V)] - [(X, W)]$ de $T(G)$. Denotemos por I_G el ideal de $T(G)$ generado por todos estos elementos.

Definición 4.2.1 (Anillo global de representaciones). Sea G un grupo finito. El **anillo global de representaciones** de G es el cociente

$$D(G) := \frac{T(G)}{I_G}.$$

Si $H \leq G$ y W es una representación de H , denotaremos por $[H, W]$ la clase en $D(G)$ de la representación global $(G/H, G \times_H W)$ definida en el Ejemplo 4.1.2.

Observación 4.2.2. El ideal I_G también está generado por los elementos de la forma $[H, V \oplus W] - [H, V] - [H, W]$, donde $H \in \mathcal{S}(G)$ y V, W son representaciones de H . En efecto, estos

elementos pertenecen a I_G , pues corresponden al caso $X = G/H$ de las relaciones que lo definen. Recíprocamente, sea $(X, V, W) \in \mathcal{L}_G$. Si $X = \coprod_{i \in I} X_i$ es la descomposición de X en órbitas y definimos

$$V^{(i)} := \bigoplus_{x \in X_i} V_x, \quad W^{(i)} := \bigoplus_{x \in X_i} W_x,$$

entonces, en $T(G)$,

$$\begin{aligned} & [(X, V \oplus W)] - [(X, V)] - [(X, W)] \\ &= \sum_{i \in I} ([(X_i, V^{(i)} \oplus W^{(i)})] - [(X_i, V^{(i)})] - [(X_i, W^{(i)})]). \end{aligned}$$

Como cada X_i es transitivo, cada sumando es de la forma $[H_i, V_i \oplus W_i] - [H_i, V_i] - [H_i, W_i]$, para algún $H_i \in \mathcal{S}(G)$ y algunas representaciones V_i, W_i de H_i . Por lo tanto, ambas familias de elementos generan el mismo ideal de $T(G)$.

Nota 4.2.3. El $\mathbb{C}G$ -módulo $G \times_H W$ se identifica naturalmente con la representación inducida $\text{ind}_H^G W$.

Teorema 4.2.4 ([RV15]). *Sea G un grupo finito y $\mathcal{S}(G)$ un conjunto de representantes de clases de conjugación de subgrupos de G . Para cada $H \in \mathcal{S}(G)$, sea $\mathcal{R}(H)$ un conjunto de representantes de las órbitas de la acción de $N_G(H)$ sobre $\text{Irred}(H)$. Entonces el anillo global de representaciones $D(G)$ es un $\mathbb{Z}$ -módulo libre con base $\{[H, W] \mid H \in \mathcal{S}(G), W \in \mathcal{R}(H)\}$.*

Antes de proceder con la demostración del teorema, consideremos lo siguiente.

Nota 4.2.5. Sea X un G -conjunto transitivo, y V un $\mathbb{C}G$ -módulo X -graduado. Entonces, para cada $x \in X$, el subespacio V_x es un $\mathbb{C}G_x$ -módulo. Además, por la demostración del Teorema 4.1.7, se tiene un isomorfismo de representaciones globales $(X, V) \cong (G/G_x, \text{ind}_{G_x}^G V_x)$, donde $\text{ind}_{G_x}^G V_x$ tiene la graduación natural dada por $(\text{ind}_{G_x}^G V_x)_{gG_x} = g \otimes V_x$.

Corolario 4.2.6. *Sea $H \leq G$, $g \in G$ y W una representación de H . Entonces $[H, W] = [{}^g H, {}^g W]$ en $D(G)$.*

Demostración. Por la Proposición 4.1.10, las representaciones globales $(G/H, G \times_H W)$ y $(G/{}^g H, G \times_{{}^g H} {}^g W)$ son isomorfas. Por lo tanto, determinan la misma clase en $T(G)$ y, en consecuencia, la misma clase en $D(G)$. $\square$

Demostración. (Teorema 4.2.4). Sea $\mathcal{S}(G)$ un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G . Consideremos la aplicación $\Theta : \bigoplus_{H \in \mathcal{S}(G)} R(H)_{N_G(H)} \rightarrow D(G)$

definida en generadores por $\Theta([W]) = [H, W]$, donde $R(H)_{N_G(H)}$ denota el grupo de coinvariantes del anillo de representaciones $R(H)$ bajo la acción de $N_G(H)$. Esta aplicación está

bien definida por la Corolario 4.2.6, pues si $n \in N_G(H)$, entonces $[H, W] = [H, {}^nW]$ en $D(G)$. Además, Θ es aditiva, ya que por la relación que define $D(G)$ se tiene $[H, W_1 \oplus W_2] = [H, W_1] + [H, W_2]$. Así, Θ es un homomorfismo de grupos.

Veamos ahora que Θ es sobreyectiva. Sea (X, V) una representación global de G . Por la Proposición 2.1.7, el G -conjunto X se descompone como unión disjunta de sus órbitas, esto es,

$$X = \coprod_{i \in I} X_i.$$

Para cada $i \in I$, definimos $V^{(i)} := \bigoplus_{x \in X_i} V_x$. Entonces $(X_i, V^{(i)})$ es una representación global de G y

$$[(X, V)] = \sum_{i \in I} [(X_i, V^{(i)})]$$

en $D(G)$. Como cada X_i es transitivo, por la Nota 4.2.5, para cada $x_i \in X_i$ se tiene un isomorfismo de representaciones globales $(X_i, V^{(i)}) \cong (G/G_{x_i}, \text{ind}_{G_{x_i}}^G V_{x_i})$. Por lo tanto, $[(X, V)] = \sum_{i \in I} [G_{x_i}, V_{x_i}]$.

Ahora, por el Corolario 3.1.6, cada $\mathbb{C}G_{x_i}$ -módulo V_{x_i} se descompone como suma directa de irreducibles, $V_{x_i} \cong \bigoplus_{j=1}^{n_i} W_{ij}$. Posiblemente reemplazando los subgrupos G_{x_i} por sus conjugados y usando nuevamente la relación que define $D(G)$, obtenemos

$$[G_{x_i}, V_{x_i}] = \sum_{j=1}^{n_i} [G_{x_i}, W_{ij}].$$

Finalmente, usando el Corolario 4.2.6, podemos reemplazar cada subgrupo G_{x_i} por el representante conjugado correspondiente en $\mathcal{S}(G)$. Así, $[(X, V)]$ pertenece a la imagen de Θ . Por lo tanto, Θ es sobreyectiva.

Para probar que Θ es inyectiva, construimos un inverso. Sea (X, V) una representación global de G . Descomponemos X como unión disjunta de órbitas

$$X = \coprod_{i \in I} X_i.$$

Para cada órbita X_i elegimos un punto $x_i \in X_i$ y un elemento $a_i \in G$ tal que $H_i := a_i G_{x_i} a_i^{-1} \in \mathcal{S}(G)$. Definimos

$$\Psi([(X, V)]) := \sum_{i \in I} [{}^{a_i}V_{x_i}] \in \bigoplus_{H \in \mathcal{S}(G)} R(H)_{N_G(H)},$$

donde el sumando $[{}^{a_i}V_{x_i}]$ se toma en $R(H_i)_{N_G(H_i)}$. Esta definición no depende de la elección de clase. En efecto, cambiar el punto x_i dentro de la misma órbita o cambiar el elemento a_i solo modifica la representación obtenida por la acción de un elemento de $N_G(H_i)$, y por eso define la misma clase en los coinvariantes $R(H_i)_{N_G(H_i)}$. Además, si (X, V) y (Y, W) son isomorfas

como representaciones globales, el isomorfismo identifica las órbitas correspondientes como representaciones de sus subgrupos de isotropía; por lo tanto, producen el mismo elemento bajo Ψ .

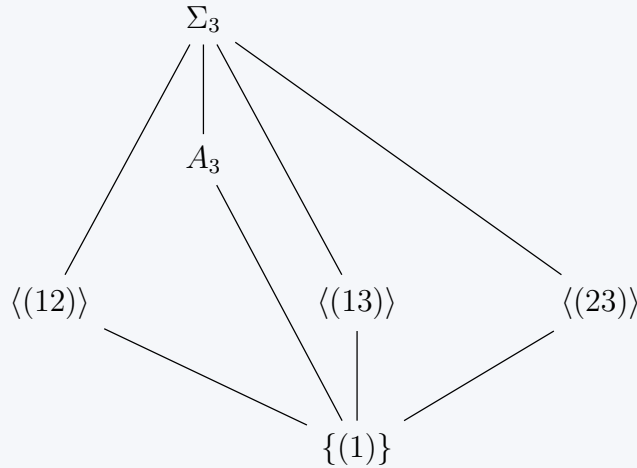
Se verifica fácilmente que la aplicación Ψ es aditiva respecto a la suma directa externa. Además, respeta la relación que define $D(G)$. Así, $\Psi([(X, V \oplus W)]) = \Psi([(X, V)]) + \Psi([(X, W)])$ y Ψ desciende a un homomorfismo $\Psi : D(G) \rightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{S}(G)} R(H)_{N_G(H)}$ el cual, por construcción, está dado por $\Psi([H, W]) = [W]$ para todo $H \in \mathcal{S}(G)$ y toda representación W de H . Por lo tanto, $\Psi \circ \Theta = \text{id}$. Además, por la sobreyectividad de Θ , se sigue que Θ es un isomorfismo.

Finalmente, como $R(H)$ es el $\mathbb{Z}$ -módulo libre generado por $\text{Irred}(H)$, sus coinvariantes $R(H)_{N_G(H)}$ son el $\mathbb{Z}$ -módulo libre generado por las órbitas $\text{Irred}(H)/N_G(H)$. En consecuencia,

$$D(G) \cong \bigoplus_{\substack{H \in \mathcal{S}(G) \\ W \in \mathcal{R}(H)}} \mathbb{Z}[H, W]. \quad \square$$

A continuación se muestra un ejemplo en el que se utiliza el Teorema 4.2.4 para calcular aditivamente el anillo global de representaciones de un grupo finito.

Ejemplo 4.2.7. Sea $G = \Sigma_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ el grupo simétrico en tres letras. Para determinar el anillo global de representaciones $D(\Sigma_3)$ como $\mathbb{Z}$ -módulo libre, usamos el Teorema 4.2.4, por lo cual basta describir los subgrupos de Σ_3 y sus representaciones irreducibles. La retícula de subgrupos de Σ_3 está dada por



donde $A_3 = \{(1), (123), (132)\} \cong \mathbb{Z}/3$. A continuación se describen las representaciones complejas irreducibles de cada uno de estos subgrupos.

- El subgrupo trivial $\{(1)\}$ tiene una única representación irreducible, la trivial $\mathbb{C}$.

- Cada subgrupo de orden dos es cíclico, isomorfo a $\mathbb{Z}/2$. Sus representaciones irreducibles son dos y de grado uno, dadas por los caracteres

$$\chi_k : \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \chi_k(1) = e^{\frac{2\pi i k}{2}}, \quad k = 0, 1.$$

- El subgrupo alternante $A_3 = \langle (123) \rangle \cong \mathbb{Z}/3$ tiene tres representaciones irreducibles de grado uno, dadas por los caracteres

$$\psi_k : \mathbb{Z}/3 \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \psi_k(1) = e^{\frac{2\pi i k}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

- Las clases de conjugación de Σ_3 son $\{(1)\}$, $\{(12), (13), (23)\}$ y $\{(123), (132)\}$, por lo que tiene exactamente tres representaciones irreducibles. Si V_1, V_2, V_3 son tales representaciones, por el Teorema 11.12 de [JL01] implica que

$$(\dim V_1)^2 + (\dim V_2)^2 + (\dim V_3)^2 = 6,$$

de donde se obtiene que hay dos de grado uno y una de grado dos. Estas son la trivial, la signo y la representación estándar (véase [JL01], Capítulo 6).

En consecuencia,

$$\begin{aligned} D(\Sigma_3) = \mathbb{Z}[\{(1)\}, \mathbb{C}] \oplus \sum_{k=0}^1 \mathbb{Z}[\langle (12) \rangle, \mathbb{C}_{\chi_k}] \oplus \sum_{k=0}^1 \mathbb{Z}[A_3, \mathbb{C}_{\psi_k}] \\ \oplus \mathbb{Z}[\Sigma_3, V_1] \oplus \mathbb{Z}[\Sigma_3, V_2] \oplus \mathbb{Z}[\Sigma_3, V_3], \end{aligned}$$

donde, en el sumando correspondiente a A_3 , la representación ψ_1 se toma como representante de su $N_{\Sigma_3}(A_3)$ -órbita $\{\psi_1, \psi_2\}$.

Antes de presentar un ejemplo en el que se muestre la estructura multiplicativa del anillo global $D(G)$, exhibiremos su elemento neutro multiplicativo.

Lema 4.2.8. *Sea G un grupo finito. Entonces $[G, \mathbb{C}]$ es la unidad multiplicativa de $D(G)$.*

Demostración. Por el Teorema 4.2.4, $D(G)$ es un $\mathbb{Z}$ -módulo libre generado por las clases $[H, W]$, donde $H \in \mathcal{S}(G)$ y $W \in \mathcal{R}(H)$. Por lo tanto, basta probar que $[G, \mathbb{C}] \cdot [H, W] = [H, W]$ y $[H, W] \cdot [G, \mathbb{C}] = [H, W]$ para cada generador $[H, W]$. Recordemos que $[G, \mathbb{C}]$ y $[H, W]$ están representados por $(G/G, \mathbb{C})$ y $(G/H, \text{ind}_H^G W)$, respectivamente. Por la definición del producto,

$$[G, \mathbb{C}] \cdot [H, W] = [(G/G \times G/H, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \text{ind}_H^G W)].$$

Es inmediato ver que la aplicación $\alpha : G/G \times G/H \rightarrow G/H$ dada por $\alpha(G, gH) = gH$ es

un isomorfismo de G -conjuntos. Por otra parte, $\varphi: \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \text{ind}_H^G W \rightarrow \text{ind}_H^G W$ definida como $\varphi(\lambda \otimes v) = \lambda v$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}G$ -módulos compatible con las graduaciones. Por lo tanto,

$$(G/G \times G/H, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \text{ind}_H^G W) \cong (G/H, \text{ind}_H^G W)$$

como representaciones globales, y así $[G, \mathbb{C}] \cdot [H, W] = [H, W]$. Análogamente, $[H, W] \cdot [G, \mathbb{C}] = [H, W]$. Como las clases $[H, W]$ forman una base de $D(G)$, por distributividad la igualdad se extiende a todo elemento de $D(G)$. Por lo tanto, $[G, \mathbb{C}]$ es la unidad multiplicativa de $D(G)$. $\square$

Ejemplo 4.2.9. Sea $G = \mathbb{Z}/2 = \{1, \sigma\}$ el grupo cíclico de orden 2. Sus únicos subgrupos son el subgrupo trivial $\{1\}$ y el propio $\mathbb{Z}/2$. Además, $\mathbb{C}$ es la única representación irreducible del subgrupo trivial, mientras que las representaciones irreducibles de $\mathbb{Z}/2$ son $\chi_k(\sigma) = e^{\frac{2\pi i k}{2}}$, donde $k = 0, 1$. Denotaremos por $\mathbb{C}_{\chi_0}$ a la representación trivial de $\mathbb{Z}/2$ y por $\mathbb{C}_{\chi_1}$ a la representación de signo.

Como

$$\text{ind}_{\{1\}}^{\mathbb{Z}/2} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}_{\chi_0} \oplus \mathbb{C}_{\chi_1}, \quad \text{ind}_{\mathbb{Z}/2}^{\mathbb{Z}/2} \mathbb{C}_{\chi_i} \cong \mathbb{C}_{\chi_i},$$

para $i = 0, 1$, el anillo global de representaciones $D(\mathbb{Z}/2)$, visto como $\mathbb{Z}$ -módulo libre, está dado por

$$D(\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}[\{1\}, \mathbb{C}] \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2, \mathbb{C}_{\chi_0}] \oplus \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2, \mathbb{C}_{\chi_1}].$$

Definimos

$$X := [\{1\}, \mathbb{C}], \quad 1 := [\mathbb{Z}/2, \mathbb{C}_{\chi_0}], \quad Y := [\mathbb{Z}/2, \mathbb{C}_{\chi_1}].$$

Por el lema anterior, $1 = [\mathbb{Z}/2, \mathbb{C}_{\chi_0}]$ es la unidad multiplicativa de $D(\mathbb{Z}/2)$.

Calculemos ahora los productos que involucran los generadores X y Y . Primero, $X^2 = [\{1\}, \mathbb{C}] \cdot [\{1\}, \mathbb{C}]$. Notemos que la acción diagonal de $\mathbb{Z}/2$ sobre $\mathbb{Z}/2/\{1\} \times \mathbb{Z}/2/\{1\}$ tiene dos órbitas: $\{(1, 1), (\sigma, \sigma)\}$ y $\{(1, \sigma), (\sigma, 1)\}$. Cada una de estas órbitas es isomorfa a $\mathbb{Z}/2/\{1\}$. Además, el estabilizador de cualquier punto en ambas órbitas es trivial. Por lo tanto, cada órbita contribuye con una copia de $[\{1\}, \mathbb{C}] = X$. Así, $X^2 = 2X$.

Por otro lado, $XY = [\{1\}, \mathbb{C}] \cdot [\mathbb{Z}/2, \mathbb{C}_{\chi_1}]$. El producto de G -conjuntos $\mathbb{Z}/2/\{1\} \times \mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2/\{1\}$. El estabilizador de un punto es trivial, y $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\chi_1} \cong \mathbb{C}$ como representación del subgrupo trivial. Por lo tanto, $XY = X$.

Finalmente, $Y^2 = [\mathbb{Z}/2, \mathbb{C}_{\chi_1}] \cdot [\mathbb{Z}/2, \mathbb{C}_{\chi_1}]$. Como $\mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{Z}/2/\mathbb{Z}/2$ y $\mathbb{C}_{\chi_1} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_{\chi_1} \cong \mathbb{C}_{\chi_0}$, se obtiene $Y^2 = 1$.

En consecuencia, las relaciones multiplicativas están dadas por

$$X^2 = 2X, \quad XY = X, \quad Y^2 = 1.$$

Por lo tanto,

$$D(\mathbb{Z}/2) \cong \frac{\mathbb{Z}[X, Y]}{\langle X^2 - 2X, XY - X, Y^2 - 1 \rangle}.$$

De manera general, el producto de cualesquiera dos elementos de $D(G)$ se puede determinar a partir del siguiente resultado cuya demostración puede consultarse en [RV15], Teorema 12.

Proposición 4.2.10. *Sea G un grupo finito. Entonces el producto en el anillo global de representaciones $D(G)$ está dado por*

$$[H, V] \cdot [K, W] = \sum_{x \in [H \backslash G / K]} [H \cap xKx^{-1}, \text{res}_{H \cap xKx^{-1}}^H(V) \otimes \text{res}_{H \cap xKx^{-1}}^{xKx^{-1}}(xWx^{-1})].$$

La construcción del anillo $D(G)$ codifica información sobre los conjuntos con una acción de G , y de sus representaciones lineales. Por lo cual, se esperaría que este anillo tenga relación con el anillo de Burnside y el anillo de representaciones de G . Para concluir con esta sección, mostraremos que los anillos $A(G)$ y $R(G)$ son subanillos de $D(G)$.

Teorema 4.2.11 ([Tor17], Teorema 4.2.4). *Sea G un grupo finito. Entonces el anillo de Burnside $A(G)$ es un subanillo del anillo global de representaciones $D(G)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}(G)$ un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G . Recordemos que $A(G)$ es el $\mathbb{Z}$ -módulo libre con base $\{[G/H] \mid H \in \mathcal{S}(G)\}$. Definimos la aplicación $\Phi : A(G) \rightarrow D(G)$ en los básicos de $A(G)$ como $\Phi([G/H]) = [H, \mathbb{C}]$, donde $\mathbb{C}$ denota la representación trivial de H . Si $[G/H] = [G/K]$ en $A(G)$, entonces, por la Proposición 4.2.6, $[H, \mathbb{C}] = [K, \mathbb{C}]$ en $D(G)$. En consecuencia, Φ está bien definida. Además, por la propiedad universal del $\mathbb{Z}$ -módulo libre, esta asignación se extiende de manera única a un homomorfismo de grupos abelianos.

Veamos ahora que Φ preserva el producto. Sean $H, K \in \mathcal{S}(G)$. Por el Lema 2.2.6, en $A(G)$ se tiene

$$[G/H] \cdot [G/K] = \sum_{g \in H \backslash G / K} \left[\frac{G}{H \cap gKg^{-1}} \right].$$

Por lo tanto,

$$\Phi([G/H] \cdot [G/K]) = \sum_{g \in H \backslash G / K} [H \cap gKg^{-1}, \mathbb{C}].$$

Por otro lado, por la Proposición 4.2.10 obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi([G/H]) \cdot \Phi([G/K]) &= [H, \mathbb{C}] \cdot [K, \mathbb{C}] \\ &= \sum_{g \in H \backslash G / K} \left[H \cap gKg^{-1}, \text{res}_{H \cap gKg^{-1}}^H(\mathbb{C}) \otimes \text{res}_{H \cap gKg^{-1}}^{gKg^{-1}}(g\mathbb{C}) \right]. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{C}$ es la representación trivial, también ${}^g\mathbb{C}$ es trivial y, por tanto,

$$\text{res}_{H \cap gKg^{-1}}^H(\mathbb{C}) \otimes \text{res}_{H \cap gKg^{-1}}^{gKg^{-1}}({}^g\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}.$$

Así,

$$\Phi([G/H]) \cdot \Phi([G/K]) = \sum_{g \in H \backslash G/K} [H \cap gKg^{-1}, \mathbb{C}].$$

En consecuencia, $\Phi([G/H] \cdot [G/K]) = \Phi([G/H]) \cdot \Phi([G/K])$. Además, $\Phi([G/G]) = [G, \mathbb{C}]$, que es la unidad multiplicativa de $D(G)$. Por lo tanto, Φ es un homomorfismo de anillos.

Resta probar que Φ es inyectivo. Definimos $\Psi : D(G) \rightarrow A(G)$ sobre la base de $D(G)$ dada en el Teorema 4.2.4 por $\Psi([H, W]) = [G/H]$, donde $H \in \mathcal{S}(G)$ y W es una representación irreducible de H . Nuevamente, por la propiedad universal del $\mathbb{Z}$ -módulo libre, esta asignación se extiende de manera única a un homomorfismo de grupos abelianos. Entonces, para cada $H \in \mathcal{S}(G)$,

$$(\Psi \circ \Phi)([G/H]) = \Psi([G/H]) = \Psi([H, \mathbb{C}]) = [G/H]$$

para cada $H \in \mathcal{S}(G)$. Por lo tanto, $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{A(G)}$. En particular, Φ es inyectivo. Así, $A(G)$ es un subanillo de $D(G)$. $\square$

Teorema 4.2.12 ([Tor17], Teorema 4.2.5). *Sea G un grupo finito. Entonces el anillo de representaciones $R(G)$ es un subanillo del anillo global de representaciones $D(G)$.*

Demostración. Recordemos que $R(G)$ es el $\mathbb{Z}$ -módulo libre con base dada por las clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de G . Definimos la aplicación $\Psi : R(G) \rightarrow D(G)$ en los básicos de $R(G)$ como $\Psi([W]) = [G, W]$, donde W es una representación irreducible de G . Esta aplicación está bien definida, ya que la igualdad de clases $[W] = [W']$ en $R(G)$ implica un isomorfismo de representaciones, y por lo tanto $[G, W] = [G, W']$. Además, por la propiedad universal del $\mathbb{Z}$ -módulo libre, esta asignación se extiende a un único homomorfismo de grupos abelianos.

Observemos que si V es una representación de G y $V \cong \bigoplus_{i=1}^n W_i$ es su descomposición como suma directa de representaciones irreducibles, $\Psi([V]) = \sum_{i=1}^n [G, W_i] = [G, V]$, donde la última igualdad se sigue de la relación que define a $D(G)$.

Veamos ahora que Ψ preserva el producto. Para esto, basta verificarlo en los elementos de la base. Sean U y W representaciones irreducibles de G . Si $U \otimes_{\mathbb{C}} W \cong \bigoplus_{i=1}^n T_i$ es su descomposición en irreducibles, entonces en $R(G)$ se tiene $[U] \cdot [W] = [U \otimes_{\mathbb{C}} W] = \sum_{i=1}^n [T_i]$. Por lo tanto,

$$\Psi([U] \cdot [W]) = \sum_{i=1}^n [G, T_i] = [G, U \otimes_{\mathbb{C}} W].$$

Por otro lado, $\Psi([U]) \cdot \Psi([W]) = [G, U] \cdot [G, W]$. Como $G/G \times G/G \cong G/G$, el producto en $D(G)$ está dado por $[G, U] \cdot [G, W] = [G, U \otimes_{\mathbb{C}} W]$. En consecuencia, $\Psi([U] \cdot [W]) = \Psi([U]) \cdot \Psi([W])$. Además, $\Psi([\mathbb{C}]) = [G, \mathbb{C}]$. Por lo tanto, Ψ es un homomorfismo de anillos.

Por último, veamos que Ψ es inyectivo. Sea $\mathcal{S}(G)$ un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G . Por el Teorema 4.2.4, el anillo $D(G)$ es un $\mathbb{Z}$ -módulo libre con base $\{[H, V] \mid H \in \mathcal{S}(G), V \in \mathcal{R}(H)\}$. Definimos $\Omega : D(G) \rightarrow R(G)$ sobre esta base como

$$\Omega([H, V]) = \begin{cases} [V], & \text{si } H = G, \\ 0, & \text{si } H \neq G. \end{cases}$$

Esta asignación se extiende de manera única a un homomorfismo de grupos abelianos. Además, para toda representación irreducible W de G se tiene $(\Omega \circ \Psi)([W]) = \Omega([G, W]) = [W]$. Por lo tanto, $\Omega \circ \Psi = \text{id}_{R(G)}$. En consecuencia, Ψ es inyectivo. De este modo, se concluye que $R(G)$ es un subanillo de $D(G)$. $\square$

4.3. Especies de $D(G)$

Para los anillos de Burnside $A(G)$ y de representaciones $R(G)$ se tienen, respectivamente, el homomorfismo de marcas y los caracteres. El análogo para el anillo $D(G)$ está dado por las especies, las cuales definiremos en esta sección. Para ello, introducimos la siguiente notación.

Sea G un grupo finito. Definimos

$$\mathcal{X}_G := \{(H, h) \mid H \leq G, h \in H\} / \sim_G,$$

donde $\sim_G$ es la relación de equivalencia dada por conjugación; esto es, $(H, h) \sim_G (K, k)$ si y solo si existe $g \in G$ tal que $K = {}^gH$ y $k = {}^gh$. Denotaremos la clase de una pareja (H, h) por $[(H, h)]_G$. Sin embargo, cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos simplemente (H, h) para referirnos a su clase en $\mathcal{X}_G$.

Definición 4.3.1 (Especie). Sea G un grupo finito y $(H, h) \in \mathcal{X}_G$. La **especie** asociada a (H, h) es la aplicación $\mathcal{S}_{(H, h)} : \text{glRep}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\mathcal{S}_{(H, h)}([(X, V)]) = \sum_{\substack{x \in X \\ H \leq G_x}} \chi_{V_x}(h). \quad (4.3)$$

Proposición 4.3.2. Sea $(H, h) \in \mathcal{X}_G$. La especie $\mathcal{S}_{(H, h)} : \text{glRep}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ asociada a (H, h) es una aplicación bien definida.

Demostración. Supongamos que $[(X, V)] = [(Y, W)]$ en $\text{glRep}(G)$. Entonces existe un isomorfismo de representaciones globales $(\alpha, \varphi) : (X, V) \rightarrow (Y, W)$. En particular, $\alpha : X \rightarrow Y$ es una biyección G -equivariante y φ es un isomorfismo de $\mathbb{C}G$ -módulos compatible con las graduaciones. Por ello, para cada $x \in X$ se tiene $\varphi(V_x) = W_{\alpha(x)}$. Además, si $H \leq G_x$, entonces para todo $h' \in H$ se cumple

$$h'\alpha(x) = \alpha(h'x) = \alpha(x),$$

y por lo tanto $H \leq G_{\alpha(x)}$. Recíprocamente, usando que α es biyectiva y G -equivariante, se obtiene que $H \leq G_{\alpha(x)}$ implica $H \leq G_x$. Así, α induce una biyección

$$\{x \in X \mid H \leq G_x\} \rightarrow \{y \in Y \mid H \leq G_y\}.$$

Como φ es G -equivariante, su restricción $\varphi|_{V_x} : V_x \rightarrow W_{\alpha(x)}$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}H$ -módulos para todo x tal que $H \leq G_x$. En consecuencia, $\chi_{V_x}(h) = \chi_{W_{\alpha(x)}}(h)$. Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)]) &= \sum_{\substack{x \in X \\ H \leq G_x}} \chi_{V_x}(h) \\ &= \sum_{\substack{x \in X \\ H \leq G_x}} \chi_{W_{\alpha(x)}}(h) \\ &= \sum_{\substack{y \in Y \\ H \leq G_y}} \chi_{W_y}(h) \\ &= \mathcal{S}_{(H,h)}([(Y, W)]). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{S}_{(H,h)}$ está bien definida. $\square$

A continuación, demostraremos que la especie asociada a una pareja $(H, h) \in \mathcal{X}_G$ preserva las operaciones definidas en $\text{glRep}(G)$; esto es, define un homomorfismo de semianillos. Más adelante, en el Lema 4.3.6 se demostrará que esta aplicación depende únicamente de la clase de (H, h) en $\mathcal{X}_G$.

Proposición 4.3.3 ([Tor17], Proposición 4.2.1). *La especie asociada a $(H, h) \in \mathcal{X}_G$ satisface las siguientes propiedades.*

1. $\mathcal{S}_{(H,h)}([\{*\}, \mathbb{C}]) = 1$.
2. Si $[(X, V)], [(Y, W)] \in \text{glRep}(G)$, entonces

$$\mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)] + [(Y, W)]) = \mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)]) + \mathcal{S}_{(H,h)}([(Y, W)]).$$

3. Si $[(X, V)], [(Y, W)] \in \text{glRep}(G)$, entonces

$$\mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)] \cdot [(Y, W)]) = \mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)]) \cdot \mathcal{S}_{(H,h)}([(Y, W)]).$$

Demostración.

1. Sea $[(\{*\}, \mathbb{C})]$ la clase de isomorfismo de la representación global trivial de G . Como la acción de G sobre $\{*\}$ es trivial, la isotropía del único punto $*$ es todo G , es decir, $G_* = G$. En particular, $H \leq G_*$. Luego, por definición,

$$\mathcal{S}_{(H,h)}([\{*\}, \mathbb{C}]) = \sum_{\substack{x \in \{*\} \\ H \leq G_x}} \chi_{\mathbb{C}}(h) = \chi_{\mathbb{C}}(h).$$

Como $\mathbb{C}$ es el $\mathbb{C}G$ -módulo trivial, se tiene que $\chi_{\mathbb{C}}(h) = 1$. Por lo tanto, $\mathcal{S}_{(H,h)}([\{*\}, \mathbb{C}]) = 1$.

2. Sean $[(X, V)], [(Y, W)] \in \text{glRep}(G)$. Entonces,

$$\mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)] + [(Y, W)]) = \mathcal{S}_{(H,h)}([(X \amalg Y, V \boxplus W)]) = \sum_{\substack{z \in X \amalg Y \\ H \leq G_z}} \chi_{(V \boxplus W)_z}(h).$$

Si $z \in X$, entonces $(V \boxplus W)_z = V_z$. Por otro lado, si $z \in Y$, se tiene $(V \boxplus W)_z = W_z$. A partir de esto se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)] + [(Y, W)]) &= \sum_{\substack{z \in X \amalg Y \\ H \leq G_z}} \chi_{(V \boxplus W)_z}(h) \\ &= \sum_{\substack{z \in X \\ H \leq G_z}} \chi_{V_z}(h) + \sum_{\substack{z \in Y \\ H \leq G_z}} \chi_{W_z}(h) \\ &= \mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)]) + \mathcal{S}_{(H,h)}([(Y, W)]). \end{aligned}$$

3. Si $[(X, V)], [(Y, W)] \in \text{glRep}(G)$, entonces $[(X, V)] \cdot [(Y, W)] = [(X \times Y, V \otimes W)]$. Luego

$$\mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)] \cdot [(Y, W)]) = \mathcal{S}_{(H,h)}([(X \times Y, V \otimes W)]) = \sum_{\substack{(x,y) \in X \times Y \\ H \leq G_{(x,y)}}} \chi_{V_x \otimes W_y}(h).$$

Como la acción de G sobre $X \times Y$ es coordenada a coordenada, se tiene $G_{(x,y)} = G_x \cap G_y$. Por lo tanto, la condición $H \leq G_{(x,y)}$ es equivalente a pedir simultáneamente $H \leq G_x$ y $H \leq G_y$. Además, por (3.3), $\chi_{V_x \otimes W_y}(h) = \chi_{V_x}(h) \cdot \chi_{W_y}(h)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)] \cdot [(Y, W)]) &= \sum_{\substack{x \in X, y \in Y \\ H \leq G_x, H \leq G_y}} \chi_{V_x \otimes W_y}(h) \\ &= \sum_{\substack{x \in X, y \in Y \\ H \leq G_x, H \leq G_y}} \chi_{V_x}(h) \cdot \chi_{W_y}(h) \\ &= \left(\sum_{\substack{x \in X \\ H \leq G_x}} \chi_{V_x}(h) \right) \left(\sum_{\substack{y \in Y \\ H \leq G_y}} \chi_{W_y}(h) \right) \\ &= \mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)]) \cdot \mathcal{S}_{(H,h)}([(Y, W)]). \end{aligned}$$

De este modo, se obtiene lo deseado. $\square$

El siguiente paso es ver que la especie de $T(G)$ asociada a una pareja $(H, h) \in \mathcal{X}_G$ descendiendo al cociente, es decir, define un homomorfismo de anillos de $D(G)$ en $\mathbb{C}$. Para ello, introducimos el siguiente resultado.

Proposición 4.3.4 ([RV15]). *Para cada generador $[K, W]$ de $T(G)$ se tiene*

$$\mathcal{S}_{(H,h)}([K, W]) = \sum_{\substack{gK \in G/K \\ H \leq gKg^{-1}}} \chi_W(g^{-1}hg).$$

Demostración. Sea $[K, W]$ un generador de $T(G)$. Por definición, $[K, W] = \overline{[(G/K, \text{ind}_K^G W)]}$; luego

$$\mathcal{S}_{(H,h)}([K, W]) = \mathcal{S}_{(H,h)}([(G/K, \text{ind}_K^G W)]) = \sum_{\substack{gK \in G/K \\ H \leq gKg^{-1}}} \chi_{(\text{ind}_K^G W)_{gK}}(h).$$

Ahora bien, la isotropía de gK está dada por $G_{gK} = gKg^{-1}$. Así, la condición $H \leq G_{gK}$ equivale a $H \leq gKg^{-1}$, o equivalentemente, $g^{-1}Hg \leq K$.

Por otra parte, la representación inducida $\text{ind}_K^G W$ admite una graduación natural por G/K dada por $(\text{ind}_K^G W)_{gK} = g \otimes W$. Por lo cual, si $H \leq gKg^{-1}$, entonces $g \otimes W$ es estable bajo la acción de H . En efecto, si $a \in H$ y $w \in W$, entonces $g^{-1}ag \in K$ y

$$a \cdot (g \otimes w) = ag \otimes w = g(g^{-1}ag) \otimes w = g \otimes (g^{-1}ag)w.$$

En particular, tomando $a = h$, la acción de h sobre $g \otimes W$ corresponde, bajo el isomorfismo de espacios vectoriales $g \otimes W \rightarrow W$ que envía $g \otimes w$ a w , a la acción de $g^{-1}hg$ sobre W . Por lo tanto, $\chi_{(\text{ind}_K^G W)_{gK}}(h) = \chi_{g \otimes W}(h) = \chi_W(g^{-1}hg)$. Sustituyendo en la suma anterior, obtenemos

$$\mathcal{S}_{(H,h)}([K, W]) = \sum_{\substack{gK \in G/K \\ H \leq gKg^{-1}}} \chi_W(g^{-1}hg). \quad \square$$

Como $\mathcal{S}_{(H,h)} : \text{glRep}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ es un homomorfismo de semianillos, por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck se extiende a un homomorfismo de anillos $\mathcal{S}_{(H,h)} : T(G) \rightarrow \mathbb{C}$. Para ver que este homomorfismo induce una especie sobre $D(G)$, basta comprobar que anula el ideal que define el cociente. Sea $K \leq G$ y sean V y W representaciones complejas de K . Por la Proposición 4.3.4,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{(H,h)}([K, V \oplus W]) &= \sum_{\substack{gK \in G/K \\ H \leq gKg^{-1}}} \chi_{V \oplus W}(g^{-1}hg) \\ &= \sum_{\substack{gK \in G/K \\ H \leq gKg^{-1}}} (\chi_V(g^{-1}hg) + \chi_W(g^{-1}hg)) \\ &= \mathcal{S}_{(H,h)}([K, V]) + \mathcal{S}_{(H,h)}([K, W]). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{S}_{(H,h)}([K, V \oplus W] - [K, V] - [K, W]) = 0$. Así, el ideal $\langle [K, V \oplus W] - [K, V] - [K, W] \rangle$ está contenido en $\text{Ker}(\mathcal{S}_{(H,h)})$. En consecuencia, $\mathcal{S}_{(H,h)}$ induce un homomorfismo de anillos $\mathcal{S}_{(H,h)} : D(G) \rightarrow \mathbb{C}$, al cual seguiremos llamando especie asociada a (H, h) .

Los siguientes resultados son algunas propiedades elementales de la especie asociada a (H, h) que serán útiles para las secciones posteriores.

Teorema 4.3.5 ([RV15], Teorema 17). *Para cada generador $[K, W]$ de $D(G)$ se cumple lo siguiente.*

1. $\mathcal{S}_{(H,1)}([K, W]) = \varphi_H(G/K) \dim W$.
2. $\mathcal{S}_{(H,h)}([K, \mathbb{C}]) = \varphi_H(G/K)$ para cada representante (H, h) de una clase en $\mathcal{X}_G$.

Demostración. 1. Por la Proposición 4.3.4, se tiene

$$\mathcal{S}_{(H,1)}([K, W]) = \sum_{\substack{gK \in G/K \\ H \leq gKg^{-1}}} \chi_W(g^{-1}1g).$$

Como $g^{-1}1g = 1$ y $\chi_W(1) = \dim W$, se obtiene

$$\mathcal{S}_{(H,1)}([K, W]) = \sum_{\substack{gK \in G/K \\ H \leq gKg^{-1}}} \dim W.$$

La condición $H \leq gKg^{-1}$ es equivalente a decir que la clase lateral gK es fija bajo la acción de H sobre G/K . Por lo tanto,

$$|\{gK \in G/K \mid H \leq gKg^{-1}\}| = |(G/K)^H| = \varphi_H(G/K).$$

Así, $\mathcal{S}_{(H,1)}([K, W]) = \varphi_H(G/K) \dim W$.

2. Nuevamente, por la Proposición 4.3.4,

$$\mathcal{S}_{(H,h)}([K, \mathbb{C}]) = \sum_{\substack{gK \in G/K \\ H \leq gKg^{-1}}} \chi_{\mathbb{C}}(g^{-1}hg).$$

Para cada clase lateral que aparece en la suma se tiene $g^{-1}Hg \leq K$, y en particular $g^{-1}hg \in K$. Como $\mathbb{C}$ es la representación trivial de K , se cumple que $\chi_{\mathbb{C}}(g^{-1}hg) = 1$. Por lo tanto,

$$\mathcal{S}_{(H,h)}([K, \mathbb{C}]) = \sum_{\substack{gK \in G/K \\ H \leq gKg^{-1}}} 1 = \varphi_H(G/K). \quad \square$$

Lema 4.3.6. *Sean $[(H, h)]_G, [(K, k)]_G \in \mathcal{X}_G$. Entonces, $[(H, h)]_G = [(K, k)]_G$ si y solo si $\mathcal{S}_{(H,h)} = \mathcal{S}_{(K,k)}$.*

Demostración. Supongamos primero que $[(H, h)]_G$ y $[(K, k)]_G$ son clases iguales en $\mathcal{X}_G$. Entonces existe $g \in G$ tal que $(K, k) = (gHg^{-1}, ghg^{-1})$. Consideremos $[(X, V)] \in \text{glRep}(G)$; la especie asociada a (K, k) evaluada en este elemento está dada por

$$\mathcal{S}_{(K,k)}([(X, V)]) = \sum_{\substack{x \in X \\ K \leq G_x}} \chi_{V_x}(k) = \sum_{\substack{x \in X \\ gHg^{-1} \leq G_x}} \chi_{V_x}(ghg^{-1}).$$

Como $gHg^{-1} \leq G_x$ si y solo si $H \leq G_{g^{-1}x}$, al hacer el cambio de variable $y = g^{-1}x$ obtenemos

$$\mathcal{S}_{(K,k)}([(X, V)]) = \sum_{\substack{y \in X \\ H \leq G_y}} \chi_{V_{gy}}(ghg^{-1}). \quad (4.4)$$

Por otro lado, dado que V es un $\mathbb{C}G$ -módulo X -graduado, se cumple $g \cdot V_y = V_{gy}$. En particular, la aplicación

$$g : V_y \rightarrow V_{gy}, \quad v \mapsto g \cdot v$$

es un isomorfismo de $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales. Además, para todo $v \in V_y$ se cumple

$$(ghg^{-1})(g \cdot v) = g(h \cdot v).$$

Por lo tanto, bajo el isomorfismo anterior, la acción de ghg^{-1} sobre V_{gy} corresponde a la acción de h sobre V_y . En consecuencia,

$$\chi_{V_{gy}}(ghg^{-1}) = \chi_{V_y}(h). \quad (4.5)$$

Sustituyendo (4.5) en (4.4), se sigue que

$$\mathcal{S}_{(K,k)}([(X, V)]) = \sum_{\substack{y \in X \\ H \leq G_y}} \chi_{V_y}(h) = \mathcal{S}_{(H,h)}([(X, V)]).$$

De la arbitrariedad de $[(X, V)]$, se concluye que $\mathcal{S}_{(H,h)} = \mathcal{S}_{(K,k)}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{S}_{(H,h)} = \mathcal{S}_{(K,k)}$. Para mostrar que $[(H, h)]_G$ y $[(K, k)]_G$ son la misma clase, primero demostraremos que H y K son G -conjugados. Sea $[K, \mathbb{C}] \in D(G)$. Entonces por el Teorema 4.3.5,

$$\mathcal{S}_{(H,h)}([K, \mathbb{C}]) = \varphi_H(G/K) = \varphi_K(G/K) = \mathcal{S}_{(K,k)}([K, \mathbb{C}]).$$

Como $\varphi_K(G/K) = \frac{|N_G(K)|}{|K|} \neq 0$, se tiene que $\varphi_H(G/K) \neq 0$. Por lo tanto, existe $g_1 \in G$ tal que $H \leq g_1 K g_1^{-1}$. Análogamente, al evaluar en $[H, \mathbb{C}]$ se obtiene que $K \leq g_2 H g_2^{-1}$ para algún $g_2 \in G$. Como G es finito, ambas inclusiones implican que H y K tienen el mismo orden. En consecuencia, H y K son G -conjugados. Así, existe $a \in G$ tal que $K = aHa^{-1}$. Por la primera parte de la demostración, $\mathcal{S}_{(H,h)} = \mathcal{S}_{(K,aha^{-1})}$. Además, por hipótesis, se tiene

$\mathcal{S}_{(K,aha^{-1})} = \mathcal{S}_{(K,k)}$. Por lo tanto, reemplazando (H, h) por su conjugado (K, aha^{-1}) , podemos suponer sin pérdida de generalidad que $H = K$.

Resta probar que h y k son conjugados en $N_G(K)$. Sea $[K, W] \in D(G)$ un generador, con W una representación irreducible de K . Entonces, por la Proposición 4.3.4,

$$\mathcal{S}_{(K,h)}([K, W]) = \sum_{\substack{gK \in G/K \\ K \leq gKg^{-1}}} \chi_W(g^{-1}hg).$$

Como $K \leq gKg^{-1}$ si y solo si $g \in N_G(K)$, se tiene

$$\mathcal{S}_{(K,h)}([K, W]) = \sum_{gK \in N_G(K)/K} \chi_W(g^{-1}hg).$$

Análogamente,

$$\mathcal{S}_{(K,k)}([K, W]) = \sum_{gK \in N_G(K)/K} \chi_W(g^{-1}kg).$$

Como $\mathcal{S}_{(K,h)} = \mathcal{S}_{(K,k)}$, se obtiene

$$\sum_{gK \in N_G(K)/K} \chi_W(g^{-1}hg) = \sum_{gK \in N_G(K)/K} \chi_W(g^{-1}kg)$$

para toda representación irreducible W de K . Multiplicando por $|K|$ y usando que los caracteres son funciones de clase en K , se sigue que

$$\sum_{g \in N_G(K)} \chi_W(g^{-1}hg) = \sum_{g \in N_G(K)} \chi_W(g^{-1}kg).$$

Sea

$$z := \sum_{g \in N_G(K)} (g^{-1}hg - g^{-1}kg) \in \mathbb{Z}K.$$

Entonces $\chi_W(z) = 0$ para toda representación irreducible W de K . Además, z es central en $\mathbb{Z}K$. En efecto, si $x \in K$, entonces

$$\begin{aligned} xzx^{-1} &= \sum_{g \in N_G(K)} (xg^{-1}hgx^{-1} - xg^{-1}kgx^{-1}) \\ &= \sum_{g \in N_G(K)} ((gx^{-1})^{-1}h(gx^{-1}) - (gx^{-1})^{-1}k(gx^{-1})) = z, \end{aligned}$$

ya que $g \mapsto gx^{-1}$ es una biyección de $N_G(K)$. De este modo, z actúa como un escalar sobre cada representación irreducible de K . Como $\chi_W(z) = 0$ para toda irreducible W , dicho escalar es cero en cada una de ellas. Por el Teorema de Maschke, z actúa como cero sobre toda representación compleja de K , en particular sobre la representación regular $\mathbb{C}K$. Pero

en la representación regular, $z \cdot 1 = z$, de donde se sigue que $z = 0$. En consecuencia, la siguiente igualdad

$$\sum_{g \in N_G(K)} g^{-1}hg = \sum_{g \in N_G(K)} g^{-1}kg$$

se cumple en $\mathbb{Z}K$. Observemos que el coeficiente de h en la suma de la izquierda es positivo, pues aparece al tomar $g = 1$. Como las dos sumas son iguales, el coeficiente de h en la suma de la derecha también es positivo. Luego existe $g \in N_G(K)$ tal que $g^{-1}kg = h$. Por lo tanto, h y k son conjugados en $N_G(K)$. De esta manera, se concluye que (H, h) y (K, k) pertenecen a la misma clase en $\mathcal{X}_G$. $\square$

En virtud de lo anterior, si dos pares (H, h) y (K, k) pertenecen a la misma clase en $\mathcal{X}_G$, entonces sus especies asociadas coinciden. Por lo cual, es suficiente elegir un representante por cada clase de $\mathcal{X}_G$. Esto da lugar a una aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : D(G) &\rightarrow \prod_{(H, h) \in \mathcal{X}_G} \mathbb{C} \\ z &\mapsto (\mathcal{S}_{(H, h)}(z))_{(H, h) \in \mathcal{X}_G} \end{aligned}$$

bien definida. Se verifica fácilmente que es un morfismo de anillos, al cual llamaremos el **homomorfismo fantasma**.

Proposición 4.3.7. *El homomorfismo fantasma $\mathcal{S} : D(G) \rightarrow \prod_{(H, h) \in \mathcal{X}_G} \mathbb{C}$ es inyectivo.*

Demostración. Sea $z \in D(G)$. Entonces, por el Teorema 4.2.4, z se expresa de manera única como

$$z = \sum_{\substack{H \in \mathcal{S}(G) \\ W \in \mathcal{R}(H)}} \lambda_{H, W} [H, W],$$

donde $\mathcal{S}(G)$ es un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G , $\mathcal{R}(H)$ es un conjunto de representantes de $\text{Irred}(H)/N_G(H)$, y $\lambda_{H, W} \in \mathbb{Z}$. Supongamos que $z \in \text{Ker}(\mathcal{S})$. Para probar la inyectividad de $\mathcal{S}$, mostraremos que todos los coeficientes $\lambda_{H, W}$ son cero. Para ello, procederemos por inducción descendente sobre el orden de los subgrupos $H \in \mathcal{S}(G)$.

El caso base corresponde a $H = G$. Como $z \in \text{Ker}(\mathcal{S})$, para todo $h \in G$ se tiene $\mathcal{S}_{(G, h)}(z) = 0$. Por la Proposición 4.3.4, un generador $[K, W]$ contribuye a $\mathcal{S}_{(G, h)}(z)$ solo si existe $gK \in G/K$ tal que $G \leq gKg^{-1}$; esto ocurre solo cuando $K = G$. Por lo tanto,

$$\mathcal{S}_{(G, h)}(z) = \sum_{W \in \mathcal{R}(G)} \lambda_{G, W} \chi_W(h) = 0,$$

para todo $h \in G$. Dado que, en este caso, $\mathcal{R}(G) = \text{Irred}(G)$ y los caracteres irreducibles de G son linealmente independientes, se sigue que $\lambda_{G, W} = 0$ para todo $W \in \mathcal{R}(G)$.

Supongamos que $\lambda_{K,U} = 0$ para todo $K \in \mathcal{S}(G)$ tal que $|K| > |H|$, y todo $U \in \mathcal{R}(K)$. Mostraremos que $\lambda_{H,W} = 0$ para todo $W \in \mathcal{R}(H)$. Sea $h \in H$. Como $z \in \text{Ker}(\mathcal{S})$, se tiene $\mathcal{S}_{(H,h)}(z) = 0$. Nuevamente, por la Proposición 4.3.4, un generador $[K, U]$ contribuye a $\mathcal{S}_{(H,h)}(z)$ solo si existe $gK \in G/K$ tal que $H \leq gKg^{-1}$. Si $|K| > |H|$, entonces el coeficiente correspondiente es cero por hipótesis de inducción. Si $|K| = |H|$, la condición anterior implica que $H = gKg^{-1}$, de modo que K es conjugado a H . Dado que H y K pertenecen a $\mathcal{S}(G)$, se sigue que $K = H$. Por lo tanto, para todo $h \in H$

$$\sum_{W \in \mathcal{R}(H)} \lambda_{H,W} \sum_{\substack{gH \in G/H \\ H \leq gHg^{-1}}} \chi_W(g^{-1}hg) = \sum_{W \in \mathcal{R}(H)} \lambda_{H,W} \sum_{gH \in N_G(H)/H} \chi_W(g^{-1}hg) = 0, \quad (4.6)$$

donde la primera igualdad se tiene porque $H \leq gHg^{-1}$ si y solo si $g \in N_G(H)$. Observemos que, para toda representación irreducible W de H , el carácter $\sum_{gH \in N_G(H)/H} \chi_W(g^{-1}hg)$ es el

carácter de la representación $\bigoplus_{gH \in N_G(H)/H} {}^gW$ de H . Por lo tanto, la igualdad en (4.6) nos dice que el carácter de la representación virtual

$$\sum_{W \in \mathcal{R}(H)} \lambda_{H,W} \left(\bigoplus_{gH \in N_G(H)/H} {}^gW \right)$$

es cero. Como los caracteres irreducibles de H son linealmente independientes, esta representación virtual es cero en $R(H)$. Además, al variar $W \in \mathcal{R}(H)$, las familias $\{{}^gW \mid g \in N_G(H)\}$ son órbitas disjuntas en $\text{Irred}(H)$. En consecuencia, cada coeficiente $\lambda_{H,W}$ debe ser cero.

Por inducción descendente, todos los coeficientes $\lambda_{H,W}$ son cero, y $z = 0$. Por lo tanto, $\text{Ker}(\mathcal{S}) = 0$ y el homomorfismo fantasma es inyectivo. $\square$

4.4. Representaciones globales invariantes bajo fusión

En este apartado desarrollaremos el principal objetivo de este trabajo, el cual consiste en proponer una definición adecuada del anillo global de representaciones $\mathcal{F}$ -estables (o invariantes bajo fusión). Hasta donde es de nuestro conocimiento, esta construcción no ha sido considerada previamente en la literatura. Iniciamos definiendo las representaciones globales invariantes bajo fusión, y posteriormente estudiaremos algunas propiedades que nos permitirán definir dicho anillo.

Como se ha hecho anteriormente, supondremos que los sistemas de fusión considerados son saturados.

Definición 4.4.1 (Representación global invariante bajo fusión). Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Una **representación global** (X, V) de S se dice **invariante bajo**

fusión si, para cada par de subgrupos $P, Q \leq S$ y cada morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$, se tiene un isomorfismo de representaciones globales

$$\text{res}_P^S(X, V) \cong f^* \text{res}_Q^S(X, V).$$

En este caso, la restricción de S a $P \leq S$ de una representación global (X, V) está dada por

$$\text{res}_P^S(X, V) := (\text{res}_P^S X, \text{res}_P^S V).$$

Es decir, el S -conjunto X se considera como un P -conjunto mediante la restricción de la acción, y el $\mathbb{C}S$ -módulo V se considera como un $\mathbb{C}P$ -módulo. Además, la graduación de V se preserva, ya que $p \cdot V_x = V_{px}$ para todo $p \in P$ y $x \in X$.

Por otro lado, si $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ y (Y, W) es una representación global de $Q \leq S$, entonces $f^*(Y, W)$ denota la representación global de P obtenida al restringir la acción a través de f . Así, P actúa sobre Y por $p \cdot y := f(p)y$, y sobre W por $p \cdot w := f(p)w$.

El siguiente resultado muestra que las representaciones globales invariantes bajo fusión se preservan bajo las operaciones definidas en (4.1) y (4.2).

Proposición 4.4.2. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Si (X, V) y (Y, W) son dos representaciones globales de S invariantes bajo fusión, entonces su suma y su producto,*

$$(X, V) + (Y, W) = (X \amalg Y, V \boxplus W), \quad (X, V) \cdot (Y, W) = (X \times Y, V \otimes_{\mathbb{C}} W),$$

también son representaciones globales de S invariantes bajo fusión.

Demostración. Veamos primero que la suma de dos representaciones globales invariantes bajo fusión también es invariante bajo fusión. Sean $P, Q \leq S$ y $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$. Como (X, V) y (Y, W) son invariantes bajo fusión, se tiene que $\text{res}_P^S(X, V) \cong f^* \text{res}_Q^S(X, V)$ y $\text{res}_P^S(Y, W) \cong f^* \text{res}_Q^S(Y, W)$ son isomorfismos de representaciones globales de P . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{res}_P^S((X, V) + (Y, W)) &= \text{res}_P^S(X, V) + \text{res}_P^S(Y, W) \\ &\cong f^* \text{res}_Q^S(X, V) + f^* \text{res}_Q^S(Y, W) \\ &\cong f^*(\text{res}_Q^S(X, V) + \text{res}_Q^S(Y, W)) \\ &= f^* \text{res}_Q^S((X, V) + (Y, W)). \end{aligned}$$

Así, $(X, V) + (Y, W)$ es invariante bajo fusión.

Procediendo de manera análoga para el producto, se tiene

$$\begin{aligned} \text{res}_P^S((X, V) \cdot (Y, W)) &= \text{res}_P^S(X, V) \cdot \text{res}_P^S(Y, W) \\ &\cong f^* \text{res}_Q^S(X, V) \cdot f^* \text{res}_Q^S(Y, W) \\ &\cong f^*(\text{res}_Q^S(X, V) \cdot \text{res}_Q^S(Y, W)) \\ &= f^* \text{res}_Q^S((X, V) \cdot (Y, W)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(X, V) \cdot (Y, W)$ también es invariante bajo fusión. □

Sean (X, V) y (Y, W) dos representaciones globales de S . Si $(X, V) \cong (Y, W)$ como representaciones globales y (X, V) es invariante bajo fusión, entonces, para todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$, se tienen isomorfismos

$$\text{res}_P^S(Y, W) \cong \text{res}_P^S(X, V) \cong f^* \text{res}_Q^S(X, V) \cong \text{res}_Q^S(Y, W).$$

Por lo tanto, (Y, W) también es invariante bajo fusión. Denotaremos por $\text{glRep}(\mathcal{F})$ al conjunto de clases de isomorfismo de representaciones globales de S que son invariantes bajo fusión.

La suma inducida por la suma directa externa definida en $\text{glRep}(S)$ se restringe a $\text{glRep}(\mathcal{F})$ y, por la Proposición 4.4.2, se tiene una operación binaria bien definida en $\text{glRep}(\mathcal{F})$. Análogamente con el producto. Así, $\text{glRep}(\mathcal{F})$ junto con estas operaciones tiene estructura de semianillo conmutativo.

Por construcción, $(\text{glRep}(\mathcal{F}), +)$ es un submonoide de $(\text{glRep}(S), +)$. En particular, es reducido, ya que $\text{glRep}(S)$ lo es. Por el Teorema 4.1.9, sabemos que $\text{glRep}(S)$ es un monoide de factorización única y, en consecuencia, es libre. Sin embargo, en general, un submonoide de un monoide libre no necesariamente es libre. Este fenómeno ya aparece en el monoide de representaciones complejas $\text{Rep}(\mathcal{F})$ invariantes bajo fusión. Esto es, existen sistemas de fusión saturados $\mathcal{F}$ para los cuales $\text{Rep}(\mathcal{F})$ no satisface factorización única como suma de representaciones irreducibles invariantes bajo fusión; véase [CC23], Ejemplo 2.5 ó [Ree15], Ejemplo A.2. Como los átomos de $\text{Rep}(\mathcal{F})$ siguen siendo átomos al considerarlos como elementos de $\text{glRep}(\mathcal{F})$ con graduación trivial, estos ejemplos proporcionan también contraejemplos de que $\text{glRep}(\mathcal{F})$ no es libre en general.

Definamos el anillo

$$T(\mathcal{F}) = K(\text{glRep}(\mathcal{F})) := \frac{\mathbb{Z}[\text{glRep}(\mathcal{F})]}{\langle [(X, V)] + [(Y, W)] - [(X \amalg Y, V \boxplus W)] \rangle}$$

como la construcción de Grothendieck del semianillo $\text{glRep}(\mathcal{F})$, donde (X, V) y (Y, W) son representaciones globales invariantes bajo fusión. Este anillo constituye el análogo de $T(G)$ para el caso de un sistema de fusión.

Sería natural esperar que, al tomar el cociente de $T(\mathcal{F})$ por las relaciones provenientes de la suma directa interna, se obtuviera el análogo del anillo global de representaciones para un sistema de fusión. Sin embargo, esta construcción presenta la siguiente dificultad: aunque (X, V) y (X, W) sean representaciones globales invariantes bajo fusión, en general $(X, V \oplus W)$ no tiene por qué ser invariante bajo fusión. En consecuencia, las relaciones asociadas a la suma directa interna no pueden imponerse en $T(\mathcal{F})$ de la misma manera que en el caso de un grupo. Por esta razón, definimos el anillo de representaciones globales de un sistema de fusión de la siguiente manera.

Definición 4.4.3 (Anillo global de representaciones de un sistema de fusión). Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . El **anillo global de representaciones de $\mathcal{F}$** se define como el límite inverso

$$D(\mathcal{F}) := \varprojlim_{\mathcal{F}} D(Q).$$

Veamos que esta definición permite identificar $D(\mathcal{F})$ con un subanillo de $D(S)$. En primer lugar, la construcción del anillo de representaciones globales define un funtor contravariante $D : \mathcal{F}^{\text{op}} \rightarrow \text{CRing}$, que a cada subgrupo $Q \leq S$ le asigna el anillo $D(Q)$ y a cada morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$ le asocia el homomorfismo de anillos $f^* : D(Q) \rightarrow D(P)$. Por lo tanto, su límite inverso está dado por

$$\varprojlim_{\mathcal{F}} D(Q) = \left\{ (x_Q)_{Q \leq S} \in \prod_{Q \leq S} D(Q) \mid f^*(x_Q) = x_P \text{ para todo } f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q) \right\}.$$

Mostraremos ahora que este límite puede identificarse naturalmente con un subanillo de $D(S)$. Sea $(x_Q)_{Q \leq S} \in \varprojlim_{\mathcal{F}} D(Q)$, entonces su componente $x_S \in D(S)$ determina todas las demás componentes. En efecto, si $Q \leq S$ y denota la inclusión, entonces i_Q es un morfismo de $\mathcal{F}$. Por la condición de compatibilidad del límite, $x_Q = i_Q^*(x_S) = \text{res}_Q^S x_S$. Así, todo elemento de $\varprojlim_{\mathcal{F}} D(Q)$ queda completamente determinado por su componente en $D(S)$.

Recíprocamente, dado $z \in D(S)$, consideremos la familia

$$(\text{res}_Q^S z)_{Q \leq S} \in \prod_{Q \leq S} D(Q).$$

Esta familia pertenece al límite si y solo si, para todo morfismo $f : P \rightarrow Q$ en $\mathcal{F}$, se cumple $f^*(\text{res}_Q^S z) = \text{res}_P^S z$. En consecuencia, la proyección sobre la componente correspondiente a S induce un isomorfismo entre $\varprojlim_{\mathcal{F}} D(Q)$ y el subanillo de $D(S)$ formado por los elementos que satisfacen esta condición de compatibilidad. Por lo tanto,

$$D(\mathcal{F}) \cong \{z \in D(S) \mid \text{res}_P^S z = f^* \text{res}_Q^S z, P, Q \leq S, f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)\}.$$

En otras palabras, $D(\mathcal{F})$ se identifica con el subanillo de elementos $\mathcal{F}$ -estables de $D(S)$. Por lo tanto, $D(\mathcal{F}) = D(S)^{\mathcal{F}}$.

Ejemplo 4.4.4. Sea $G = \Sigma_3$, sea $S = \{(1), (123), (132)\}$ el 3-subgrupo de Sylow de Σ_3 y $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$ el sistema de fusión de G relativo a S . Dado que S no tiene subgrupos no triviales, se sigue que los únicos objetos de $\mathcal{F}$ son el subgrupo trivial $\{1\}$ y S mismo. Ahora describiremos los morfismos de $\mathcal{F}$. Para ello, consideremos los siguientes casos.

- Si $P = Q = 1$, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q) = \text{id}$.

- Si $P = 1$ y $Q = S$, el único morfismo de P a Q es el trivial.
- Si $P = S$ y $Q = 1$, entonces $\text{Hom}_{\mathcal{F}}(S, 1) = \emptyset$, ya que no existe $g \in \Sigma_3$ tal que $gSg^{-1} \leq 1$.
- Si $P = S = Q$, se obtiene

$$\text{Aut}_{\mathcal{F}}(S) = \text{Hom}_{\mathcal{F}}(S, S) = N_{\Sigma_3}(S)/C_{\Sigma_3}(S) \cong \Sigma_3/S \cong \mathbb{Z}/2.$$

Explícitamente, $\text{Aut}_{\mathcal{F}}(S) = \{\text{id}, c_{(23)}\}$, donde $c_{(23)}$ es la conjugación por la transposición (23) que actúa por inversión sobre S .

Una vez determinados los objetos y los morfismos del sistema de fusión $\mathcal{F}$, describiremos los elementos de $D(S)$ que son invariantes bajo fusión. Por el Teorema 4.2.4,

$$D(S) \cong \mathbb{Z}[1, \mathbb{C}] \oplus \mathbb{Z}[S, \rho_0] \oplus \mathbb{Z}[S, \rho_1] \oplus \mathbb{Z}[S, \rho_2],$$

donde $\mathbb{C}$ es la única representación irreducible del subgrupo trivial, y $\rho_j(123) = e^{\frac{2\pi i j}{3}}$, con $j = 0, 1, 2$, son las representaciones irreducibles de S . En consecuencia, un elemento $z \in D(S)$ es de la forma

$$z = \lambda_1[1, \mathbb{C}] + \lambda_2[S, \rho_0] + \lambda_3[S, \rho_1] + \lambda_4[S, \rho_2],$$

con $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Como $D(\mathcal{F})$ es un subanillo de $D(S)$, se tiene que $z \in D(S)$ es un elemento de $D(\mathcal{F})$ si y solo si $\text{res}_P^S z = f^* \text{res}_Q^S z$ para todo $P, Q \leq S$ y todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, Q)$. Esta condición es inmediata para el morfismo identidad. Resta verificar esta condición para el automorfismo $c_{(23)} \in \text{Aut}_{\mathcal{F}}(S)$. Esto es, $z \in D(\mathcal{F})$ si y solo si $z = c_{(23)}^*(z)$. Como

$$\begin{aligned} c_{(23)}^*(z) &= c_{(23)}^* (\lambda_1[1, \mathbb{C}] + \lambda_2[S, \rho_0] + \lambda_3[S, \rho_1] + \lambda_4[S, \rho_2]) \\ &= \lambda_1([1, \mathbb{C}]) + \lambda_2[S, \rho_0] + \lambda_3[S, \rho_2] + \lambda_4[S, \rho_1], \end{aligned}$$

se sigue que $z = c_{(23)}^*(z)$ si y solo si $\lambda_3 = \lambda_4$. Por lo tanto, los elementos de $D(\mathcal{F})$ son precisamente aquellos de la forma

$$\lambda_1[1, \mathbb{C}] + \lambda_2[S, \rho_0] + \lambda_3([S, \rho_1] + [S, \rho_2]).$$

En virtud de que $[S, \rho_1] + [S, \rho_2] = [S, \rho_1 \oplus \rho_2]$, se concluye que

$$D(\mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}[1, \mathbb{C}] \oplus \mathbb{Z}[S, \rho_0] \oplus \mathbb{Z}[S, \rho_1 \oplus \rho_2] \cong \mathbb{Z}^3.$$

Ahora nos enfocaremos en estudiar las propiedades análogas a las que se tienen para el anillo global de representaciones de un grupo finito. Iniciaremos definiendo las especies del

anillo $D(\mathcal{F})$. Para ello, consideremos un sistema de fusión $\mathcal{F}$ sobre un p -grupo S . Denotamos por

$$\mathcal{X}_{\mathcal{F}} = \{(P, h) \mid P \leq S, h \in P\} / \sim_{\mathcal{F}},$$

donde $(P, h) \sim_{\mathcal{F}} (Q, k)$ si y solo si existe un isomorfismo $\varphi : P \rightarrow Q$ en $\mathcal{F}$ tal que $\varphi(h) = k$. De manera análoga a $\mathcal{X}_S$, denotaremos la clase de una pareja (P, h) por $[(P, h)]_{\mathcal{F}}$. Cuando no haya riesgo de confusión, escribiremos simplemente (P, h) para referirnos a su clase en $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$.

Sea $z = \sum \lambda_{K,W} [K, W] \in D(S)$. Recordemos que la especie asociada a $(P, h) \in \mathcal{X}_S$ y evaluada en z está dada por

$$\mathcal{S}_{(P,h)}(z) = \sum_{K,W} \lambda_{K,W} \sum_{\substack{sK \in S/K \\ P \leq sKs^{-1}}} \chi_W(s^{-1}hs).$$

Así, a partir de estos homomorfismos caracterizaremos los elementos $z \in D(S)$ que son invariantes bajo fusión.

Proposición 4.4.5. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S . Para $z \in D(S)$, son equivalentes:*

i) z es invariante bajo fusión.

ii) Para todo par $(P, h) \in \mathcal{X}_S$, y todo morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$, se cumple

$$\mathcal{S}_{(P,h)}(z) = \mathcal{S}_{(f(P), f(h))}(z).$$

Demostración. Supongamos primero que $z \in D(S)$ es invariante bajo fusión. Entonces $\text{res}_P^S z = f^* z$ para cada $P \leq S$ y $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$. Sea $(P, h) \in \mathcal{X}_S$. Al evaluar la especie asociada a (P, h) en la igualdad anterior, se tiene $\mathcal{S}_{(P,h)}^P(\text{res}_P^S z) = \mathcal{S}_{(P,h)}^P(f^* z)$. Verificaremos primero una identidad que describe el comportamiento de las especies respecto a la restricción inducida por un morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$; después, la compatibilidad con la restricción usual se obtendrá como un caso particular. Sea $[K, W]$ un generador de $D(S)$. Mostraremos que $\mathcal{S}_{(P,h)}^P(f^*[K, W]) = \mathcal{S}_{(f(P), f(h))}^S([K, W])$. Al considerar $f^*[K, W]$, el conjunto S/K es un P -conjunto mediante la acción $p \cdot sK = f(p)sK$. Por lo tanto,

$$P_{sK} = \{p \in P \mid f(p)sK = sK\} = f^{-1}(sKs^{-1}).$$

Así, $P \leq P_{sK}$ si y solo si $f(P) \leq sKs^{-1}$. Además, la acción de h sobre la componente $s \otimes W$ de $f^*(\text{ind}_K^S W)$ corresponde a la acción de $f(h)$ sobre la misma componente, y esta a su vez

corresponde a la acción de $s^{-1}f(h)s$ sobre W . En consecuencia,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{(P,h)}^P(f^*[K, W]) &= \sum_{\substack{sK \in S/K \\ P \leq P_{sK}}} \chi_{(f^* \text{ind}_K^S W)_{sK}}(h) \\ &= \sum_{\substack{sK \in S/K \\ f(P) \leq sKs^{-1}}} \chi_W(s^{-1}f(h)s) \\ &= \mathcal{S}_{(f(P), f(h))}^S([K, W]).\end{aligned}$$

Luego, por linealidad,

$$\mathcal{S}_{(P,h)}^P(f^*z) = \mathcal{S}_{(f(P), f(h))}^S(z). \quad (4.7)$$

En particular, si $\iota : P \hookrightarrow S$ denota la inclusión, entonces $\iota^*z = \text{res}_P^S z$. Por lo tanto, tomando $f = \iota$ en (4.7), obtenemos

$$\mathcal{S}_{(P,h)}^P(\text{res}_P^S z) = \mathcal{S}_{(P,h)}^S(z). \quad (4.8)$$

Por la invarianza bajo fusión de z , y usando (4.7) y (4.8), obtenemos

$$\mathcal{S}_{(P,h)}^S(z) = \mathcal{S}_{(P,h)}^P(\text{res}_P^S z) = \mathcal{S}_{(P,h)}^P(f^*z) = \mathcal{S}_{(f(P), f(h))}^S(z),$$

tal como se quería.

Por otra parte, supongamos que para toda pareja $(P, h) \in \mathcal{X}_S$ y todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$ se cumple $\mathcal{S}_{(P,h)}^S(z) = \mathcal{S}_{(f(P), f(h))}^S(z)$. Demostraremos entonces que $\text{res}_P^S z = f^*z$ para todo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{F}}(P, S)$. Por la inyectividad del morfismo fantasma de $D(P)$, basta probar que ambas clases tienen la misma evaluación bajo todas las especies de $D(P)$. Sea $(L, l) \in \mathcal{X}_P$. Por (4.8) se tiene

$$\mathcal{S}_{(L,l)}^P(\text{res}_P^S z) = \mathcal{S}_{(L,l)}^S(z).$$

Por otro lado, $\mathcal{S}_{(L,l)}^P(f^*z) = \mathcal{S}_{(f(L), f(l))}^S(z)$. Como la restricción $f|_L : L \rightarrow f(L)$ es un morfismo en $\mathcal{F}$ y, por inclusión, puede verse como un morfismo de L en S , por hipótesis se tiene $\mathcal{S}_{(L,l)}^S(z) = \mathcal{S}_{(f(L), f(l))}^S(z)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{S}_{(L,l)}^P(\text{res}_P^S z) = \mathcal{S}_{(L,l)}^P(f^*z)$$

para todo $L \leq P$ y todo $l \in L$. De la inyectividad del morfismo fantasma de $D(P)$ se sigue que $\text{res}_P^S z = f^*z$. $\square$

Definición 4.4.6 (Especie de $D(\mathcal{F})$). Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S y $(P, h) \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$. La **especie** de $D(\mathcal{F})$ asociada a (P, h) es la aplicación $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}} : D(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z) := \mathcal{S}_{(P,h)}(\iota(z))$, donde $\iota : D(\mathcal{F}) \hookrightarrow D(S)$ es la inclusión.

Dado que la especie asociada a una pareja $(P, h) \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ es la composición de dos homomorfismos de anillos, se sigue que $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$ también es un homomorfismo de anillos. El siguiente resultado muestra que este homomorfismo está bien definido, es decir, depende únicamente de la clase de (P, h) en $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$.

Teorema 4.4.7. *Si $[(P, h)]_{\mathcal{F}} = [(Q, k)]_{\mathcal{F}}$ en $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$, entonces $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}} = \mathcal{S}_{(Q,k)}^{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Sean (P, h) y (Q, k) dos representantes de la misma clase en $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$. Entonces existe un isomorfismo $\varphi : P \rightarrow Q$ en $\mathcal{F}$ tal que $\varphi(h) = k$. Sea $z \in D(\mathcal{F})$. Por la Proposición 4.4.5, se cumple

$$\mathcal{S}_{(P,h)}(z) = \mathcal{S}_{(\varphi(P), \varphi(h))}(z).$$

Como $\varphi(P) = Q$ y $\varphi(h) = k$, se sigue que $\mathcal{S}_{(P,h)}(z) = \mathcal{S}_{(Q,k)}(z)$. Dado que $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{S}_{(Q,k)}^{\mathcal{F}}$ son las restricciones de $\mathcal{S}_{(P,h)}$ y $\mathcal{S}_{(Q,k)}$, respectivamente, obtenemos $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z) = \mathcal{S}_{(Q,k)}^{\mathcal{F}}(z)$. De la arbitrariedad de $z \in D(\mathcal{F})$, se concluye que $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}} = \mathcal{S}_{(Q,k)}^{\mathcal{F}}$. $\square$

Por el resultado anterior, es suficiente considerar un representante por cada clase de $\mathcal{F}$ -conjugación en $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$. Así, se obtiene el homomorfismo de anillos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\mathcal{F}} : D(\mathcal{F}) &\rightarrow \prod_{[(P,h)]_{\mathcal{F}} \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}} \mathbb{C} \\ z &\mapsto (\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z))_{[(P,h)]_{\mathcal{F}} \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}} \end{aligned}$$

Observemos ahora que la relación de $\mathcal{F}$ -conjugación es más gruesa que la relación de S -conjugación. Por lo tanto, existe una aplicación $\pi : \mathcal{X}_S \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ que envía cada clase $[(P, h)]_S$ a $[(P, h)]_{\mathcal{F}}$. Esta aplicación está bien definida, ya que si dos pares son S -conjugados, entonces también son $\mathcal{F}$ -conjugados. Además, π es sobreyectiva y en consecuencia, induce un homomorfismo de anillos

$$\Phi : \prod_{\xi \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}} \mathbb{C} \rightarrow \prod_{\eta \in \mathcal{X}_S} \mathbb{C},$$

dado por $\Phi((a_{\xi})_{\xi \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}}) = (a_{\pi(\eta)})_{\eta \in \mathcal{X}_S}$. De manera explícita, si $\eta = [(P, h)]_S$, entonces

$$(\Phi((a_{\xi})_{\xi \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}}))_{[(P,h)]_S} = a_{[(P,h)]_{\mathcal{F}}}.$$

Como π es sobreyectiva, Φ es inyectiva.

Lema 4.4.8. *El siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} D(S) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & \prod_{\eta \in \mathcal{X}_S} \mathbb{C} \\ \uparrow \iota & & \uparrow \Phi \\ D(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\mathcal{S}^{\mathcal{F}}} & \prod_{\xi \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}} \mathbb{C} \end{array}$$

conmuta.

Demostración. Consideremos $z \in D(\mathcal{F})$, entonces es suficiente demostrar que $(\mathcal{S} \circ \iota)(z)$ y $(\Phi \circ \mathcal{S}^{\mathcal{F}})(z)$ tienen las mismas coordenadas en $\prod_{\eta \in \mathcal{X}_S} \mathbb{C}$. Sea $\eta = [(P, h)]_S \in \mathcal{X}_S$. Entonces $((\mathcal{S} \circ \iota)(z))_{\eta} = \mathcal{S}_{(P, h)}(z)$. Por otra parte, $((\Phi \circ \mathcal{S}^{\mathcal{F}})(z))_{\eta} = \mathcal{S}_{(P, h)}^{\mathcal{F}}(z)$. Como $\mathcal{S}_{(P, h)}^{\mathcal{F}}$ es la restricción de $\mathcal{S}_{(P, h)}^S$ a $D(\mathcal{F})$, se sigue que $\mathcal{S}_{(P, h)}^{\mathcal{F}}(z) = \mathcal{S}_{(P, h)}(z)$. Por lo tanto, $((\mathcal{S} \circ \iota)(z))_{\eta} = ((\Phi \circ \mathcal{S}^{\mathcal{F}})(z))_{\eta}$ para toda $\eta \in \mathcal{X}_S$. $\square$

Proposición 4.4.9. *El homomorfismo fantasma $\mathcal{S}^{\mathcal{F}} : D(\mathcal{F}) \rightarrow \prod_{\xi \in \mathcal{X}_F} \mathbb{C}$ es inyectivo.*

Demostración. Consideremos $z \in \text{Ker}(\mathcal{S}^{\mathcal{F}})$. Entonces $\Phi(\mathcal{S}^{\mathcal{F}}(z)) = 0$, ya que $\mathcal{S}^{\mathcal{F}}(z) = 0$. Además, por el Lema 4.4.8, se tiene que $\mathcal{S}(\iota(z)) = 0$. De la inyectividad del homomorfismo fantasma de $D(S)$ se sigue que $\iota(z) = 0$. Por lo tanto $z = 0$ y $\text{Ker}(\mathcal{S}^{\mathcal{F}}) = 0$. $\square$

4.5. Ideales primos del anillo global de representaciones

Esta sección está dedicada al estudio de los ideales primos del anillo global de representaciones. Iniciaremos con una breve descripción de los ideales primos de $D(G)$, con G un grupo finito, siguiendo las ideas expuestas en [RV15]. Posteriormente, introduciremos los ideales primos de $D(\mathcal{F})$.

Sea G un grupo finito de orden m , y $A = \mathbb{Z}[\omega]$ el subanillo de $\mathbb{C}$ generado por $\mathbb{Z}$ y las raíces m -ésimas de la unidad. Como los valores de los caracteres de las representaciones de subgrupos de G son sumas de raíces m -ésimas de la unidad, la imagen de cada especie $\mathcal{S}_{(H, h)} : D(G) \rightarrow \mathbb{C}$ está contenida en A . Por lo tanto, consideraremos a partir de ahora las especies como homomorfismos de anillos $\mathcal{S}_{(H, h)} : D(G) \rightarrow A$.

Sea $(H, h) \in \mathcal{X}_G$, y $\mathcal{S}_{(H, h)} : D(G) \rightarrow A$ su especie asociada. Denotaremos por $I_{(H, h)} = \text{Ker}(\mathcal{S}_{(H, h)})$ al núcleo de este homomorfismo. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo no nulo de A y $\pi : A \rightarrow A/\mathfrak{p}$ es la proyección canónica, escribimos $\tilde{\mathcal{S}}_{(H, h)} := \pi \circ \mathcal{S}_{(H, h)}$. Al núcleo de este morfismo lo denotaremos por $I_{(H, h), \mathfrak{p}} := \text{Ker}(\tilde{\mathcal{S}}_{(H, h)}) = \mathcal{S}_{(H, h)}^{-1}(\mathfrak{p})$.

Antes de describir el conjunto de ideales primos de $D(G)$, enunciaremos el siguiente resultado auxiliar.

Lema 4.5.1 ([AM18], Proposición 1.11). *Sean $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ ideales de un anillo conmutativo A . Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A tal que $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}$, para algún i .*

Teorema 4.5.2 ([RV15], Teorema 26). *El espectro primo de $D(G)$ está formado por todos los ideales de la forma $I_{(P, h)}$ e $I_{(P, h), \mathfrak{p}}$, donde $(P, h) \in \mathcal{X}_G$ y $\mathfrak{p}$ recorre los ideales primos no nulos de A .*

Demostración. Sea $\mathcal{S} : D(G) \rightarrow \prod_{(H, h) \in \mathcal{X}_G} \mathbb{C}$ el homomorfismo fantasma de $D(G)$. Por la Proposición 4.3.7, este morfismo es inyectivo; por lo cual, $\bigcap_{(H, h) \in \mathcal{X}_G} I_{(H, h)} = 0$.

Sea $\mathfrak{q}$ un ideal primo de $D(G)$. Entonces, $\bigcap_{(H,h) \in \mathcal{X}_G} I_{(H,h)} \subseteq \mathfrak{q}$. Por el Lema 4.5.1, existe $(H,h) \in \mathcal{X}_G$ tal que $I_{(H,h)} \subseteq \mathfrak{q}$. Por lo tanto, $\mathfrak{q}/I_{(H,h)}$ es un ideal primo de $D(G)/I_{(H,h)}$. Además, por el primer teorema de isomorfía,

$$D(G)/I_{(H,h)} \cong \text{Im}(\mathcal{S}_{(H,h)}) \subseteq A.$$

Así, $\mathfrak{q}/I_{(H,h)}$ corresponde a un ideal primo de $\text{Im}(\mathcal{S}_{(H,h)})$. Si este ideal primo es cero, entonces $\mathfrak{q}/I_{(H,h)} = 0$, y por tanto $\mathfrak{q} = I_{(H,h)}$. En caso contrario, como $\text{Im}(\mathcal{S}_{(H,h)}) \subseteq A$ y A es integral sobre $\text{Im}(\mathcal{S}_{(H,h)})$, existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A tal que $\mathfrak{q}/I_{(H,h)} = \mathfrak{p} \cap \text{Im}(\mathcal{S}_{(H,h)})$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{q} = \{z \in D(G) \mid \mathcal{S}_{(H,h)}(z) \in \mathfrak{p}\} = \mathcal{S}_{(H,h)}^{-1}(\mathfrak{p}) = I_{(H,h),\mathfrak{p}}.$$

De este modo se tiene que todos los ideales primos de $D(G)$ son de esta forma. $\square$

En general, el espectro primo de $D(G)$ no necesariamente es conexo en la topología de Zariski. Por resultados clásicos de álgebra conmutativa, las descomposiciones de $\text{Spec}(D(G))$ en componentes abiertas y cerradas están relacionadas con los idempotentes de $D(G)$. En particular, el número de componentes conexas de $\text{Spec}(D(G))$ coincide con el número de idempotentes primitivos de $D(G)$. Para más detalles, sugerimos consultar [RV15], Sec. 5.3. Motivados por lo anterior, estudiaremos ahora los ideales primos de $D(\mathcal{F})$. Como veremos al final de esta sección, existe una diferencia importante entre $\text{Spec}(D(G))$ y $\text{Spec}(D(\mathcal{F}))$: en el caso de los sistemas de fusión, el espectro primo de $D(\mathcal{F})$ resulta ser conexo. Hasta donde sabemos, los ideales primos de $D(\mathcal{F})$ no han sido estudiados previamente.

Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S , y $(P,h) \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$. A partir de ahora, consideraremos la especie $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$ como un homomorfismo de anillos con codominio en A , donde A es el anillo definido anteriormente. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A y $\pi: A \rightarrow A/\mathfrak{p}$ la proyección canónica. Entonces la composición $\tilde{\mathcal{S}}_{(P,h)}^{\mathcal{F}} := \pi \circ \mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}} : D(\mathcal{F}) \rightarrow A/\mathfrak{p}$ es un homomorfismo de anillos. Denotaremos por

$$\begin{aligned} I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} &= \text{Ker}(\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}) = \{z \in D(\mathcal{F}) \mid \mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z) = 0\}, \\ I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} &= \text{Ker}(\tilde{\mathcal{S}}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}) = \{z \in D(\mathcal{F}) \mid \mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}\}, \end{aligned}$$

al núcleo de $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{S}}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$, respectivamente. Con esta notación, las propiedades de las especies de $D(S)$ inducen de manera natural los siguientes resultados para las especies de $D(\mathcal{F})$.

Proposición 4.5.3. *Sea $\mathcal{F}$ un sistema de fusión sobre un p -grupo S y $P \leq S$. Sean $h_1, h_2 \in P$ tales que $h_1 h_2 = h_2 h_1$. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo no nulo de A tal que $\text{char}(A/\mathfrak{p}) = p$, entonces $\mathcal{S}_{(P,h_1)}^{\mathcal{F}}(z) - \mathcal{S}_{(P,h_1 h_2)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}$ para todo $z \in D(\mathcal{F})$.*

Demostración. Sean (P, h_1) y $(P, h_1 h_2)$ elementos de $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$, y $\mathcal{S}_{(P,h_1)}^S, \mathcal{S}_{(P,h_1 h_2)}^S : D(S) \rightarrow A$ sus especies asociadas. Como P es un subgrupo del p -grupo S , el elemento h_2 tiene orden una

potencia de p . Además, por hipótesis, $\text{char}(A/\mathfrak{p}) = p$. Por el Lema 23 de [RV15], para todo $z \in D(S)$ se tiene

$$\mathcal{S}_{(P,h_1)}(z) - \mathcal{S}_{(P,h_1h_2)}(z) \in \mathfrak{p}. \quad (4.9)$$

Dado que $D(\mathcal{F})$ es un subanillo de $D(S)$, la igualdad anterior se cumple, en particular, para todo $z \in D(\mathcal{F})$. Al restringir las especies de $D(S)$ a $D(\mathcal{F})$, obtenemos $\mathcal{S}_{(P,h_1)}^{\mathcal{F}}(z) - \mathcal{S}_{(P,h_1h_2)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}$. $\square$

Corolario 4.5.4. *Bajo las hipótesis de la Proposición 4.5.3, se tiene $I_{(P,h_1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = I_{(P,h_1h_2),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Por la Proposición 4.5.3, para todo $z \in D(\mathcal{F})$ se tiene $\mathcal{S}_{(P,h_1)}^{\mathcal{F}}(z) - \mathcal{S}_{(P,h_1h_2)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\mathcal{S}_{(P,h_1)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}$ si y solo si $\mathcal{S}_{(P,h_1h_2)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}$. De este modo, $z \in I_{(P,h_1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$ si y solo si $z \in I_{(P,h_1h_2),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$. Por lo tanto, $I_{(P,h_1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = I_{(P,h_1h_2),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$. $\square$

En el Lema 23 de [RV15], se asume que los elementos h_1 y h_2 tienen orden p^k , con p un número primo y $k \in \mathbb{N}$. En nuestro caso, como P es un subgrupo de un p -grupo, todo elemento de P tiene orden una potencia de p . Por lo tanto, la hipótesis del lema se satisface automáticamente para los ideales primos $\mathfrak{p}$ tales que $q(\mathfrak{p}) = p$.

Observemos que $I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} = \text{Ker}(\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}})$ es un ideal de $D(\mathcal{F})$, ya que es el núcleo de un homomorfismo de anillos. Más aún, es un ideal primo, pues $D(\mathcal{F})/I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} \cong \text{Im}(\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}) \subseteq A$, y A es un dominio entero. Análogamente, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo no nulo de A , se tiene que

$$I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = \text{Ker}(\tilde{\mathcal{S}}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}) = \{z \in D(\mathcal{F}) \mid \mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}\}$$

es un ideal de $D(\mathcal{F})$, el cual también es primo.

Además, si $\mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle$ es un ideal primo de A , entonces $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = q(\mathfrak{p})\mathbb{Z}$ para algún número primo $q(\mathfrak{p})$. Como A es un dominio de Dedekind, todo ideal primo no nulo de A es maximal. En consecuencia, $A/\mathfrak{p}$ es un campo finito de característica $q(\mathfrak{p})$. Esto nos permite distinguir los ideales de la forma $I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$ según si $q(\mathfrak{p}) = p$ ó $q(\mathfrak{p}) \neq p$.

Teorema 4.5.5. *El espectro primo de $D(\mathcal{F})$ consiste de los siguientes ideales:*

- Tipo I. $I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} = \{z \in D(\mathcal{F}) \mid \mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z) = 0\}$.
- Tipo II. *Aquellos de la forma*

$$I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = \{z \in D(\mathcal{F}) \mid \mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}\},$$

donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo no nulo de A tal que $q(\mathfrak{p}) = p$.

- Tipo III: *Aquellos de la forma*

$$I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = \{z \in D(\mathcal{F}) \mid \mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}\},$$

donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo no nulo de A tal que $q(\mathfrak{p}) = q \neq p$.

Demostración. Ya hemos observado que todos los ideales de Tipo I, Tipo II y Tipo III son ideales primos de $D(\mathcal{F})$. Resta probar que todo ideal primo de $D(\mathcal{F})$ es de una de estas formas.

Sea $\mathcal{S}^{\mathcal{F}} : D(\mathcal{F}) \rightarrow \prod_{(P,h) \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}} A$ el morfismo fantasma. Por la Proposición 4.4.9, este morfismo es inyectivo. En consecuencia, $\bigcap_{(P,h) \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}} I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} = 0$. Sea $\mathfrak{q}$ un ideal primo de $D(\mathcal{F})$. Entonces $\bigcap_{(P,h) \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}} I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} \subseteq \mathfrak{q}$. Por el Lema 4.5.1, existe $(P, h) \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ tal que $I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} \subseteq \mathfrak{q}$. Por lo tanto, $\mathfrak{q}/I_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$ es un ideal primo de $D(\mathcal{F})/I_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$. Además, por el primer teorema de isomorfía,

$$D(\mathcal{F})/I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} \cong \text{Im}(\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}) \subseteq A.$$

Así, $\mathfrak{q}/I_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$ se identifica con un ideal primo de $\text{Im}(\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}})$. Si $\mathfrak{q}/I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} = 0$, entonces $\mathfrak{q} = I_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$, y por tanto $\mathfrak{q}$ es de Tipo I.

Supongamos ahora que $\mathfrak{q}/I_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$ es un ideal primo no nulo de $\text{Im}(\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}})$. Como $\text{Im}(\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}})$ contiene a $\mathbb{Z}$ y A es integral sobre $\mathbb{Z}$, se sigue que A es integral sobre $\text{Im}(\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}})$. Por el teorema de going-up (véase [AM18, pág. 62]), existe un ideal primo no nulo $\mathfrak{p}$ de A tal que $\mathfrak{q}/I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} = \mathfrak{p} \cap \text{Im}(\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}})$. En consecuencia,

$$\mathfrak{q} = \{z \in D(\mathcal{F}) \mid \mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}\} = I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}.$$

Si $q(\mathfrak{p}) = p$, entonces $\mathfrak{q}$ es de Tipo II. Si $q(\mathfrak{p}) \neq p$, entonces $\mathfrak{q}$ es de Tipo III. Por lo tanto, todo ideal primo de $D(\mathcal{F})$ es de alguno de los tres tipos descritos. $\square$

A diferencia del anillo global de representaciones de un grupo finito, el espectro primo de $D(\mathcal{F})$ tiene una única componente conexa, es decir, es conexo. Para ver esto, introducimos los siguientes resultados.

Lema 4.5.6. *Si $\mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle$ es un ideal primo de A tal que $q(\mathfrak{p}) = p$, entonces $I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = I_{(P,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Sea $z = \sum_{K,W} \lambda_{K,W} [K, W] \in D(\mathcal{F})$, donde $\lambda_{K,W} \in \mathbb{Z}$. Como $D(\mathcal{F})$ es un subanillo de $D(S)$ y $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$ es la restricción de $\mathcal{S}_{(P,h)}$ a $D(\mathcal{F})$, es suficiente probar que $\mathcal{S}_{(P,h)}(z) \equiv \mathcal{S}_{(P,1)}(z) \pmod{\mathfrak{p}}$. Por linealidad, basta verificar la congruencia en un generador $[K, W]$. Por la Proposición 4.3.4,

$$\mathcal{S}_{(P,h)}([K, W]) = \sum_{\substack{sK \in S/K \\ P \leq sKs^{-1}}} \chi_W(s^{-1}hs).$$

Como $P \leq sKs^{-1}$, se tiene que $s^{-1}hs \in K$. Además, $s^{-1}hs$ es un elemento de orden una potencia de p , pues $h \in P \leq S$ y S es un p -grupo. La demostración del Lema 6.3 de [Ati61] establece que para todo carácter χ de S y todo elemento u de orden una potencia de p se cumple $\chi(u) \equiv \chi(1) \pmod{\mathfrak{p}}$. Aplicando esto a nuestro caso particular, obtenemos

$$\chi_W(s^{-1}hs) \equiv \chi_W(1) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{S}_{(P,h)}([K, W]) \equiv \sum_{\substack{sK \in S/K \\ P \leq sKs^{-1}}} \chi_W(1) = \mathcal{S}_{(P,1)}^S([K, W]) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Por linealidad, se sigue que $\mathcal{S}_{(P,h)}(z) \equiv \mathcal{S}_{(P,1)}(z) \pmod{\mathfrak{p}}$ para todo $z \in D(\mathcal{F})$. Así, $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z) - \mathcal{S}_{(P,1)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\mathcal{S}_{(P,h)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}$ si y solo si $\mathcal{S}_{(P,1)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}$, y $z \in I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$ si y solo si $z \in I_{(P,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$. $\square$

Teorema 4.5.7. *Sea $P \leq S$ y $Q \trianglelefteq P$ un subgrupo normal. Si $\mathfrak{p} \neq \langle 0 \rangle$ es un ideal primo de A tal que $q(\mathfrak{p}) = p$, entonces $I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = I_{(Q,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Por el Lema 4.5.6, se tiene $I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = I_{(P,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$ y $I_{(Q,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = I_{(Q,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$. Por lo tanto, basta probar que $I_{(P,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = I_{(Q,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$. Para ello, mostraremos que para todo $z \in D(\mathcal{F})$ se cumple $\mathcal{S}_{(P,1)}^{\mathcal{F}}(z) - \mathcal{S}_{(Q,1)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}$. Sea $z = \sum_{K,W} \lambda_{K,W} [K, W] \in D(\mathcal{F})$. Usando la propiedad i) del Teorema 4.3.5, obtenemos

$$\mathcal{S}_{(P,1)}^{\mathcal{F}}(z) = \sum_{K,W} \lambda_{K,W} \varphi_P(S/K) \dim W, \quad \mathcal{S}_{(Q,1)}^{\mathcal{F}}(z) = \sum_{K,W} \lambda_{K,W} \varphi_Q(S/K) \dim W.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{S}_{(P,1)}^{\mathcal{F}}(z) - \mathcal{S}_{(Q,1)}^{\mathcal{F}}(z) = \sum_{K,W} \lambda_{K,W} (\varphi_P(S/K) - \varphi_Q(S/K)) \dim W.$$

Ahora veamos que $\varphi_P(S/K) - \varphi_Q(S/K) \in p\mathbb{Z}$. Como $Q \trianglelefteq P$, el cociente P/Q actúa sobre el conjunto de puntos fijos $(S/K)^Q$. Además, los puntos fijos de esta acción son precisamente $((S/K)^Q)^{P/Q} = (S/K)^P$. En efecto, un punto de S/K fijo por Q es fijo por P/Q si y solo si es fijo por todo P . Como P/Q es un p -grupo, toda órbita de esta acción tiene cardinalidad una potencia de p . En consecuencia, $|(S/K)^Q| \equiv |(S/K)^P| \pmod{p}$. Es decir, $\varphi_Q(S/K) \equiv \varphi_P(S/K) \pmod{p}$. De aquí se sigue que $\varphi_P(S/K) - \varphi_Q(S/K) \in \mathfrak{p}$. Como $q(\mathfrak{p}) = p$, se tiene $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$, y en particular $p\mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{p}$. Por lo tanto,

$$(\varphi_P(S/K) - \varphi_Q(S/K)) \dim W \in \mathfrak{p}.$$

En consecuencia, $\mathcal{S}_{(P,1)}^{\mathcal{F}}(z) - \mathcal{S}_{(Q,1)}^{\mathcal{F}}(z) \in \mathfrak{p}$. Luego $z \in I_{(P,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$ si y solo si $z \in I_{(Q,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$. De este modo, $I_{(P,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = I_{(Q,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$. $\square$

Proposición 4.5.8. *Existe un ideal maximal de $D(\mathcal{F})$ que contiene a todos los ideales primos minimales de $D(\mathcal{F})$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo no nulo de A tal que $q(\mathfrak{p}) = p$. Consideremos $\mathfrak{m} := I_{(1,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$, que es un ideal de $D(\mathcal{F})$. Por definición, $\mathfrak{m} = \text{Ker}(\tilde{\mathcal{S}}_{(1,1)}^{\mathcal{F}})$. Luego, por el primer teorema de

isomorfismo, $D(\mathcal{F})/\mathfrak{m} \cong \text{Im}(\tilde{\mathcal{S}}_{(1,1)}^{\mathcal{F}})$. Veamos que $\text{Im}(\tilde{\mathcal{S}}_{(1,1)}^{\mathcal{F}})$ es un campo. Para un generador $[K, W]$ de $D(S)$ se tiene

$$\mathcal{S}_{(1,1)}([K, W]) = \sum_{sK \in S/K} \chi_W(1) = |S : K| \dim_{\mathbb{C}}(W) \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, la especie $\mathcal{S}_{(1,1)}^{\mathcal{F}}$ toma valores en $\mathbb{Z} \subseteq A$. Además, $\mathcal{S}_{(1,1)}^{\mathcal{F}}([S, \mathbb{C}]) = 1$, de donde $\text{Im}(\mathcal{S}_{(1,1)}^{\mathcal{F}}) = \mathbb{Z}$. En consecuencia, $\text{Im}(\tilde{\mathcal{S}}_{(1,1)}^{\mathcal{F}}) = \pi(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z})$. Como $q(\mathfrak{p}) = p$, se tiene $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p$, y por lo tanto $\text{Im}(\tilde{\mathcal{S}}_{(1,1)}^{\mathcal{F}}) \cong \mathbb{Z}/p$. Así, $D(\mathcal{F})/\mathfrak{m}$ es un campo y $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $D(\mathcal{F})$.

Veamos ahora que todo ideal primo minimal de $D(\mathcal{F})$ está contenido en $\mathfrak{m}$. Sea $\mathfrak{q}$ un ideal primo minimal de $D(\mathcal{F})$. Por el Teorema 4.5.5, el ideal $\mathfrak{q}$ es de la forma $I_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$. En efecto, si $\mathfrak{q}$ fuera de la forma $I_{(P,h),\mathfrak{r}}^{\mathcal{F}}$ con $\mathfrak{r} \neq \langle 0 \rangle$, entonces contendría propiamente al ideal primo $I_{(P,h)}^{\mathcal{F}}$, y por tanto no sería minimal.

Por otra parte, como $0 \in \mathfrak{p}$, se tiene $I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} \subseteq I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$. Además, dado que $q(\mathfrak{p}) = p$, por el Lema 4.5.6 se tiene $I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = I_{(P,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$. Aplicando el Teorema 4.5.5 a la cadena normal $1 \trianglelefteq P$, obtenemos $I_{(P,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = I_{(1,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$. Por lo tanto,

$$\mathfrak{q} = I_{(P,h)}^{\mathcal{F}} \subseteq I_{(P,h),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = I_{(1,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}} = \mathfrak{m}. \quad \square$$

Corolario 4.5.9. *El espectro primo $\text{Spec}(D(\mathcal{F}))$ es conexo en la topología de Zariski.*

Demostración. Las componentes irreducibles de $\text{Spec}(D(\mathcal{F}))$ son los cerrados de la forma $V(\mathfrak{q})$, donde $\mathfrak{q}$ recorre los ideales minimales de $D(\mathcal{F})$. Por la Proposición 4.5.8, existe un ideal maximal $\mathfrak{m} = I_{(1,1),\mathfrak{p}}^{\mathcal{F}}$ que contiene a todos los ideales primos minimales de $D(\mathcal{F})$. Por lo tanto, para todo ideal primo minimal $\mathfrak{q}$ se tiene $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$, lo cual implica que $\mathfrak{m} \in V(\mathfrak{q})$. En consecuencia, todas las componentes irreducibles de $\text{Spec}(D(\mathcal{F}))$ contienen a $\mathfrak{m}$. Por lo tanto, las componentes irreducibles tienen intersección no vacía, y $\text{Spec}(D(\mathcal{F}))$ es conexo. $\square$

Sea G un grupo finito. El Corolario 36 de [RV15] afirma que el número de idempotentes primitivos de $D(G)$, y por tanto el número de componentes conexas, es igual al número de clases de conjugación de subgrupos perfectos. En nuestro caso, al ser $\text{Spec}(D(\mathcal{F}))$ conexo, se tiene que los únicos idempotentes primitivos de $D(\mathcal{F})$ son el 0 y el 1.

Capítulo 5

Primeros pasos hacia un teorema de completación

Los teoremas de completación reflejan una estrecha relación entre una teoría de cohomología equivariante y su contraparte no equivariante. En ciertos casos, dicha relación se expresa mediante un isomorfismo de la forma

$$(E_G^*(\text{pt}))_{I_G}^\wedge \cong E^*(BG),$$

donde $E_G^*(\text{pt})$ denota una teoría de cohomología equivariante evaluada en el punto, $E^*(BG)$ denota su contraparte no equivariante evaluada en el espacio clasificante BG , e I_G es el ideal de aumentación correspondiente [La 21]. En este trabajo estudiamos dos de los teoremas de completación más conocidos, cuando G es un grupo finito: el Teorema de completación de Segal-Carlsson (Teorema 2.6.3) y el Teorema de completación de Atiyah-Segal (Teorema 3.6.1).

En el capítulo anterior estudiamos el anillo $D(G)$, el cual es un anillo fundamental de representaciones, en el sentido de Bouc [Bou10]), asociado al grupo G . Como vimos anteriormente, este anillo guarda una relación con el anillo de Burnside $A(G)$ y con el anillo de representaciones $R(G)$. Por esta razón, surge de manera natural la pregunta de si existe un teorema de completación para $D(G)$, análogo a los teoremas de completación mencionados anteriormente.

Hasta donde sabemos, esta pregunta no ha sido abordada previamente en la literatura. En consecuencia, no se cuenta todavía con una respuesta definitiva ni con una formulación establecida del objeto geométrico que debería aparecer del lado completado. Debido a ello, en este último capítulo proponemos un primer acercamiento al problema. Para ello introducimos la noción de G -haz vectorial graduado por un G -conjunto finito, la cual puede interpretarse como un análogo geométrico de una representación global de G . Esta construcción nos permitirá formular un posible candidato a invariante homotópico relacionado con

una completación del anillo $D(G)$.

5.1. Haces vectoriales graduados

Antes de dar la definición de haz vectorial graduado, introducimos la siguiente notación. Si $E \rightarrow X$ es un haz vectorial y $\{E_z \rightarrow X\}_{z \in Z}$ es una familia finita de subhaces de E , entonces podemos considerar su suma fibra a fibra dentro de E . Es decir, para cada $x \in X$, consideramos el subespacio $\sum_{z \in Z} (E_z)_x \subseteq E_x$. Cuando esta suma es directa para todo $x \in X$, escribiremos $\bigoplus_{z \in Z} E_z$ para denotar la suma directa interna de estos subhaces. Así, la igualdad

$$E = \bigoplus_{z \in Z} E_z$$

significa que, para cada $x \in X$, se tiene una descomposición de espacios vectoriales $E_x = \bigoplus_{z \in Z} (E_z)_x$. En este caso, la suma directa se entiende como una suma directa interna de subhaces de E . Sin embargo, esta suma directa interna es isomorfa a la suma directa externa usual de los haces E_z , mediante el morfismo que envía $(v_z)_{z \in Z}$ a $\sum_{z \in Z} v_z$.

Definición 5.1.1 (Haz vectorial Z -graduado). Sea X un espacio compacto y Hausdorff, Z un conjunto finito. Un **haz vectorial Z -graduado** sobre X es un haz vectorial $E \rightarrow X$ junto con una familia $\{E_z \rightarrow X\}_{z \in Z}$ de subhaces vectoriales de E tales que $E = \bigoplus_{z \in Z} E_z$, donde la suma directa se entiende como suma directa interna de subhaces.

De la definición anterior, es importante resaltar que un haz vectorial Z -graduado se interpreta como la pareja $(E \rightarrow X, \{E_z\}_{z \in Z})$, donde $\{E_z\}$ es una familia de subhaces vectoriales de E sobre X indexada por Z , y la descomposición de E como suma directa de los subhaces E_z sí depende de la familia y del conjunto por el cual se está graduando.

Definición 5.1.2 (Homomorfismo de haces graduados). Sea $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ un haz vectorial Z -graduado y $(E', \{E'_w\}_{w \in W})$ un haz vectorial W -graduado, ambos sobre el mismo espacio. Un **homomorfismo** de $(E, \{E_z\})$ a $(E', \{E'_w\})$ es una pareja (α, φ) , donde $\alpha : Z \rightarrow W$ es una función de conjuntos y $\varphi : E \rightarrow E'$ es un homomorfismo de haces sobre X tal que $\varphi(E_z) \subseteq E'_{\alpha(z)}$. Diremos que (α, φ) es un isomorfismo de haces vectoriales graduados si α es biyectiva y φ es un isomorfismo de haces vectoriales.

Dado un espacio topológico X , denotaremos por $\text{Vect}^{\text{grad}}(X)$ al conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales graduados sobre X . Es decir, sus elementos están representados por haces vectoriales Z -graduados $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$, donde Z es un conjunto finito y los isomorfismos entre haces graduados preservan la graduación mediante una biyección entre los conjuntos por los que se toma la graduación.

Para cada $n \geq 0$, definimos

$$\text{Vect}^{n\text{-grad}}(X) := \{[(E, \{E_z\}_{z \in Z})] \in \text{Vect}^{\text{grad}}(X) \mid |Z| = n\}.$$

De este modo, se tiene una descomposición

$$\text{Vect}^{\text{grad}}(X) = \coprod_{n \geq 0} \text{Vect}^{n\text{-grad}}(X).$$

Ahora, dados dos elementos $[(E, \{E_z\}_{z \in Z})]$ y $[(E', \{E'_w\}_{w \in W})]$ en $\text{Vect}^{\text{grad}}(X)$, consideremos los representantes $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ y $(E', \{E'_w\}_{w \in W})$. Definimos su **suma directa externa** como

$$(E, \{E_z\}_{z \in Z}) \boxplus (E', \{E'_w\}_{w \in W}) := ((E \oplus E'), \{F_u\}_{u \in Z \amalg W}),$$

donde $E \oplus E'$ denota la suma directa de haces vectoriales y la familia $\{F_u\}_{u \in Z \amalg W}$ está dada por

$$F_u = \begin{cases} E_u & \text{si } u \in Z, \\ E'_u & \text{si } u \in W. \end{cases}$$

Veamos que esta construcción es de nuevo un haz vectorial graduado sobre X . Como $E = \bigoplus_{z \in Z} E_z$ y $E' = \bigoplus_{w \in W} E'_w$, para todo $x \in X$, al nivel de fibras se tiene

$$(E \oplus E')_x = E_x \oplus E'_x = \left(\bigoplus_{z \in Z} (E_z)_x \right) \oplus \left(\bigoplus_{w \in W} (E'_w)_x \right) = \bigoplus_{u \in Z \amalg W} (F_u)_x.$$

Por lo tanto,

$$E \oplus E' = \bigoplus_{u \in Z \amalg W} F_u$$

como suma directa interna de subhaces, y $(E \oplus E', \{F_u\}_{u \in Z \amalg W})$ es un haz vectorial $(Z \amalg W)$ -graduado sobre X . Esto induce una aplicación a nivel de clases de isomorfismo

$$\begin{aligned} \boxplus : \text{Vect}^{\text{grad}}(X) \times \text{Vect}^{\text{grad}}(X) &\longrightarrow \text{Vect}^{\text{grad}}(X), \\ ([E, \{E_z\}_{z \in Z}], [E', \{E'_w\}_{w \in W}]) &\longmapsto [(E \oplus E', \{F_u\}_{u \in Z \amalg W})]. \end{aligned}$$

Veamos ahora que esta operación está bien definida, es decir, no depende del representante de cada clase de isomorfismo. Sean $[(E, \{E_z\}_{z \in Z})]$ y $[(E', \{E'_w\}_{w \in W})]$, y supongamos que se tienen los isomorfismos de haces graduados $(E, \{E_z\}_{z \in Z}) \cong (\tilde{E}, \{\tilde{E}_{\tilde{z}}\}_{\tilde{z} \in \tilde{Z}})$ y $(E', \{E'_w\}_{w \in W}) = (\tilde{E}', \{\tilde{E}'_{\tilde{w}}\}_{\tilde{w} \in \tilde{W}})$. Entonces existen parejas $(\alpha, \varphi) : (E, \{E_z\}) \rightarrow (\tilde{E}, \{\tilde{E}_{\tilde{z}}\})$ y $(\beta, \psi) : (E', \{E'_w\}) \rightarrow (\tilde{E}', \{\tilde{E}'_{\tilde{w}}\})$, donde $\alpha : Z \rightarrow \tilde{Z}$ y $\beta : W \rightarrow \tilde{W}$ son biyecciones, y $\varphi : E \rightarrow \tilde{E}$, $\psi : E' \rightarrow \tilde{E}'$ son isomorfismos de haces vectoriales tales que $\varphi(E_z) = \tilde{E}_{\alpha(z)}$ y $\psi(E'_w) = \tilde{E}'_{\beta(w)}$.

Consideremos la biyección inducida $\alpha \amalg \beta : Z \amalg W \rightarrow \widetilde{Z} \amalg \widetilde{W}$ en la unión disjunta, y el morfismo de haces $\varphi \oplus \psi : E \oplus E' \rightarrow \widetilde{E} \oplus \widetilde{E}'$, el cual es un isomorfismo porque φ y ψ lo son. Sea $\{F_u\}_{u \in Z \amalg W}$ (resp. $\{\widetilde{F}_{\widetilde{u}}\}_{\widetilde{u} \in \widetilde{Z} \amalg \widetilde{W}}$) la familia de subhaces asociada a $E \oplus E'$ (resp. $\widetilde{E} \oplus \widetilde{E}'$). Por construcción, si $u \in Z$, entonces $F_u = E_u$ y por tanto

$$(\varphi \oplus \psi)(F_u) = (\varphi \oplus \psi)(E_u) = \varphi(E_u) = \widetilde{E}_{\alpha(u)} = \widetilde{F}_{(\alpha \amalg \beta)(u)}.$$

Análogamente, si $u \in W$ se tiene

$$(\varphi \oplus \psi)(F_u) = (\varphi \oplus \psi)(E'_u) = \psi(E'_u) = \widetilde{E}'_{\beta(u)} = \widetilde{F}_{(\alpha \amalg \beta)(u)}.$$

Por lo tanto, $(\alpha \amalg \beta, \varphi \oplus \psi)$ es un isomorfismo de haces $(Z \amalg W)$ -graduados. En consecuencia, $[(E \oplus E', \{F_u\}_{u \in Z \amalg W})] = [(\widetilde{E} \oplus \widetilde{E}', \{\widetilde{F}_{\widetilde{u}}\}_{\widetilde{u} \in \widetilde{Z} \amalg \widetilde{W})]$. Así, la operación $\boxplus$ está bien definida en $\text{Vect}^{\text{grad}}(X)$.

Proposición 5.1.3. *El conjunto $\text{Vect}^{\text{grad}}(X)$ junto con la suma directa externa de haces vectoriales graduados es un monoide conmutativo.*

Demostración. La asociatividad y conmutatividad de la suma directa externa $\boxplus$ se tienen de manera inmediata, ya que tanto la suma directa interna como la unión disjunta de conjuntos lo son. Dado un haz vectorial graduado $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} (E, \{E_z\}_{z \in Z}) \boxplus (X \times \{0\}, \emptyset) &= (E \oplus (X \times \{0\}), \{E_z\}_{z \in Z}) \\ &\cong (E, \{E_z\}_{z \in Z}). \end{aligned}$$

Así, $(X \times \{0\}, \emptyset)$ es el elemento neutro de $(\text{Vect}^{\text{grad}}(X), \boxplus)$. □

Proposición 5.1.4. *El monoide $\text{Vect}^{\text{grad}}(X)$ es de factorización única y sus átomos son de la forma $[(E, \{E_z\}_{z \in Z})]$, donde Z consta de un solo punto.*

Demostración. La demostración del Teorema 4.1.9 se adapta directamente a este contexto. □

5.2. K -teoría de haces vectoriales graduados

En el apartado anterior estudiamos el monoide $\text{Vect}^{\text{grad}}(X)$, donde X es un espacio compacto y Hausdorff. En esta sección, nos interesa estudiar el grupo que se obtiene al aplicar la construcción de Grothendieck a dicho monoide. Posteriormente, definiremos su versión equivariante.

La construcción de Grothendieck de $\text{Vect}^{\text{grad}}(X)$ está dada por

$$K(\text{Vect}^{\text{grad}}(X)) = \frac{\mathbb{Z}[\text{Vect}^{\text{grad}}(X)]}{M},$$

donde M es el subgrupo generado por los elementos de la forma

$$[(E, \{E_z\}_{z \in Z})] + [(E', \{E'_w\}_{w \in W})] = [(E \boxplus E', \{F_u\}_{u \in Z \amalg W})].$$

Sean $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ y $(E', \{E'_z\}_{z \in Z})$ dos haces vectoriales Z -graduados sobre X . Es fácil verificar que $(E \oplus E', \{E_z \oplus E'_z\}_{z \in Z})$ es un haz vectorial Z -graduado sobre X . Luego cada tupla $(Z, E, \{E_z\}_{z \in Z}, E', \{E'_z\}_{z \in Z})$ determina un elemento de $K(\text{Vect}^{\text{grad}}(X))$ dado por

$$[(E, \{E_z\}_{z \in Z})] + [(E', \{E'_z\}_{z \in Z})] - [(E \oplus E', \{E_z \oplus E'_z\}_{z \in Z})].$$

Denotemos por N al ideal generado por todos estos elementos.

Definición 5.2.1 (K -teoría global). Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Definimos la K -teoría global de X como

$$KD(X) = \frac{K(\text{Vect}^{\text{grad}}(X))}{N}.$$

Nota 5.2.2. El término “global” puede dar lugar a confusión con la K -teoría global definida por S. Schwede. Hasta el momento, no hemos encontrado una relación directa entre nuestra definición y la de Schwede. La elección de este nombre se debe a la analogía con el anillo global de representaciones.

Veamos ahora que la K -teoría global $KD(X)$ tiene estructura de anillo conmutativo. Para esto, necesitamos introducir el producto de haces vectoriales graduados. Sean $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ y $(E', \{E'_w\}_{w \in W})$ dos haces vectoriales graduados sobre X , Definimos su producto como

$$(E, \{E_z\}_{z \in Z}) \cdot (E', \{E'_w\}_{w \in W}) := (E \otimes_{\mathbb{C}} E', \{(E_z \otimes_{\mathbb{C}} E'_w)_{(z,w)}\}_{(z,w) \in Z \times W}).$$

Aquí $E_z \otimes_{\mathbb{C}} E'_w$ se considera como subhaz de $E \otimes_{\mathbb{C}} E'$ mediante las inclusiones naturales. Como $E = \bigoplus_{z \in Z} E_z$ y $E' = \bigoplus_{w \in W} E'_w$, se tiene una descomposición fibra a fibra

$$(E \otimes_{\mathbb{C}} E')_x = E_x \otimes_{\mathbb{C}} E'_x = \bigoplus_{(z,w) \in Z \times W} (E_z)_x \otimes_{\mathbb{C}} (E'_w)_x.$$

Por lo tanto, $(E \otimes_{\mathbb{C}} E', \{E_z \otimes_{\mathbb{C}} E'_w\}_{(z,w) \in Z \times W})$ es un haz vectorial $(Z \times W)$ -graduado sobre X . Se verifica fácilmente que este producto induce una operación bien definida en $\text{Vect}^{\text{grad}}(X)$.

Sean $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ y $(E', \{E'_z\}_{z \in Z})$ dos haces vectoriales Z -graduados, y sea $(F, \{F_w\}_{w \in W})$ un haz vectorial W -graduado. Entonces

$$\begin{aligned} ((E, \{E_z\}_{z \in Z}) \oplus (E', \{E'_z\}_{z \in Z})) \cdot (F, \{F_w\}_{w \in W}) &= (E \oplus E', \{E_z \oplus E'_z\}_{z \in Z}) \cdot (F, \{F_w\}_{w \in W}) \\ &= ((E \oplus E') \otimes F, \{(E_z \oplus E'_z) \otimes F_w\}_{(z,w) \in Z \times W}) \\ &\cong ((E \otimes F) \oplus (E' \otimes F), \{(E_z \otimes F_w) \oplus (E'_z \otimes F_w)\}_{(z,w) \in Z \times W}) \\ &= (E \otimes F, \{E_z \otimes F_w\}_{(z,w) \in Z \times W}) \oplus (E' \otimes F, \{E'_z \otimes F_w\}_{(z,w) \in Z \times W}). \end{aligned}$$

El isomorfismo anterior se obtiene de la distributividad del producto tensorial de haces vectoriales sobre la suma directa. De manera análoga se demuestra la distributividad por la derecha. Por lo tanto, el producto es compatible con las relaciones que definen $KD(X)$. De esta manera, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.2.3. *$KD(X)$ es un anillo conmutativo con uno, donde el neutro multiplicativo corresponde al haz vectorial trivial de rango uno $X \times \mathbb{C}$, graduado por un conjunto de cardinalidad uno.*

Como veremos a continuación, la K -teoría global de un espacio compacto y Hausdorff X no contiene información adicional respecto de la K -teoría ordinaria. Esto se debe a que las relaciones impuestas en la definición de $KD(X)$ identifican un haz graduado con la suma de sus componentes homogéneas.

Teorema 5.2.4. *Sea X un espacio compacto y Hausdorff. Entonces $KD(X) \cong K(X)$ como anillos.*

Demostración. Sea $U : \text{Vect}^{\text{grad}}(X) \rightarrow \text{Vect}(X)$ la aplicación definida por $U([(E, \{E_z\}_{z \in Z})]) = [E]$. Esta aplicación está bien definida, pues todo isomorfismo de haces graduados induce, en particular, un isomorfismo entre los haces vectoriales subyacentes.

Veamos que U es un morfismo de monoides. Si $[(E, \{E_z\}_{z \in Z})]$ y $[(E', \{E'_w\}_{w \in W})]$ son elementos de $\text{Vect}^{\text{grad}}(X)$, entonces

$$\begin{aligned} U([(E, \{E_z\}_{z \in Z})] \boxplus [(E', \{E'_w\}_{w \in W})]) &= U([(E \oplus E', \{F_u\}_{u \in Z \amalg W})]) \\ &= [E \oplus E'] \\ &= [E] + [E'] \\ &= U([(E, \{E_z\}_{z \in Z})]) + U([(E', \{E'_w\}_{w \in W})]). \end{aligned}$$

Por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, U induce un morfismo de grupos abelianos $K(U) : K(\text{Vect}^{\text{grad}}(X)) \rightarrow K(X)$. Ahora veamos que $K(U)$ desciende al cociente $KD(X)$. Para cada generador de N de la forma

$$[(E, \{E_z\}_{z \in Z})] + [(E', \{E'_z\}_{z \in Z})] - [(E \oplus E', \{E_z \oplus E'_z\}_{z \in Z})],$$

se tiene

$$\begin{aligned} K(U)([(E, \{E_z\}_{z \in Z})] + [(E', \{E'_z\}_{z \in Z})] - [(E \oplus E', \{E_z \oplus E'_z\}_{z \in Z})]) &= [E] + [E'] - [E \oplus E'] \\ &= 0, \end{aligned}$$

así que $K(U)$ se anula en el subgrupo N generado por los elementos de la forma $[(E, \{E_z\}_{z \in Z})] + [(E', \{E'_z\}_{z \in Z})] - [(E \oplus E', \{E_z \oplus E'_z\}_{z \in Z})]$. De este modo, se obtiene un morfismo $\bar{U} : KD(X) \rightarrow K(X)$.

Construiremos ahora un morfismo en la dirección contraria. Sea $\{*\}$ un conjunto con un solo elemento. Para cada haz vectorial $E \rightarrow X$, denotemos por $(E, \{E_*\}_{* \in \{*\}})$ el haz vectorial graduado por $\{*\}$ tal que $E_* = E$. Definimos $T : \text{Vect}(X) \rightarrow KD(X)$ por $T([E]) = [(E, \{E_*\}_{* \in \{*\}})]$. Veamos que esta aplicación es un morfismo de monoides. Si E y E' son haces vectoriales sobre X , entonces, por la relación que define $KD(X)$, se tiene

$$\begin{aligned} T([E]) + T([E']) &= [(E, \{E_*\})] + [(E', \{E'_*\})] \\ &= [(E \oplus E', \{E_* \oplus E'_*\})] \\ &= T([E \oplus E']). \end{aligned}$$

Por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, T induce un morfismo de grupos abelianos $\bar{T} : K(X) \rightarrow KD(X)$. Mostremos que $\bar{U}$ y $\bar{T}$ son inversos. Primero, sea $[E] - [E'] \in K(X)$. Entonces

$$(\bar{U} \circ \bar{T})([E] - [E']) = \bar{U}([(E, \{E_*\})] - [(E', \{E'_*\})]) = [E] - [E'].$$

Por lo tanto, $\bar{U} \circ \bar{T} = \text{id}_{K(X)}$. Para la otra composición, basta verificar la igualdad en los generadores de $KD(X)$. Sea $[(E, \{E_z\}_{z \in Z})]$ uno de estos generadores. Como $E = \bigoplus_{z \in Z} E_z$, en $KD(X)$ se tiene

$$\begin{aligned} [(E, \{E_z\}_{z \in Z})] &= \sum_{z \in Z} [(E_z, \{(E_z)_*\}_{* \in \{*\}})] \\ &= [(E, \{E_*\}_{* \in \{*\}})]. \end{aligned}$$

La primera igualdad proviene de la relación de suma directa externa, mientras que la segunda proviene de la relación que define $KD(X)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (\bar{T} \circ \bar{U})([(E, \{E_z\}_{z \in Z})]) &= \bar{T}([E]) \\ &= [(E, \{E_*\}_{* \in \{*\}})] \\ &= [(E, \{E_z\}_{z \in Z})]. \end{aligned}$$

Así, $\bar{T} \circ \bar{U} = \text{id}_{KD(X)}$. De este modo, concluimos que $KD(X) \cong K(X)$ como grupos abelianos.

Finalmente, veremos que el isomorfismo es compatible con el producto. Esto es, $\bar{U}$ preserva productos porque olvida la graduación $\bar{U}([(E, \{E_z\})] \cdot [(F, \{F_w\})]) = [E \otimes F] = [E] \cdot [F]$. Por lo tanto, el isomorfismo $KD(X) \cong K(X)$ es un isomorfismo de anillos. $\square$

El siguiente paso es formular la versión equivariante de la K -teoría global. Para esto, es necesario definir los G -haces vectoriales graduados por G -conjuntos finitos.

Definición 5.2.5 (Haz vectorial equivariante Z -graduado). Sea G un grupo finito y sea Z un G -conjunto finito. Si X es un G -espacio, un **haz vectorial G -equivariante Z -graduado** sobre X es un haz vectorial Z -graduado $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ tal que $E \rightarrow X$ es un haz vectorial G -equivariante y, para todo $g \in G$ y todo $z \in Z$, se cumple $g \cdot E_z = E_{g \cdot z}$.

En la definición anterior, los subhaces E_z no son necesariamente G -subhaces de E . Más bien, la acción de G sobre E permuta las piezas de la graduación de acuerdo con la acción de G sobre Z .

Definición 5.2.6 (Homomorfismo de G -haces vectoriales graduados). Sean $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ un G -haz vectorial Z -graduado y $(E', \{E'_w\}_{w \in W})$ un G -haz vectorial W -graduado. Un **homomorfismo** de $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ en $(E', \{E'_w\}_{w \in W})$ es un homomorfismo (α, φ) de haces vectoriales graduados, donde tanto $\alpha: Z \rightarrow W$ como $\varphi: E \rightarrow E'$ son G -equivariantes. Diremos que (α, φ) es un **isomorfismo** si, además, es un isomorfismo de haces vectoriales graduados. En tal caso, $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ y $(E', \{E'_w\}_{w \in W})$ se dicen isomorfos como G -haces vectoriales graduados.

Denotaremos por $\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X)$ al conjunto de clases de isomorfismo de G -haces vectoriales graduados sobre X . Para cada $n \geq 0$, denotaremos por $\text{Vect}_G^{n\text{-grad}}(X)$ el subconjunto formado por aquellas clases cuya graduación está indexada por un G -conjunto finito de cardinalidad n . Entonces se tiene una descomposición

$$\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X) = \coprod_{n \geq 0} \text{Vect}_G^{n\text{-grad}}(X).$$

Sea Z un G -conjunto finito. Si X es un G -espacio, entonces $X \times Z$ es un G -espacio con la acción $g \cdot (x, z) = (g \cdot x, g \cdot z)$, donde Z está provisto de la topología discreta. Por lo tanto, tiene sentido considerar G -haces vectoriales sobre $X \times Z$.

Si $p: E \rightarrow X \times Z$ y $p': E' \rightarrow X \times W$ son G -haces vectoriales, diremos que E está relacionado con E' , y escribiremos $E \sim E'$, si existe una biyección G -equivariante $f: Z \rightarrow W$ y un isomorfismo de G -haces vectoriales $\varphi: E \rightarrow E'$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ X \times Z & \xrightarrow{\text{id}_X \times f} & X \times W. \end{array}$$

Es decir, $p' \circ \varphi = (\text{id}_X \times f) \circ p$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{V}_G(X) := \coprod_Z \text{Vect}_G(X \times Z) \amalg \{*\emptyset\}$, donde Z recorre los G -conjuntos finitos no vacíos y $*\emptyset$ representa el caso de la graduación vacía. Entonces se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.2.7. *La relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{V}_G$.*

Demostración. Veamos primero que $\sim$ es reflexiva. Sea $p: E \rightarrow X \times Z$ un G -haz vectorial. La identidad $\text{id}_Z: Z \rightarrow Z$ es una biyección G -equivariante y $\text{id}_E: E \rightarrow E$ es un isomorfismo de G -haces vectoriales. Además, $p \circ \text{id}_E = (\text{id}_X \times \text{id}_Z) \circ p$. Por lo tanto, $E \sim E$.

Veamos ahora que $\sim$ es simétrica. Sean $p : E \rightarrow X \times Z$ y $p' : E' \rightarrow X \times W$ dos G -haces vectoriales tales que $E \sim E'$. Entonces existe una biyección G -equivariante $f : Z \rightarrow W$ y un isomorfismo de G -haces vectoriales $\varphi : E \rightarrow E'$ tales que $p' \circ \varphi = (\text{id}_X \times f) \circ p$. Como f y φ son isomorfismos, sus inversas $f^{-1} : W \rightarrow Z$ y $\varphi^{-1} : E' \rightarrow E$ también lo son. Además, $p \circ \varphi^{-1} = (\text{id}_X \times f^{-1}) \circ p'$. Por lo tanto, $E' \sim E$.

Finalmente, probemos que $\sim$ es transitiva. Sean $p_1 : E_1 \rightarrow X \times Z$, $p_2 : E_2 \rightarrow X \times W$ y $p_3 : E_3 \rightarrow X \times T$ tres G -haces vectoriales. Supongamos que $E_1 \sim E_2$ y $E_2 \sim E_3$. Entonces existen biyecciones G -equivariantes $f_1 : Z \rightarrow W$ y $f_2 : W \rightarrow T$ e isomorfismos de G -haces vectoriales $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ y $\psi : E_2 \rightarrow E_3$, tales que cada cuadrado del siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 & \xrightarrow{\psi} & E_3 \\ p_1 \downarrow & & p_2 \downarrow & & \downarrow p_3 \\ X \times Z & \xrightarrow{\text{id}_X \times f_1} & X \times W & \xrightarrow{\text{id}_X \times f_2} & X \times T. \end{array}$$

En particular, $p_2 \circ \varphi = (\text{id}_X \times f_1) \circ p_1$ y $p_3 \circ \psi = (\text{id}_X \times f_2) \circ p_2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p_3 \circ (\psi \circ \varphi) &= (p_3 \circ \psi) \circ \varphi \\ &= ((\text{id}_X \times f_2) \circ p_2) \circ \varphi \\ &= (\text{id}_X \times f_2) \circ (p_2 \circ \varphi) \\ &= (\text{id}_X \times f_2) \circ (\text{id}_X \times f_1) \circ p_1 \\ &= (\text{id}_X \times (f_2 \circ f_1)) \circ p_1. \end{aligned}$$

Como $f_2 \circ f_1 : Z \rightarrow T$ es una biyección G -equivariante y $\psi \circ \varphi : E_1 \rightarrow E_3$ es un isomorfismo de G -haces vectoriales, se sigue que $E_1 \sim E_3$.

De este modo, $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva. Por lo tanto, $\sim$ es una relación de equivalencia. $\square$

Proposición 5.2.8. *Sea G un grupo finito y sea X un G -espacio compacto y Hausdorff. Entonces se tiene una correspondencia biunívoca*

$$\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X) \cong \mathcal{V}_G / \sim.$$

Demostración. Primero consideremos el caso de la graduación vacía. Si $Z = \emptyset$, la condición

$$E = \bigoplus_{z \in \emptyset} E_z$$

implica que E es el haz vectorial cero sobre X . Por lo tanto, existe un único G -haz vectorial $\emptyset$ -graduado sobre X , a saber, $(0, \emptyset)$. Este corresponde al punto $*_{\emptyset}$.

Supongamos ahora que $Z \neq \emptyset$. Sea $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ un G -haz vectorial Z -graduado sobre X . Entonces, $E = \bigoplus_{z \in Z} E_z$. Definimos $\tilde{E} := \coprod_{z \in Z} E_z$ y consideramos la aplicación $q : \tilde{E} \rightarrow$

$X \times Z$ dada por $q(e) = (p(e), z)$. Como Z tiene la topología discreta, cada subconjunto $X \times \{z\}$ es abierto en $X \times Z$ y se cumple $q^{-1}(X \times \{z\}) = E_z$. Dado que cada E_z es un haz vectorial sobre X , para todo $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$ que contiene a x tal que $E_z|_U \cong U \times \mathbb{C}^{n_z}$. Por lo tanto,

$$q^{-1}(U \times \{z\}) \cong (U \times \{z\}) \times \mathbb{C}^{n_z}.$$

Así, $q : \tilde{E} \rightarrow X \times Z$ es un haz vectorial.

Ahora definiremos una acción de G sobre $\tilde{E}$ usando la acción de G sobre E . Si $e \in E_z$, entonces $g \cdot e \in E_{g \cdot z}$, y por tanto $g \cdot e$ define un elemento de $\tilde{E}$. Además,

$$q(g \cdot e) = (p(g \cdot e), g \cdot z) = (g \cdot p(e), g \cdot z) = g \cdot (p(e), z) = g \cdot q(e).$$

Por lo tanto, q es G -equivariante.

Veamos ahora que la acción es lineal en las fibras. Para cada $(x, z) \in X \times Z$ se tiene $q^{-1}(x, z) = (E_z)_x$ y $q^{-1}(g \cdot x, g \cdot z) = (E_{g \cdot z})_{g \cdot x}$. Como $E \rightarrow X$ es un G -haz vectorial, la acción de g induce una transformación lineal $g : E_x \rightarrow E_{g \cdot x}$. Además, esta transformación se restringe a una aplicación $g : (E_z)_x \rightarrow (E_{g \cdot z})_{g \cdot x}$. Por lo tanto, $q : \tilde{E} \rightarrow X \times Z$ es un G -haz vectorial. De esta manera, obtenemos una aplicación $\Phi : \text{Vect}_G^{\text{grad}}(X) \rightarrow \mathcal{V}_G / \sim$ dada por $\Phi([(E, \{E_z\}_{z \in Z})]) = [q : \tilde{E} \rightarrow X \times Z]$. Notemos que esta aplicación está bien definida, pues si $(\alpha, \varphi) : (E, \{E_z\}_{z \in Z}) \rightarrow (E', \{E'_w\}_{w \in W})$ es un isomorfismo de G -haces vectoriales graduados, entonces $\alpha : Z \rightarrow W$ es una biyección G -equivariante y $\varphi : E \rightarrow E'$ es un isomorfismo de G -haces vectoriales tal que $\varphi(E_z) = E'_{\alpha(z)}$. Por lo tanto, φ induce un isomorfismo de G -haces vectoriales

$$\tilde{\varphi} : \coprod_{z \in Z} E_z \rightarrow \coprod_{w \in W} E'_w$$

tal que $q' \circ \tilde{\varphi} = (\text{id}_X \times \alpha) \circ q$. Así, los haces correspondientes sobre $X \times Z$ y $X \times W$ están relacionados por $\sim$.

Por otra parte, sea $q : \tilde{E} \rightarrow X \times Z$ un G -haz vectorial. Para cada $z \in Z$, sea E_z la restricción de $\tilde{E}$ al subespacio $X \times \{z\}$, es decir, $E_z := q^{-1}(X \times \{z\})$. Como la restricción de un haz vectorial a un subespacio es nuevamente un haz vectorial, obtenemos un haz vectorial sobre $X \times \{z\}$. Identificando $X \times \{z\}$ con X , escribimos $E_z \rightarrow X$. Definimos $E := \bigoplus_{z \in Z} E_z$. Como Z es finito, E es un haz vectorial sobre X . Más explícitamente, para cada $x \in X$ y cada $z \in Z$, existe un abierto $U_z \subset X$ que contiene a x tal que $E_z|_{U_z} \cong U_z \times \mathbb{C}^{n_z}$. Tomando $U = \bigcap_{z \in Z} U_z$, se tiene

$$E|_U = \left(\bigoplus_{z \in Z} E_z \right) \Big|_U \cong U \times \left(\bigoplus_{z \in Z} \mathbb{C}^{n_z} \right).$$

Por lo tanto, $E \rightarrow X$ es un haz vectorial.

Ahora definimos una acción de G sobre E . Para cada $g \in G$, la acción sobre $\tilde{E}$ induce isomorfismos lineales $g : (E_z)_x \rightarrow (E_{g \cdot z})_{g \cdot x}$. Si $v = \sum_{z \in Z} v_z \in E_x = \bigoplus_{z \in Z} (E_z)_x$, definimos $g \cdot v := \sum_{z \in Z} g \cdot v_z$. Entonces

$$g \cdot v \in \bigoplus_{z \in Z} (E_{g \cdot z})_{g \cdot x} = E_{g \cdot x}.$$

Como la acción de G en $\tilde{E}$ es lineal en las fibras, esta acción es lineal en las fibras de E . Además, es compatible con la proyección $E \rightarrow X$, por lo que E es un G -haz vectorial. Por construcción, $g \cdot E_z = E_{g \cdot z}$. Así, $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ es un G -haz vectorial Z -graduado sobre X . De este modo, obtenemos una aplicación $\Psi : \mathcal{V}_G / \sim \rightarrow \text{Vect}_G^{\text{grad}}(X)$ dada por $\Psi([q : \tilde{E} \rightarrow X \times Z]) = [(E, \{E_z\}_{z \in Z})]$. Veamos que Ψ está bien definida. Supongamos que $q : \tilde{E} \rightarrow X \times Z$ y $q' : \tilde{E}' \rightarrow X \times W$ son G -haces vectoriales tales que $\tilde{E} \sim \tilde{E}'$. Entonces existe una biyección G -equivariante $f : Z \rightarrow W$ y un isomorfismo de G -haces vectoriales $\varphi : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}'$ tal que $q' \circ \varphi = (\text{id}_X \times f) \circ q$. Si $E_z = q^{-1}(X \times \{z\})$ y $E'_w = (q')^{-1}(X \times \{w\})$, entonces la igualdad anterior implica que $\varphi(E_z) = E'_{f(z)}$. Por lo tanto, φ induce un isomorfismo de G -haces vectoriales graduados $(E, \{E_z\}_{z \in Z}) \cong (E', \{E'_w\}_{w \in W})$, dado por la pareja (f, φ) . Así, Ψ está bien definida.

Por último, veamos que Φ y Ψ son inversas. Sea $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ un G -haz vectorial graduado. Entonces

$$(\Psi \circ \Phi)(E, \{E_z\}_{z \in Z}) = \Psi(\Phi(E, \{E_z\}_{z \in Z})) = \Psi(\tilde{E}) = (E, \{E_z\}_{z \in Z}).$$

Por lo tanto, $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X)}$. Por otro lado,

$$(\Phi \circ \Psi)(\tilde{E}) = \Phi(\Psi(\tilde{E})) = \Phi(E, \{E_z\}_{z \in Z}) = \tilde{E}.$$

En consecuencia, $\Phi \circ \Psi = \text{id}$. De esta manera, se concluye que Φ y Ψ son inversas una de la otra. Por lo tanto, $\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X) \cong \mathcal{V}_G / \sim$. $\square$

Corolario 5.2.9. *Sea $H \leq G$. Entonces $\text{Vect}_G^{G/H\text{-grad}}(X)$ está en correspondencia biyectiva con $\text{Vect}_G(X \times G/H) / \sim$, donde $\sim$ denota la relación inducida por los automorfismos G -equivariantes de G/H . Equivalentemente, esta relación corresponde a la acción de $N_G(H)$ sobre $\text{Vect}_G(X \times G/H)$.*

Demostración. Es consecuencia directa de la demostración de la Proposición 5.2.8, tomando la graduación sobre el G -conjunto transitivo G/H . $\square$

En [Seg68] se demuestra que

$$\text{Vect}_G(X \times G/H) \cong \text{Vect}_H(X).$$

Más explícitamente, dado un haz vectorial G -equivariante $E \rightarrow X \times G/H$, este determina de manera natural un H -haz vectorial sobre X al restringirlo a $X \times \{H\}$. Recíprocamente, si $F \rightarrow X$ es un haz vectorial H -equivariante, entonces el haz inducido $G \times_H F$ define un G -haz vectorial sobre $G \times_H X$, el cual se identifica con un G -haz vectorial sobre $X \times G/H$. En virtud de esta equivalencia, y como consecuencia del Corolario 5.2.9, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 5.2.10. *Sea $H \leq G$. Entonces $\text{Vect}_G^{G/H\text{-grad}}(X)$ está en existe una correspondencia biyectiva con $\text{Vect}_H(X)/\sim'$, donde $\sim'$ denota la congruencia generada por la acción de $N_G(H)$ sobre $\text{Vect}_H(X)$.*

Es claro que la suma directa externa y el producto de haces vectoriales graduados hacen de $\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X)$ un semianillo conmutativo. Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{L}_G(X)$ de tuplas

$$(Z, E, \{E_z\}_{z \in Z}, E', \{E'_z\}_{z \in Z}),$$

donde Z es un G -conjunto finito y $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ y $(E', \{E'_z\}_{z \in Z})$ son G -haces vectoriales Z -graduados sobre X . Cada elemento de $\mathcal{L}_G(X)$ determina un elemento de $K(\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X))$ dado por

$$[(E, \{E_z\}_{z \in Z})] + [(E', \{E'_z\}_{z \in Z})] - [(E \oplus E', \{E_z \oplus E'_z\}_{z \in Z})].$$

Denotemos por I el ideal de $K(\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X))$ generado por todos estos elementos.

Definición 5.2.11 (K -teoría global equivariante). Sea G un grupo finito y X un G -espacio compacto y Hausdorff. El **anillo de K -teoría global equivariante** de X se define como

$$KD_G(X) := \frac{K(\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X))}{I}.$$

Un par de ejemplos inmediatos de la definición anterior son los siguientes.

Ejemplo 5.2.12.

1. Si $G = \{1\}$ es el grupo trivial, entonces $KD_G(X) = KD(X) \cong K(X)$.
2. Un haz vectorial complejo sobre un punto corresponde a un $\mathbb{C}$ -espacio vectorial de dimensión finita E . Si además es un G -haz vectorial, entonces, para cada $g \in G$, se tiene un automorfismo lineal $g : E \rightarrow E$ compatible con la acción del grupo. Por lo tanto, un G -haz vectorial sobre un punto corresponde a una representación compleja de G . Ahora, un G -haz vectorial Z -graduado sobre un punto corresponde a un $\mathbb{C}G$ -módulo E junto con una descomposición $E = \bigoplus_{z \in Z} E_z$ en subespacios vectoriales, tal que para todo $g \in G$ y todo $z \in Z$ se cumple $g \cdot E_z = E_{gz}$. Es decir, corresponde precisamente a una representación global de

G . Esta correspondencia respeta la suma directa externa, el producto tensorial y las relaciones adicionales. Por lo tanto, $KD_G(\text{pt}) \cong D(G)$.

Dado que la K -teoría equivariante es funtorial (véase [Seg68]), resulta natural esperar que la K -teoría global equivariante también lo sea. Para ver esto, introducimos la siguiente construcción.

Sean X y Y dos G -espacios compactos y Hausdorff, y sea $f : Y \rightarrow X$ una aplicación continua G -equivariante. Si $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ es un G -haz vectorial Z -graduado sobre X , definimos su **pullback graduado** a lo largo de f como

$$f^*(E, \{E_z\}_{z \in Z}) = (f^*E, \{f^*E_z\}_{z \in Z}).$$

Aquí f^*E es el pullback usual de haces vectoriales. Como cada E_z es un subhaz de E , se sigue que f^*E_z es un subhaz de f^*E para todo $z \in Z$. Además, como f es G -equivariante y E es un G -haz vectorial, el pullback f^*E tiene una acción natural de G dada por $g \cdot (y, e) = (g \cdot y, g \cdot e)$, para $(y, e) \in f^*E$. Esta acción está bien definida, pues

$$p(g \cdot e) = g \cdot p(e) = g \cdot f(y) = f(g \cdot y).$$

Por lo tanto, $g \cdot (y, e) \in f^*E$. Veamos ahora que la acción es compatible con la graduación. Si $(y, e) \in f^*E_z$, entonces $e \in E_z$. Como $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ es un G -haz vectorial Z -graduado, se tiene $g \cdot e \in E_{gz}$. Por lo tanto,

$$g \cdot (y, e) = (g \cdot y, g \cdot e) \in f^*E_{gz}.$$

Así, $g \cdot (f^*E_z) = f^*E_{gz}$. Como el pullback preserva sumas directas de haces vectoriales, de la descomposición $E = \bigoplus_{z \in Z} E_z$, se obtiene

$$f^*E = \bigoplus_{z \in Z} f^*E_z.$$

En consecuencia, $(f^*E, \{f^*E_z\}_{z \in Z})$ es un G -haz vectorial Z -graduado sobre Y .

El siguiente paso consiste en ver que toda aplicación continua G -equivariante $f : Y \rightarrow X$ induce un homomorfismo de anillos $f^* : KD_G(X) \rightarrow KD_G(Y)$. Sean $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ y $(E', \{E'_w\}_{w \in W})$ dos G -haces vectoriales graduados. Entonces

$$\begin{aligned} f^*((E, \{E_z\}_{z \in Z}) \boxplus (E', \{E'_w\}_{w \in W})) &= f^*(E \oplus E', \{F_u\}_{u \in Z \amalg W}) \\ &= (f^*(E \oplus E'), \{f^*F_u\}_{u \in Z \amalg W}) \\ &\cong (f^*E \oplus f^*E', \{f^*F_u\}_{u \in Z \amalg W}) \\ &= f^*(E, \{E_z\}_{z \in Z}) \boxplus f^*(E', \{E'_w\}_{w \in W}). \end{aligned}$$

Por otra parte, por la Proposición 1.1.5, $f^*(E \otimes E') \cong f^*E \otimes f^*E'$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f^*((E, \{E_z\}_{z \in Z}) \cdot (E', \{E'_w\}_{w \in W})) &= f^*(E \otimes E', \{E_z \otimes E'_w\}_{(z,w) \in Z \times W}) \\ &= (f^*(E \otimes E'), \{f^*(E_z \otimes E'_w)\}_{(z,w) \in Z \times W}) \\ &\cong (f^*E \otimes f^*E', \{f^*E_z \otimes f^*E'_w\}_{(z,w) \in Z \times W}) \\ &= f^*(E, \{E_z\}_{z \in Z}) \cdot f^*(E', \{E'_w\}_{w \in W}). \end{aligned}$$

Esto muestra que el pullback induce un homomorfismo de semianillos $f^* : \text{Vect}_G^{\text{grad}}(X) \rightarrow \text{Vect}_G^{\text{grad}}(Y)$. Por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, este morfismo se extiende a un morfismo de anillos $f^* : K(\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X)) \rightarrow K(\text{Vect}_G^{\text{grad}}(Y))$.

Veamos que este morfismo desciende al cociente que define KD_G . Sean $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ y $(E', \{E'_z\}_{z \in Z})$ dos G -haces vectoriales Z -graduados. Como el pullback preserva sumas directas, se tiene

$$\begin{aligned} f^*(E \oplus E', \{E_z \oplus E'_z\}_{z \in Z}) &\cong (f^*E \oplus f^*E', \{f^*E_z \oplus f^*E'_z\}_{z \in Z}) \\ &= f^*(E, \{E_z\}_{z \in Z}) \oplus f^*(E', \{E'_z\}_{z \in Z}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f^* envía las relaciones que definen $KD_G(X)$ en relaciones que definen $KD_G(Y)$. En consecuencia, induce un homomorfismo de anillos $f^* : KD_G(X) \rightarrow KD_G(Y)$.

Proposición 5.2.13. *La asignación*

$$\begin{aligned} X &\longmapsto KD_G(X) \\ (f : Y \rightarrow X) &\longmapsto (f^* : KD_G(X) \rightarrow KD_G(Y)). \end{aligned}$$

define un funtor contravariante $KD_G : G\text{-CHaus} \rightarrow \text{CRing}$, donde $G\text{-CHaus}$ denota la categoría de G -espacios compactos Hausdorff.

Teorema 5.2.14 (Invarianza G -homotópica). *Sean X y Y dos G -espacios compactos y Hausdorff. Si $f, g : Y \rightarrow X$ son dos aplicaciones continuas G -equivariantes que son G -homotópicas, entonces $f^* = g^* : KD_G(X) \rightarrow KD_G(Y)$.*

Demostración. Sea $H : Y \times I \rightarrow X$ una G -homotopía entre f y g , donde G actúa trivialmente sobre I . Denotemos por $i_0, i_1 : Y \rightarrow Y \times I$ las inclusiones dadas por $i_0(y) = (y, 0)$ e $i_1(y) = (y, 1)$. Entonces $f = H \circ i_0$ y $g = H \circ i_1$. Por la functorialidad probada anteriormente, $f^* = i_0^* \circ H^*$ y $g^* = i_1^* \circ H^*$. Por lo tanto, basta demostrar que $i_0^* = i_1^* : KD_G(Y \times I) \rightarrow KD_G(Y)$.

Sea $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ un G -haz vectorial Z -graduado sobre $Y \times I$. Por la Proposición 5.2.8, este corresponde a un G -haz vectorial $\tilde{E} \rightarrow (Y \times I) \times Z$. Como la K -teoría equivariante es invariante bajo G -homotopía (véase [Seg68]), las restricciones de $\tilde{E}$ a $Y \times \{0\} \times Z$ y $Y \times \{1\} \times Z$

definen la misma clase en la K -teoría equivariante de $Y \times Z$. Bajo la correspondencia de la Proposición 5.2.8, esto implica que $i_0^*(E, \{E_z\}_{z \in Z}) = i_1^*(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ en $KD_G(Y)$. Por lo tanto, $i_0^* = i_1^*$ y $f^* = i_0^* \circ H^* = i_1^* \circ H^* = g^*$. $\square$

Con la finalidad de relacionar $KD_G(X)$ con los grupos $K_H(X)$, consideremos la siguiente construcción. Sea X un G -espacio compacto y Hausdorff, y sea $H \leq G$. Si $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$ es un G -haz vectorial graduado sobre X , definimos $Z_H := \{z \in Z \mid G_z = H\}$. Como H fija cada elemento de Z_H , el haz $\bigoplus_{z \in Z_H} E_z$ es un H -haz vectorial sobre X . Por lo tanto, obtenemos una aplicación

$$\begin{aligned} \psi_H : \text{Vect}_G^{\text{grad}}(X) &\longrightarrow K_H(X)_{N_G(H)} \\ [(E, \{E_z\}_{z \in Z})] &\longmapsto \left[\bigoplus_{z \in Z_H} E_z \right]. \end{aligned}$$

Veamos que esta aplicación está bien definida. Si $(E, \{E_z\}_{z \in Z}) \cong (F, \{F_w\}_{w \in W})$ como G -haces vectoriales graduados, entonces existe un isomorfismo (α, ϕ) , donde $\alpha : Z \rightarrow W$ es un isomorfismo de G -conjuntos y $\phi : E \rightarrow F$ es un isomorfismo de G -haces vectoriales tal que $\phi(E_z) = F_{\alpha(z)}$. Como α preserva isotropías, induce una biyección $Z_H \cong W_H$. Además, para cada $z \in Z_H$, la restricción $\phi|_{E_z} : E_z \rightarrow F_{\alpha(z)}$ es un isomorfismo de H -haces vectoriales. Por lo tanto, $\bigoplus_{z \in Z_H} E_z \cong \bigoplus_{w \in W_H} F_w$ como H -haces vectoriales. Esto prueba que ψ_H no depende del representante.

Por otro lado, ψ_H es compatible con la suma directa externa porque si

$$(E, \{E_z\}_{z \in Z}) \boxplus (F, \{F_w\}_{w \in W}) = (E \oplus F, \{U_t\}_{t \in Z \amalg W}),$$

entonces $(Z \amalg W)_H = Z_H \amalg W_H$. Así,

$$\begin{aligned} \psi_H([(E, \{E_z\})] \boxplus [(F, \{F_w\})]) &= \sum_{t \in (Z \amalg W)_H} [U_t] \\ &= \sum_{z \in Z_H} [E_z] + \sum_{w \in W_H} [F_w] \\ &= \psi_H([(E, \{E_z\})]) + \psi_H([(F, \{F_w\})]). \end{aligned}$$

Por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, ψ_H induce un homomorfismo $K(\text{Vect}_G^{\text{grad}}(X)) \rightarrow K_H(X)_{N_G(H)}$. Como ψ_H también preserva las relaciones adicionales, desciende a un homomorfismo $\psi_H : KD_G(X) \rightarrow K_H(X)_{N_G(H)}$. Tomando un representante H de cada clase de conjugación de subgrupos de G , obtenemos un homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : KD_G(X) &\longrightarrow \bigoplus_{[H] \in S(G)/G} K_H(X)_{N_G(H)} \\ x &\longmapsto (\psi_H(x))_{[H]}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ahora construimos un homomorfismo en la otra dirección. Sea $E \rightarrow X$ un H -haz vectorial. Consideremos el haz inducido $G \times_H E$, visto como G -haz vectorial sobre X , con proyección $[g, e] \mapsto g \cdot p(e)$. Para cada $gH \in G/H$, definimos $E_{gH} := \{[g, e] \mid e \in E\}$. Entonces cada E_{gH} es un subhaz vectorial de $G \times_H E$, y se tiene una descomposición

$$G \times_H E = \bigoplus_{gH \in G/H} E_{gH}.$$

Además, para todo $g' \in G$, se tiene $g' \cdot E_{gH} = E_{g'gH}$. Por lo tanto, $(G \times_H E, \{E_{gH}\}_{gH \in G/H})$ es un G -haz vectorial G/H -graduado sobre X . Así, definimos

$$\begin{aligned} \varphi_H : \text{Vect}_H(X) &\longrightarrow KD_G(X) \\ [E] &\longmapsto [(G \times_H E, \{E_{gH}\}_{gH \in G/H})]. \end{aligned}$$

Esta aplicación está bien definida, pues todo isomorfismo de H -haces vectoriales $E \cong E'$ induce un isomorfismo de G -haces vectoriales graduados

$$(G \times_H E, \{E_{gH}\}_{gH \in G/H}) \cong (G \times_H E', \{E'_{gH}\}_{gH \in G/H}).$$

Asimismo, φ_H es compatible con la suma directa, ya que $G \times_H (E \oplus E') \cong (G \times_H E) \oplus (G \times_H E')$ y este isomorfismo respeta la graduación por G/H . Por lo tanto, φ_H induce un homomorfismo $K_H(X) \rightarrow KD_G(X)$. Más aún, si $n \in N_G(H)$, entonces los haces inducidos por E y por nE determinan la misma clase en $KD_G(X)$. En efecto, la biyección $\alpha_n : G/H \rightarrow G/H$ dada por $\alpha_n(gH) = gnH$, junto con el isomorfismo $\varphi_n : G \times_H E \rightarrow G \times_H {}^nE$ definido como $\varphi_n([g, e]) = [gn, e]$, define un isomorfismo de G -haces vectoriales graduados. Por lo tanto, φ_H desciende a los coinvariantes e induce un homomorfismo $\varphi_H : K_H(X)_{N_G(H)} \rightarrow KD_G(X)$. De esta manera, definimos

$$\begin{aligned} \varphi : \bigoplus_{[H] \in S(G)/G} K_H(X)_{N_G(H)} &\longrightarrow KD_G(X) \\ (x_H)_{[H]} &\longmapsto \sum_{[H] \in S(G)/G} \varphi_H(x_H). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Teorema 5.2.15. *Dado un G -espacio compacto y Hausdorff X , existe un isomorfismo de grupos abelianos*

$$KD_G(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{[H] \in S(G)/G} K_H(X)_{N_G(H)} \otimes \mathbb{Q}. \tag{5.3}$$

Demostración. Consideremos los homomorfismos ψ y φ definidos en (5.1) y (5.2). Para cada $H \leq G$, denotamos por $W_G(H) := N_G(H)/H$ al grupo de Weyl de H en G . Sea $x = [E] - [E'] \in K_H(X)_{N_G(H)}$. Entonces

$$\varphi_H(x) = [(G \times_H E, \{E_{gH}\}_{gH \in G/H})] - [(G \times_H E', \{E'_{gH}\}_{gH \in G/H})].$$

Al aplicar ψ_K , solo contribuyen aquellas clases laterales $gH \in G/H$ cuya isotropía es exactamente K . Como $G_{gH} = gHg^{-1}$, si K no es conjugado a H , no existe ninguna clase lateral de G/H con isotropía K . Por lo tanto, $\psi_K(\varphi_H(x)) = 0$. Supongamos ahora que $K = H$. En este caso, las clases laterales $gH \in G/H$ con isotropía exactamente H son aquellas que satisfacen $gHg^{-1} = H$. Esto ocurre si y solo si $g \in N_G(H)$. Así, dichas clases laterales están parametrizadas por $W_G(H)$. Al aplicar ψ_H , cada una de estas clases laterales contribuye una copia de x . En consecuencia, $\psi_H(\varphi_H(x)) = |W_G(H)|x$. De este modo,

$$\psi \circ \varphi = \bigoplus_{[H] \in S(G)/G} |W_G(H)| \text{id}. \quad (5.4)$$

Aquí usamos que estamos trabajando módulo la acción de $N_G(H)$, de modo que las contribuciones correspondientes a los elementos de $N_G(H)/H$ se identifican con la misma clase x .

Por otro lado, consideremos un G -haz vectorial Z -graduado $(E, \{E_z\}_{z \in Z})$. Como Z es un G -conjunto finito, se descompone como unión disjunta de sus órbitas. Para cada órbita $O \in Z/G$, definimos $E_O := \bigoplus_{z \in O} E_z$. Entonces $(E_O, \{E_z\}_{z \in O})$ es un G -haz vectorial O -graduado, y por la relación de suma directa externa que define $KD_G(X)$ se tiene

$$[(E, \{E_z\}_{z \in Z})] = \sum_{O \in Z/G} [(E_O, \{E_z\}_{z \in O})].$$

Por lo cual, es suficiente estudiar la composición $\varphi \circ \psi$ sobre una órbita de la graduación. Supongamos que la graduación es transitiva y de tipo $[H]$. Tomando un punto de la órbita con isotropía exactamente H , podemos identificar esta órbita con G/H . Sea $y = [(E, \{E_{gH}\}_{gH \in G/H})] \in KD_G(X)$ un generador, y $F := E_H$ la componente correspondiente a la clase lateral H .

Por la construcción de φ_H , el haz graduado $(E, \{E_{gH}\}_{gH \in G/H})$ es isomorfo a $(G \times_H F, \{(G \times_H F)_{gH}\}_{gH \in G/H})$. Por lo tanto, $y = \varphi_H([F])$. Al aplicar ψ_K , solo contribuyen las componentes cuya isotropía es exactamente K . Dado que la isotropía de $gH \in G/H$ es $G_{gH} = gHg^{-1}$, si K no es conjugado a H , entonces $\psi_K(y) = 0$. Por otro lado, si $K = H$, las clases laterales de G/H con isotropía exactamente H son aquellas que satisfacen $gHg^{-1} = H$, lo cual equivale a $g \in N_G(H)$. Así, dichas clases laterales están parametrizadas por $N_G(H)/H = W_G(H)$. Cada una de estas componentes representa la misma clase que F en los coinvariantes $K_H(X)_{N_G(H)}$. Por lo tanto, $\psi_H(y) = |W_G(H)|[F]$. Al aplicar φ_H , obtenemos

$$\varphi_H(\psi_H(y)) = |W_G(H)| \varphi_H([F]) = |W_G(H)|y.$$

En consecuencia, sobre la parte de la graduación de tipo $[H]$, la composición $\varphi \circ \psi$ actúa como multiplicación por $|W_G(H)|$.

Ahora tensorizamos con $\mathbb{Q}$. Definimos

$$\tilde{\varphi}_{\mathbb{Q}} : \bigoplus_{[H] \in S(G)/G} K_H(X)_{N_G(H)} \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow KD_G(X) \otimes \mathbb{Q}$$

como

$$\tilde{\varphi}_{\mathbb{Q}}((x_H)_{[H]}) = \sum_{[H] \in S(G)/G} \frac{1}{|W_G(H)|} \varphi_H(x_H).$$

La igualdad en (5.4) implica que $(\psi \otimes \mathbb{Q}) \circ \tilde{\varphi}_{\mathbb{Q}} = \text{id}$. Por otra parte, por el cálculo anterior aplicado a cada órbita de la graduación, también se tiene $\tilde{\varphi}_{\mathbb{Q}} \circ (\psi \otimes \mathbb{Q}) = \text{id}$ sobre los generadores de $KD_G(X) \otimes \mathbb{Q}$, y por tanto sobre todo $KD_G(X) \otimes \mathbb{Q}$. Así, $\psi \otimes \mathbb{Q}$ es un isomorfismo, con inversa $\tilde{\varphi}_{\mathbb{Q}}$. En consecuencia,

$$KD_G(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \bigoplus_{[H] \in S(G)/G} K_H(X)_{N_G(H)} \otimes \mathbb{Q}. \quad \square$$

Nota 5.2.16. Se sospecha que el isomorfismo en (5.3) sea un isomorfismo antes de racionalizar si, en lugar de considerar las fibras E_z con $z \in Z_H$, se elige un representante de cada órbita de la acción de $N_G(H)$ sobre Z_H . En efecto, para cada $H \leq G$, el grupo $N_G(H)$ actúa sobre Z_H y cada órbita sobre esta acción tiene cardinalidad $[N_G(H) : H] = |W_G(H)|$. En la definición de ψ_H se consideran todas las fibras E_z , con $z \in Z_H$, por lo que cada órbita contribuye $|W_G(H)|$ -veces; esta es la razón por la que las composiciones consideradas en la demostración producen una multiplicación por $|W_G(H)|$. Así, es razonable esperar que, eligiendo un conjunto de representantes de las órbitas de $N_G(H)$ sobre Z_H y tomando únicamente las fibras correspondientes a dichos representantes, se obtenga un homomorfismo que elimine este factor y dé lugar a un isomorfismo antes de tensorizar con $\mathbb{Q}$.

5.3. Teorema de completación

En el Capítulo 4 y en lo que va de este capítulo, hemos estudiado el anillo global de representaciones de un grupo finito y el anillo de K -teoría global equivariante de un espacio compacto y Hausdorff. Aunque la manera de definir ambos anillos guarda cierta similitud, aún no hemos establecido una relación directa entre ellos. En esta sección construiremos un morfismo de monoides de $\text{glRep}(G)$ a $\text{Vect}_G^{\text{grad}}(E^n G)$, el cual induce un homomorfismo de anillos de $D(G)$ a $KD_G(E^n G)$. La pregunta de la existencia de un teorema de completación para $D(G)$ queda abierta. Sin embargo, finalizaremos este trabajo mostrando un caso particular con $G = \mathbb{Z}/2$ para el cual se tiene el isomorfismo $D(G)_{I_G}^{\wedge} \cong KD_G(EG)$.

Proposición 5.3.1. *Sea G un grupo finito. Entonces, la aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi : \text{glRep}(G) &\longrightarrow \text{Vect}_G^{\text{grad}}(E^n G) \\ [(Z, V)] &\longmapsto [(E^n G \times V, \{E^n G \times V_z\}_{z \in Z})], \end{aligned}$$

está bien definida y es un homomorfismo de monoides.

Demostración. Primero observemos que la aplicación está bien definida. Si $(Z, V) \cong (Z', V')$ como representaciones globales de G , entonces existe un isomorfismo (α, ϕ) , donde $\alpha : Z \rightarrow Z'$ es una biyección G -equivariante y $\phi : V \rightarrow V'$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}G$ -módulos tal que $\phi(V_z) = V'_{\alpha(z)}$ para todo $z \in Z$. Por lo tanto, $\text{id}_{E^n G} \times \phi : E^n G \times V \rightarrow E^n G \times V'$ define un isomorfismo de G -haces vectoriales graduados compatible con α . Así, la clase $[(E^n G \times V, \{E^n G \times V_z\}_{z \in Z})]$ en $\text{Vect}_G^{\text{grad}}(E^n G)$ no depende del representante elegido.

Veamos ahora que φ preserva la suma directa externa. Sean $[(Z, V)]$ y $[(W, V')]$ elementos de $\text{glRep}(G)$. Entonces

$$\begin{aligned} \varphi([(Z, V)] \boxplus [(W, V')]) &= \varphi([(Z \amalg W, V \boxplus V')]) \\ &= [(E^n G \times (V \boxplus V'), \{E^n G \times F_u\}_{u \in Z \amalg W})]. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \varphi([(Z, V)]) \boxplus \varphi([(W, V')]) &= [(E^n G \times V, \{E^n G \times V_z\}_{z \in Z})] \boxplus [(E^n G \times V', \{E^n G \times V'_w\}_{w \in W})] \\ &= [((E^n G \times V) \oplus (E^n G \times V'), \{E^n G \times F_u\}_{u \in Z \amalg W})]. \end{aligned}$$

Como $(E^n G \times V) \oplus (E^n G \times V') \cong E^n G \times (V \oplus V')$, y este isomorfismo respeta la graduación por $Z \amalg W$, se sigue que $\varphi([(Z, V)] \boxplus [(W, V')]) = \varphi([(Z, V)]) \boxplus \varphi([(W, V')])$. Por lo tanto, φ es un homomorfismo de monoides. $\square$

Por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, φ induce un morfismo de grupos abelianos

$$K(\varphi) : K(\text{glRep}(G)) \rightarrow K(\text{Vect}_G^{\text{grad}}(E^n G))$$

que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{glRep}(G) & \xrightarrow{\varphi} & \text{Vect}_G^{\text{grad}}(E^n G) \\ \downarrow \iota & & \downarrow j \\ K(\text{glRep}(G)) & \xrightarrow{K(\varphi)} & K(\text{Vect}_G^{\text{grad}}(E^n G)). \end{array}$$

Al tomar el cociente de $K(\text{glRep}(G))$ por el subgrupo generado por las relaciones inducidas por las relaciones adicionales de representaciones globales, se obtiene el grupo $D(G)$. De manera análoga, al tomar el cociente de $K(\text{Vect}_G^{\text{grad}}(E^n G))$ por las relaciones inducidas por las relaciones adicionales de G -haces vectoriales graduados, se obtiene $KD_G(E^n G)$. Consideremos $\pi : K(\text{Vect}_G^{\text{grad}}(E^n G)) \rightarrow KD_G(E^n G)$ la proyección canónica. Veamos que el morfismo $\pi \circ K(\varphi) : K(\text{glRep}(G)) \rightarrow KD_G(E^n G)$ desciende al cociente $D(G)$. Para ello, basta probar que los generadores de la relación que define $D(G)$ pertenecen al núcleo de $\pi \circ K(\varphi)$.

Sea $[(Z, V)] + [(Z, V')] - [(Z, V \oplus V')]$ uno de estos generadores. Entonces

$$\begin{aligned}
& K(\varphi) \left([(Z, V)] + [(Z, V')] - [(Z, V \oplus V')] \right) \\
&= K(\varphi)([(Z, V)]) + K(\varphi)([(Z, V')]) - K(\varphi)([(Z, V \oplus V')]) \\
&= [(E^n G \times V, \{E^n G \times V_z\}_{z \in Z})] + [(E^n G \times V', \{E^n G \times V'_z\}_{z \in Z})] \\
&\quad - [(E^n G \times (V \oplus V'), \{E^n G \times (V_z \oplus V'_z)\}_{z \in Z})] \\
&= [((E^n G \times V) \oplus (E^n G \times V'), \{(E^n G \times V_z) \oplus (E^n G \times V'_z)\}_{z \in Z})] \\
&\quad - [(E^n G \times (V \oplus V'), \{E^n G \times (V_z \oplus V'_z)\}_{z \in Z})] \\
&= [(E^n G \times (V \oplus V'), \{E^n G \times (V_z \oplus V'_z)\}_{z \in Z})] \\
&\quad - [(E^n G \times (V \oplus V'), \{E^n G \times (V_z \oplus V'_z)\}_{z \in Z})].
\end{aligned}$$

Este elemento no es necesariamente cero en $K(\text{Vect}_G^{\text{grad}}(E^n G))$. Sin embargo, su imagen bajo π sí es cero, pues corresponde precisamente a una de las relaciones adicionales que definen $KD_G(E^n G)$. Por lo tanto,

$$(\pi \circ K(\varphi))([(Z, V)] + [(Z, V')] - [(Z, V \oplus V')]) = 0.$$

Así, los generadores de la relaci3n que define $D(G)$ pertenecen al núcleo de $\pi \circ K(\varphi)$. En consecuencia, $\pi \circ K(\varphi)$ induce un homomorfismo bien definido $\alpha_G: D(G) \longrightarrow KD_G(E^n G)$.

Veamos ahora que el morfismo α_G preserva el producto. Sean $[(Z, V)], [(W, V')] \in \text{glRep}(G)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha_G([(Z, V)] \cdot [(W, V')]) &= \alpha_G([(Z \times W, V \otimes V')]) \\
&= [(E^n G \times (V \otimes V'), \{E^n G \times (V_z \otimes V'_w)\}_{(z,w) \in Z \times W})].
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\alpha_G([(Z, V)]) \cdot \alpha_G([(W, V')]) &= [(E^n G \times V, \{E^n G \times V_z\}_{z \in Z})] \cdot [(E^n G \times V', \{E^n G \times V'_w\}_{w \in W})] \\
&= \left[(E^n G \times V) \otimes (E^n G \times V'), \right. \\
&\quad \left. \{(E^n G \times V_z) \otimes (E^n G \times V'_w)\}_{(z,w) \in Z \times W} \right].
\end{aligned}$$

Usando el isomorfismo natural de haces vectoriales $(E^n G \times V) \otimes (E^n G \times V') \cong E^n G \times (V \otimes V')$, obtenemos $\alpha_G([(Z, V)] \cdot [W, V']) = \alpha_G([(Z, V)]) \cdot \alpha_G([W, V'])$. Luego α_G es un homomorfismo de anillos.

Para cada homomorfismo de grupos $f: G \rightarrow H$, se tiene un morfismo inducido $f^*: D(H) \rightarrow D(G)$ en los anillos de representaciones globales, el cual está dado por la restricci3n de la acci3n vía f ; esto es, si $\overline{[(Z, V)]} \in D(H)$, entonces $f^*(\overline{[(Z, V)]}) = \overline{[(f^*Z, f^*V)]} \in D(G)$,

donde f^*Z denota el mismo conjunto subyacente con la acción $g \cdot z = f(g) \cdot z$ y f^*V denota el mismo espacio vectorial subyacente con la acción $g \cdot v = f(g) \cdot v$.

Por otro lado, si $p : (L, \{L_z\}_{z \in Z}) \rightarrow E^n H$ es un haz vectorial Z -graduado H -equivariante, entonces el pullback graduado a lo largo de $(E^n f) : E^n G \rightarrow E^n H$ define un haz vectorial Z -graduado G -equivariante sobre $E^n G$, donde la acción de G se obtiene por restricción vía f . En consecuencia, mediante un argumento análogo al de la Proposición 5.2.13, se obtiene un morfismo $(E^n f)^* : KD_H(E^n H) \rightarrow KD_G(E^n G)$ en los anillos de K -teoría global equivariante.

Proposición 5.3.2. *Sean G y H dos grupos finitos, y $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Entonces, los morfismos inducidos $f^* : D(H) \rightarrow D(G)$ y $(E^n f)^* : KD_H(E^n H) \rightarrow KD_G(E^n G)$ hacen conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} D(G) & \xrightarrow{\alpha_G} & KD_G(E^n G) \\ f^* \uparrow & & \uparrow (E^n f)^* \\ D(H) & \xrightarrow{\alpha_H} & KD_H(E^n H) \end{array} \quad (5.5)$$

Demostración. Sea $\overline{[(Z, V)]} \in D(H)$. Entonces,

$$\begin{aligned} (\alpha_G \circ f^*)\overline{[(Z, V)]} &= \alpha_G(f^*\overline{[(Z, V)]}) \\ &= \alpha_G(\overline{[(f^*Z, f^*V)]}) \\ &= \overline{[(E^n G \times f^*V, \{E^n G \times V_z\}_{z \in f^*Z})]}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} ((E^n f)^* \circ \alpha_H)\overline{[(Z, V)]} &= (E^n f)^* \left(\overline{[(E^n H \times V, \{E^n H \times V_z\}_{z \in Z})]} \right) \\ &= \overline{[(E^n f)^*(E^n H \times V), \{(E^n f)^*(E^n H \times V_z)\}_{z \in Z}]} \\ &= \overline{[(E^n G \times f^*V, \{E^n G \times f^*V_z\}_{z \in f^*Z})]}. \end{aligned}$$

En efecto, el pullback del haz trivial $E^n H \times V$ a lo largo de $E^n f : E^n G \rightarrow E^n H$ es el haz trivial $E^n G \times V$, pero considerado como G -haz mediante la acción restringida por f . Esta es precisamente la representación global (f^*Z, f^*V) . Por lo tanto, $\alpha_G(f^*\overline{[(Z, V)]}) = (E^n f)^*(\alpha_H(\overline{[(Z, V)]}))$. De la arbitrariedad de $\overline{[(Z, V)]}$, se concluye que $\alpha_G \circ f^* = (E^n f)^* \circ \alpha_H$. $\square$

Para concluir, exhibiremos un ejemplo para el cual se tiene un isomorfismo $D(G)_{I_G}^\wedge \cong KD_G(EG)$. Para ello, es necesario introducir una noción adecuada de ideal de aumentación para $D(G)$. En este trabajo no desarrollaremos una teoría general de este ideal, sino que únicamente consideraremos el siguiente candidato, suficiente para el ejemplo que nos interesa.

Sea G un grupo finito. Recordemos que, como grupo abeliano, $D(G)$ es libre con base $\{[H, V] \mid H \in \mathcal{S}(G), V \in \text{Irred}(H)/N_G(H)\}$, donde $\mathcal{S}(G)$ denota un conjunto de representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G . Además, si $n \in N_G(H)$, entonces $[H, V] = [H, {}^nV]$. De este modo, para cada $H \in \mathcal{S}(G)$, definimos

$$D(G)_H := \bigoplus_{V \in \text{Irred}(H)/N_G(H)} \mathbb{Z}[H, V].$$

Con esta notación, se tiene una descomposición de grupos abelianos

$$D(G) = \bigoplus_{[H] \in \mathcal{S}(G)} D(G)_H. \quad (5.6)$$

Por otro lado, consideremos el grupo abeliano libre $A := \bigoplus_{H \in \mathcal{S}(G)} \mathbb{Z}e_H$, donde e_H denota el generador correspondiente de la clase de conjugación de H . Dotamos a A del producto dado por

$$e_H \cdot e_K = \sum_{x \in H \backslash G/K} e_{H \cap {}^xK}.$$

Con este producto, el anillo A es isomorfo al anillo de Burnside $A(G)$, identificando e_H con la clase del G -conjunto G/H .

Para cada $H \in \mathcal{S}(G)$, definimos un homomorfismo de grupos abelianos $\varepsilon_H : D(G)_H \rightarrow A$ que en generadores envía $[H, V]$ a $(\dim V)e_H$. Por la descomposición de $D(G)$ dada en (5.6), obtenemos un homomorfismo

$$\varepsilon : \bigoplus_{H \in \mathcal{S}(G)} D(G)_H \rightarrow A$$

de anillos. En efecto, sean $[H, V]$ y $[K, W]$ dos generadores de $D(G)$. Entonces, por la Proposición 4.2.10,

$$\begin{aligned} \varepsilon([H, V] \cdot [K, W]) &= \sum_{x \in H \backslash G/K} \dim(\text{res}_{H \cap {}^xK}^H V \otimes \text{res}_{H \cap {}^xK}^{{}^xK} ({}^xW)) e_{H \cap {}^xK} \\ &= \sum_{x \in H \backslash G/K} \dim_{\mathbb{C}}(V) \dim_{\mathbb{C}}(W) e_{H \cap {}^xK} \\ &= \dim_{\mathbb{C}}(V) \dim_{\mathbb{C}}(W) \sum_{x \in H \backslash G/K} e_{H \cap {}^xK} \\ &= \dim(V) \dim_{\mathbb{C}}(W) e_H e_K \\ &= \varepsilon([H, V]) \varepsilon([K, W]). \end{aligned}$$

De este modo, definimos $I_G := \text{Ker}(\varepsilon)$, el cual es un ideal de $D(G)$. En lo que sigue utilizaremos este ideal como ideal de aumentación de $D(G)$ para el caso particular $G = \mathbb{Z}/2$.

Ejemplo 5.3.3. Sea $G = \mathbb{Z}/2 = \{1, \sigma\}$ el grupo cíclico de orden dos. Por el Ejemplo 4.2.9,

$$D(\mathbb{Z}/2) \cong \frac{\mathbb{Z}[X, Y]}{\langle X^2 - 2X, XY - X, Y^2 - 1 \rangle}.$$

En este caso, el homomorfismo $\varepsilon : D(\mathbb{Z}/2) \rightarrow A$ definido anteriormente está determinado por $\varepsilon(1) = e_{\mathbb{Z}/2}$, $\varepsilon(Y) = e_{\mathbb{Z}/2}$ y $\varepsilon(X) = e_1$. De este modo, si $a + bY + cX$ es un elemento de $D(\mathbb{Z}/2)$, se tiene

$$\varepsilon(a + bY + cX) = (a + b)e_{\mathbb{Z}/2} + ce_1.$$

De aquí se sigue que $I_G = \text{Ker}(\varepsilon) = \langle Y - 1 \rangle$. Calculemos ahora la completación de $D(\mathbb{Z}/2)$ respecto a este ideal. Como $Y^2 = 1$, se tiene

$$(Y - 1)^2 = Y^2 - 2Y + 1 = 2(1 - Y) = -2(Y - 1).$$

Por lo tanto, $I_{\mathbb{Z}/2}^n = \langle 2^{n-1}(Y - 1) \rangle$ para todo $n \geq 1$. Además, usando la relación $XY = X$, obtenemos $X(Y - 1) = XY - X = 0$. En consecuencia,

$$\frac{D(\mathbb{Z}/2)}{I_{\mathbb{Z}/2}^n} \cong \mathbb{Z}\{X\} \oplus \frac{\mathbb{Z}\{1, Y\}}{\langle 2^{n-1}(Y - 1) \rangle}$$

como grupos abelianos. Al tomar límite inverso, obtenemos

$$\begin{aligned} D(\mathbb{Z}/2)_{I_{\mathbb{Z}/2}}^\wedge &= \varprojlim_n \frac{D(\mathbb{Z}/2)}{I_{\mathbb{Z}/2}^n} \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^\wedge, \end{aligned} \tag{5.7}$$

donde $\mathbb{Z}_2^\wedge$ denota el anillo de los enteros 2-ádicos.

Por otro lado, calcularemos $KD_{\mathbb{Z}/2}(E^n\mathbb{Z}/2)$. Suponiendo que se cumple la Nota 5.2.16, se tiene

$$KD_{\mathbb{Z}/2}(E^n\mathbb{Z}/2) \cong K_{\mathbb{Z}/2}(E^n\mathbb{Z}/2) \oplus K(E^n\mathbb{Z}/2)_{\mathbb{Z}/2}.$$

Como la acción de $\mathbb{Z}/2$ sobre $E^n\mathbb{Z}/2 \cong S^n$ es libre, se tiene $K_{\mathbb{Z}/2}(E^n\mathbb{Z}/2) \cong K(E^n\mathbb{Z}/2/(\mathbb{Z}/2)) \cong K(\mathbb{R}P^n)$. Además, $K(E^n\mathbb{Z}/2)_{\mathbb{Z}/2} \cong K(S^n)_{\mathbb{Z}/2}$, donde la acción de $\mathbb{Z}/2$ sobre $K(S^n)$ es la inducida por la acción antipodal sobre S^n . Por lo tanto,

$$KD_{\mathbb{Z}/2}(E^n\mathbb{Z}/2) \cong K(\mathbb{R}P^n) \oplus K(S^n)_{\mathbb{Z}/2}.$$

Observemos que

$$K(S^n)_{\mathbb{Z}/2} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n \text{ impar}, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, & n \text{ par}. \end{cases}$$

En efecto, si n es impar, entonces $K(S^n) \cong \mathbb{Z}$, generado por el haz trivial, y la acción inducida por la acción antipodal es trivial. Por otro lado, si n es par, entonces $K(S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{K}(S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. La acción antipodal actúa trivialmente sobre el sumando $\mathbb{Z}$ correspondiente al rango, y actúa por multiplicación por -1 sobre $\tilde{K}(S^n)$. Por lo tanto, al tomar coinvariantes obtenemos $K(S^n)_{\mathbb{Z}/2} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$.

Al tomar el límite sobre n , obtenemos

$$KD_{\mathbb{Z}/2}(E\mathbb{Z}/2) = \varprojlim_n KD_{\mathbb{Z}/2}(E^n\mathbb{Z}/2) \cong \varprojlim_n (K(\mathbb{R}P^n) \oplus K(S^n)_{\mathbb{Z}/2}).$$

Notemos que, bajo las identificaciones anteriores, las aplicaciones de restricción están inducidas por las inclusiones en el ecuador $S^n \hookrightarrow S^{n+1}$. Esto es,

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2, \quad a \mapsto (a, 0),$$

cuando se restringe de S^{2m+1} a S^{2m} , y por

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (a, \bar{b}) \mapsto a,$$

cuando se restringe de S^{2m} a S^{2m-1} . En particular, las partes $\mathbb{Z}/2$ no sobreviven al tomar el límite. Por lo tanto, $\varprojlim_n K(S^n)_{\mathbb{Z}/2} \cong \mathbb{Z}$. En consecuencia,

$$KD_{\mathbb{Z}/2}(E\mathbb{Z}/2) \cong \varprojlim_n K(\mathbb{R}P^n) \oplus \mathbb{Z}.$$

Como $\varprojlim_n K(\mathbb{R}P^n) \cong K(\mathbb{R}P^\infty) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^\wedge$ (véase [Bra00], Sección 4.1), se concluye que

$$KD_{\mathbb{Z}/2}(E\mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^\wedge \oplus \mathbb{Z}.$$

El mismo argumento aplicado a $G = \mathbb{Z}/p$, con p primo, muestra que

$$D(\mathbb{Z}/p)_{I_{\mathbb{Z}/p}}^\wedge \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}_p^\wedge)^{\oplus(p-1)} \cong KD_{\mathbb{Z}/p}(E\mathbb{Z}/p)$$

como grupos abelianos.

Referencias

- [AKO11] M. Aschbacher, R. Kessar y R. Oliver. *Fusion systems in algebra and topology*. Vol. 391. Cambridge University Press, 2011.
- [AM18] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. CRC Press, 2018.
- [Ati18] M. Atiyah. *K-theory*. CRC Press, 2018.
- [Ati61] M. F. Atiyah. «Characters and cohomology of finite groups». En: *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 9 (1961), págs. 23-64.
- [BC20] N. Bárcenas y J. Cantarero. «A completion theorem for fusion systems». En: *Israel Journal of Mathematics* 236 (2020), págs. 501-531.
- [BLO03] C. Broto, R. Levi y B. Oliver. «The homotopy theory of fusion systems». En: *Journal of the American Mathematical Society* 16 (2003), págs. 779-856.
- [BLO04] C. Broto, R. Levi y B. Oliver. «The theory of p -local groups: a survey». En: *Contemporary Mathematics* 346 (2004), págs. 51-84.
- [Bol01] R. Boltje. «Monomial resolutions». En: *Journal of Algebra* 246 (2001), págs. 811-848.
- [Bol90] R. Boltje. «A canonical Brauer induction formula». En: *Astérisque* 181 (1990), págs. 31-59.
- [Bou10] S. Bouc. *Biset functors for finite groups*. Springer, 2010.
- [Bra00] V. Braun. «K-theory torsion». En: *arXiv preprint hep-th/0005103* (2000).
- [Bro12] K. S. Brown. *Cohomology of groups*. Vol. 87. Springer, 2012.
- [Bur09] W. Burnside. «Theory of groups of finite order». En: *Messenger of Mathematics* 23 (1909), pág. 112.
- [Car84] G. Carlsson. «Equivariant stable homotopy and Segal's Burnside ring conjecture». En: *Annals of Mathematics* 120 (1984), págs. 189-224.
- [Cas21] A. Castillo Ramírez. *Un curso en teoría de grupos*. Vol. 23. Publicaciones Electrónicas de la Sociedad Matemática Mexicana, 2021.

- [CC23] J. Cantarero y G. Combariza. «Uniqueness of factorization for fusion-invariant representations». En: *Communications in Algebra* 51 (2023), págs. 5187-5208.
- [CCM20] J. Cantarero, N. Castellana y L. Morales. «Vector bundles over classifying spaces of p-local finite groups and Benson–Carlson duality». En: *Journal of the London Mathematical Society* 101 (2020), págs. 1-22.
- [CE99] H. Cartan y S. Eilenberg. *Homological algebra*. Vol. 19. Princeton university press, 1999.
- [CG24] J. Cantarero y J. Gaspar-Lara. «Fusion-invariant representations for symmetric groups». En: *Bulletin of the Iranian Mathematical Society* 50, 29 (2024).
- [CR66] C. W. Curtis e I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Vol. 356. American Mathematical Soc., 1966.
- [Die06] T. tom Dieck. *Transformation groups and representation theory*. Vol. 766. Springer, 2006.
- [DL09] A. Díaz y A. Libman. «The Burnside ring of fusion systems». En: *Advances in Mathematics* 222 (2009), págs. 1943-1963.
- [Dre69] A. Dress. «A characterisation of solvable groups». En: *Mathematische Zeitschrift* 110 (1969), págs. 213-217.
- [Gas20] J. E. Gaspar Lara. «K-teoría y representaciones invariantes bajo fusión». Tesis de licenciatura. Universidad Nacional Autónoma de México, 2020. URL: <https://repositorio.unam.mx/contenidos/3559153>.
- [GH06] A. Geroldinger y F. Halter-Koch. *Non-unique factorizations: Algebraic, combinatorial and analytic theory*. Chapman y Hall/CRC, 2006.
- [GJ09] P. G. Goerss y J. F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*. Springer, 2009.
- [Hat03] A. Hatcher. *Vector bundles and K-theory*. 2003. URL: <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>.
- [Hus66] D. Husemöller. *Fibre bundles*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. New York: McGraw-Hill, 1966.
- [JL01] G. D. James y M. W. Liebeck. *Representations and characters of groups*. Cambridge University Press, 2001.
- [La 21] M. La Vecchia. «The completion and local cohomology theorems for complex cobordism for all compact Lie groups». En: *arXiv preprint arXiv:2107.03093* (2021).
- [Lai79] E. Laitinen. «On the Burnside ring and stable cohomotopy of a finite group». En: *Mathematica Scandinavica* 44 (1979), págs. 37-72.

- [Lem22] N. Lemoine. «Prime ideals of the Burnside ring of a saturated fusion system». En: *Journal of Algebra* 609 (2022), págs. 840-860. ISSN: 0021-8693. DOI: [10.1016/j.jalgebra.2022.06.031](https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.06.031). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021869322003386>.
- [May99] J. P. May. *A concise course in algebraic topology*. University of Chicago Press, 1999.
- [Ree15] S. Reeh. «The abelian monoid of fusion-stable finite sets is free». En: *Algebra & Number Theory* 9 (2015), págs. 2303-2324.
- [RV15] A. G. Raggi-Cárdenas y L. Valero-Elizondo. «Global representation rings». En: *Journal of Algebra* 441 (2015), págs. 426-440.
- [Seg68] G. Segal. «Equivariant K -theory». En: *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 34 (1968), págs. 129-151.
- [Ser+77] J.-P. Serre et al. *Linear representations of finite groups*. Vol. 42. Springer, 1977.
- [Sol74] R. Solomon. «Finite groups with Sylow 2-subgroups of type .3». En: *Journal of Algebra* 28 (1974), págs. 182-198.
- [Spi14] D. I. Spivak. *Category theory for the sciences*. MIT Press, 2014.
- [Tor17] C. R. Torres Sánchez. «El espectro primo del anillo global de representaciones». Tesis de maestría. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2017. URL: http://bibliotecavirtual.dgb.umich.mx:8083/xmlui/handle/DGB_UMICH/1235.
- [Wit95] S. J. Witherspoon. «The Ring of Equivariant Vector Bundles on Finite Sets». En: *Journal of Algebra* 175 (1995), págs. 274-286. URL: <https://n9.cl/9pe6a>.
- [ZS13] O. Zariski y P. Samuel. *Commutative algebra: Volume II*. Vol. 2. Springer, 2013.