Tarea 5
Ejercicios resueltos

1. Vamos a decir que una función cuya gráfica "sube" cuando nos movemos de izquierda a derecha es *creciente*. Si la gráfica "baja" cuando nos movemos de izquierda a derecha, diremos que es *decreciente*. Por ejemplo: la función $f(x) = x^2$ es creciente en el intervalo $[0, \infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$, la función $f(x) = x^3$ es creciente en $(-\infty, \infty)$ y decreciente en ningún lugar.

   Graficar las siguientes funciones y especificar los intervalos donde la función es creciente y donde es decreciente.

   (i) $f(x) = -x^2$.

   (ii) $f(x) = -x^3$.

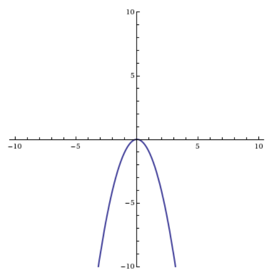
   (iii) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.

   (iv) $f(x) = -\frac{1}{x}$.

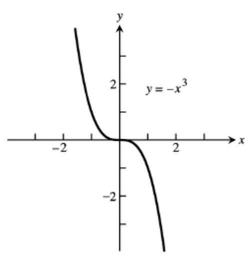
   (v) $f(x) = \frac{1}{|x|}$.

   Solución.

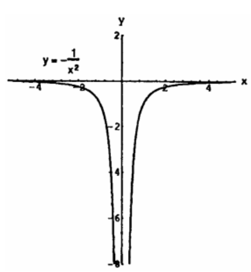
(i) $f(x) = -x^2$.
Decreciente en $(0, \infty)$.
Creciente en $(-\infty, 0)$.



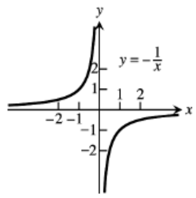
(ii) $f(x) = -x^3$.
Decreciente en $(-\infty, \infty)$.
Creciente en ninguna parte.



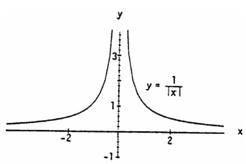
(iii) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Decreciente en $(-\infty, 0)$.
Creciente en $(0, \infty)$.



(iv) $f(x) = -\frac{1}{x}$.
Decreciente en ninguna parte.
Creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.



(v) $f(x) = \frac{1}{|x|}$.
Decreciente en $(0, \infty)$.
Creciente en $(-\infty, 0)$.



2. Decir qué funciones son pares, impares o ninguna. Da razones para tu respuesta.

   (i) $f(x) = 3$.

   (ii) $f(x) = x^{-5}$.

   (iii) $f(x) = x^2 + 1$.

   (iv) $f(x) = x^2 + x$.

   (v) $f(x) = x^3 + x$.

   (vi) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 1$.

   Solución.

   (i) $f(x) = 3 = f(-x)$, por lo que la función es par.

   (ii) $f(x) = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$ y $f(-x) = (-x)^{-5} = \frac{1}{(-x)^5} = -\frac{1}{x^5} = -f(x)$. Por lo tanto la función es impar.

   (iii) $f(x) = x^2 + 1 = (-x)^2 + 1 = -f(x)$. Por lo que la función es par.

(iv) Como $f(x) = x^2 + x \neq (-x)^2 - x = f(-x)$ y $f(x) = x^2 + x \neq -(x)^2 - x$ la función no es par ni impar.

(v) Como $f(-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$, tenemos que la función es impar.

(vi) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 1 = (-x)^4 - 3(-x)^2 - 1 = f(-x)$, por lo que la función es par.

3. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

   (i) $\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$.

   (ii) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.

   (iii) $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$.

   (iv) $\sqrt{1 - x} + \sqrt{x - 2}$.

   Solución.

   (i) $x \in [-1, 1]$.

   (ii) $x \in [-1, 1]$.

   (iii) $x \neq 1$ y $x \neq 2$.

   (iv) $x \in -1, 1$.

4. En los siguientes casos, determinar los dominios y la imágenes de f, g, $f + g$ y $f \cdot g$.

   (i) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$.

   (ii) $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$.

   Solución.

(i) $dom(f) = (-\infty, \infty)$.
$dom(g) = [1, \infty)$.
$dom(f + g) = [1, \infty)$.
$dom(f \cdot g) = [1, \infty)$.
$im(f) = (-\infty, \infty)$.
$im(g) = [0, \infty)$.
$im(f + g) = [1, \infty)$.
$im(f \cdot g) = [0, \infty)$.

(ii) $dom(f) = [-1, \infty)$.
$dom(g) = [1, \infty)$.
$dom(f + g) = [1, \infty)$.
$dom(f \cdot g) = [1, \infty)$.
$im(f) = [0, \infty)$.
$im(g) = [0, \infty)$.
$im(f + g) = [\sqrt{2}, \infty)$.
$im(f \cdot g) = [0, \infty)$.

5. Determinar los dominios y las imágenes de f, g, f/g y g/f.

(i) $f(x) = 2$, $g(x) = x^2 + 1$.

(ii) $f(x) = 1$, $g(x) = 1 + \sqrt{x}$.

Solución.

(i) $dom(f) = (-\infty, \infty)$.
$dom(g) = (-\infty, \infty)$.
$dom(f/g) = (-\infty, \infty)$, ya que $f(x) \neq 0$ para cualquier x.
$dom(g/f) = (-\infty, \infty)$, ya que $g(x) \neq 0$ para cualquier x.
$im(f) = 2$.
$im(g) = [1, \infty)$.
$im(f/g) = (0, 2]$.
$im(g/f) = [1/2, \infty)$.

(ii) $dom(f) = (-\infty, \infty)$.
$dom(g) = [0, \infty)$.

$dom(f/g) = [0, \infty)$, ya que $g(x) \neq 0$ para cualquier $x \geq 0$.
$dom(g/f) = [0, \infty)$, ya que $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \geq 0$.
$im(f) = 1$.
$im(g) = [1, \infty)$.
$im(f/g) = [0, 1)$.
$im(g/f) = [1, \infty)$.

6. Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$, encontrar lo siguiente:

   (i) $f(g(0))$.
   (ii) $g(f(0))$.
   (iii) $f(g(x))$.
   (iv) $g(f(x))$.
   (v) $g(g(2))$.
   (vi) $g(g(x))$.

   Solución.

   (i) $f(g(0)) = f(-3) = 2$.
   (ii) $g(f(0)) = g(5) = 22$.
   (iii) $f(g(x)) = f(x^2 - 3) = x^2 - 3 + 5 = x^2 + 2$.
   (iv) $g(f(x)) = g(x + 5) = (x + 5)^2 - 3 = x^2 + 10x + 22$.
   (v) $g(g(2)) = g(1) = -2$.
   (vi) $g(g(x)) = g(x^2 - 3) = (x^2 - 3)^2 - 3 = x^4 - 6x^2 + 6$.

7. Sean $S(x) = x^2$, $P(x) = 2^x$ y $s(x) = sen(x)$. Determinar los siguientes valores. En cada caso la solución debe ser un número. Por ejemplo, $(P \circ S)(t) = P(S(t)) = P(t^2) = 2^{(t^2)} = 2^{2t} = 4^t$.

   (i) $(S \circ P)(0)$.

(ii) $(S \circ P)(t)$.

(iii) $(S \circ s)(\frac{\pi}{2})$.

(iv) $(S \circ s)(y)$.

(v) $(S \circ P \circ s)(5) + (s \circ P)(5)$.

(vi) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t)$.

(vii) $s(t^3)$.

Solución.

(i) $(S \circ P)(0) = 2^{2(0)} = 1$.

(ii) $(S \circ P)(t) = 2^{2t}$.

(iii) $(S \circ s)(\frac{\pi}{2}) = sen^2(\frac{\pi}{2})$.

(iv) $(S \circ s)(y) = sen^2(y)$.

(v) $(S \circ P \circ s)(5) + (s \circ P)(5) = 2^{2sen5} + sen(2^5)$.

(vi) $(S \circ P \circ s)(t) + (s \circ P)(t) = 2^{2sent} + sen(2^t)$.

(vii) $s(t^3) = sent^3$.

8. Se usará la definición de S, P y s del ejercicio anterior. Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de S, P, s usando sólamente $+, \cdot$, y $\circ$ (por ejemplo, la solución de (i) es $P \circ s$). En cada caso, la solución debe ser una función.

(i) $f(x) = 2^{senx}$.

(ii) $f(x) = sen(2^x)$.

(iii) $f(x) = sen(x^2)$.

(iv) $f(x) = (senx)^2$.

(v) $f(t) = 2^{2^t}$.

Solución.

(i) $f(x) = 2^{senx} = P \circ s.$

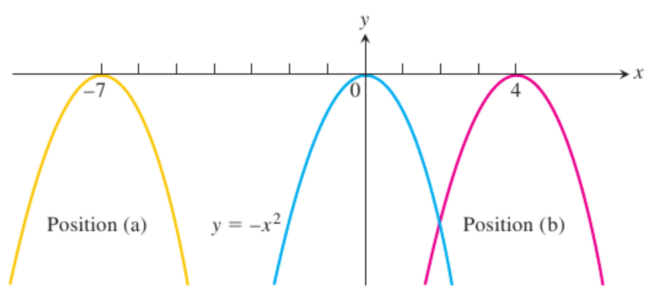
(ii) $f(x) = sen(2^x) = s \circ P.$

(iii) $f(x) = sen(x^2) = s \circ S.$

(iv) $f(x) = (senx)^2 = S \circ s.$

(v) $f(t) = 2^{2^t} = P \circ P.$

9. La siguiente figura muestra la gráfica de la función $f(x) = -x^2$ desplazada hacia dos nuevas posiciones, encontrar las ecuaciones de las nuevas gráficas.

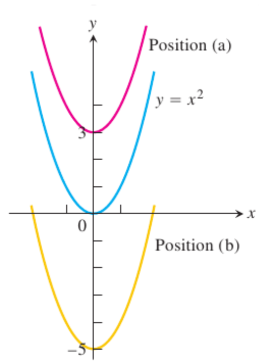


Solución.

a) $y = -(x+7)^2.$

b) $y = -(x-4)^2.$

10. La siguiente figura muestra la gráfica de la función $f(x) = -x^2$ desplazada hacia dos nuevas posiciones, encontrar las ecuaciones de las nuevas gráficas.



Solución.

a) $y = x^2 + 3$.

b) $y = x^2 - 5$.