

La Regla de l'Hôpital

Teorema (Regla de l'Hôpital). *Suponga que $f(a) = g(a) = 0$, que f y g son funciones diferenciables en un intervalo I que contiene a a y que $g'(x) \neq 0$ en I si $x \neq a$. Entonces:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

asumiendo que el límite en la parte de la derecha existe.

A continuación se muestran algunos ejemplos que ilustran el uso de la Regla de L'Hôpital.

Ejemplo 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \operatorname{sen} x}{x} = \frac{3 - \cos x}{1} \Big|_{x=0} = 2$$

Ejemplo 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)}{1} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - x/2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/2)(\sqrt{1+x})^{-1/2} - 1/2}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1/4)(\sqrt{1+x})^{-3/2}}{2} \\ &= -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$