En estas notas vamos a derivar expansiones utiles para funciones potenciales (eqs. 2, 3) como un aplicación de unas propiedades de funciones armónicas. Proxima, para continuar con la tema de funciones especiales, presentamos la solución explicita (eq. 4) para osilaciones del pendulo usando las funciones elipticas.

Laplaciano en coordenadas:

El *operador de Laplace* o *Laplaciano* actua por fonciones como:

$$f \mapsto div(grad(f)) = \nabla \cdot (\nabla f) =: \Delta f.$$

Considera una (orientado) *sistema de coordenadas ortogonales*, es decir: puntos $q(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ son parametrizados por (α, β, γ), y, en cada punto, los vectores $\partial_\alpha q, \partial_\beta q, \partial_\gamma q$ son un base ortogonal con la orientación estandard. Vamos a derivar una expresión (eq. 1) para Δ en tales coordenadas por un aplicación de la teorema de Gauss. Pongamos $a := |\partial_\alpha q|, b := |\partial_\beta q|, c := |\partial_\gamma q|$.

Considera un cubo $C_\varepsilon := \{\alpha_o \leq \alpha \leq \alpha_o + \varepsilon, \beta_o \leq \beta \leq \beta_o + \varepsilon, \gamma_o \leq \gamma \leq \gamma_o + \varepsilon\}$, que parametriza un región $\mathcal{C}_\varepsilon = q(C_\varepsilon) \subset \mathbb{R}^3$. Por la teorema (divergencia) de Gauss:

$$\int_{\mathcal{C}_\varepsilon} \Delta f \ d^3 q = \int_{\partial \mathcal{C}_\varepsilon} \nabla f \cdot \hat{n} \ d^2 q$$

El integral de volumen (lado izquierda) es:

$$\int_{C_\varepsilon} abc\Delta f \ d\alpha d\beta d\gamma,$$

porque el elemento de volumen, $d^3 q$, en estos coordenadas es: $d^3 q = (\partial_\alpha q \times \partial_\beta q) \cdot \partial_\gamma q \ d\alpha d\beta d\gamma = abc \ d\alpha d\beta d\gamma$. Para el integral sobre $\partial \mathcal{C}_\varepsilon$, considera el lado corresponde a $\beta = \beta_o$. Integrando sobre este lado danos:

$$(*) \qquad \int_{\alpha_o}^{\alpha_o+\varepsilon} \int_{\gamma_o}^{\gamma_o+\varepsilon} \nabla f \cdot (q_\alpha \times q_\gamma)|_{\beta=\beta_o} \ d\alpha d\gamma = -\int_{\alpha_o}^{\alpha_o+\varepsilon} \int_{\gamma_o}^{\gamma_o+\varepsilon} (\frac{ac}{b} \partial_\beta f)|_{\beta=\beta_o} \ d\alpha d\gamma$$

porque $\partial_\alpha q \times \partial_\gamma q = -\frac{ac}{b} \partial_\beta q$. En una manera igual, el integral sobre el lado con $\beta = \beta_o + \varepsilon$ es:

$$(**) \qquad \int_{\alpha_o}^{\alpha_o+\varepsilon} \int_{\gamma_o}^{\gamma_o+\varepsilon} (\frac{ac}{b} \partial_\beta f)|_{\beta=\beta_o+\varepsilon} \ d\alpha d\gamma.$$

Entonces, la contribución total al integral superficia de estos dos lados, $(*), (**)$, esta:

$$\int_{C_\varepsilon} \partial_\beta (\frac{ac}{b} \partial_\beta f) \ d\alpha d\beta d\gamma.$$

Aplicando las mismas consideraciones a los lados que quedan, llegamos a:

$$\int_{C_\varepsilon} abc\Delta f \ d\alpha d\beta d\gamma = \int_{C_\varepsilon} \partial_\alpha (\frac{bc}{a} \partial_\alpha f) + \partial_\beta (\frac{ac}{b} \partial_\beta f) + \partial_\gamma (\frac{ab}{c} \partial_\gamma f) \ d\alpha d\beta d\gamma.$$

Este egalidad vale para cualquier $\varepsilon, \alpha_o, \beta_o, \gamma_o$, entonces:

$$abc\Delta f = \partial_\alpha (\frac{bc}{a} \partial_\alpha f) + \partial_\beta (\frac{ac}{b} \partial_\beta f) + \partial_\gamma (\frac{ab}{c} \partial_\gamma f) \tag{1}$$

Ejemplos: 1. En el plano, en una manera similar, somos conducidas a la expresion general: $ab\Delta(f) = \partial_\alpha(\frac{b}{a}\partial_\alpha(f)) + \partial_\beta(\frac{a}{b}\partial_\beta(f))$, para el Laplaciano en sistemas ortogonales. Por ejemplo, en coordenadas polares: $q = r(\cos\theta, \sin\theta)$ tenemos $\partial_r q = (\cos\theta, \sin\theta), \partial_\theta q = r(-\sin\theta, cos\theta)$ que son ortogonal. Tenemos: $|\partial_r q| = 1, |\partial_\theta q| = r$ y el versión planar de eq. 1 danos: $r\Delta = \partial_r(r\partial_r) + \partial_\theta(\frac{1}{r}\partial_\theta)$. Reordenado:

$$\Delta = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2.$$

2. Coordenadas esfericas: $q = \rho(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$ son una sistema de coordenadas ortogonales. El Laplaciano en estas coordenadas es:

$$\Delta = \frac{1}{\rho^2}\partial_\rho(\rho^2\partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\partial_\varphi(\sin\varphi\partial_\varphi) + \frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\partial_\theta^2.$$

Funciones armónicas ($\Delta f = 0$) en $\mathbb{R}^2$

Como calentamiento, primero encontramos unas funciones armónicas en el plano por el metodo de *seperación de variables*. Dejanos tratar de encontrar un funcion armónica de la forma: $f = R(r)\Theta(\theta)$ en coordenadas polares. Entonces:

$$0 = \Delta f = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r f) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2 f = \frac{\Theta}{r}(rR')' + \frac{R}{r^2}\Theta''$$
$$\Rightarrow -\frac{\Theta''}{\Theta} = \frac{r}{R}(rR')'.$$

El lado izquierda de este ecuación depende solo de θ y el lado derecha solo de r. Entonces, las dos ratios son constantes y tenemos:

$$\Theta'' = -\lambda\Theta, \quad (rR')' = \lambda\frac{R}{r}.$$

Para que definimos un función sobre el plano, Θ tiene que ser periodica de periodo 2π: $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$. Entonces $\lambda = n^2, n \in \mathbb{Z}$ y $\Theta = a\cos n\theta + b\sin n\theta$ para algunos constantes a, b. Uno puede resolver para R en los dos casos: $n = 0, n \neq 0$. Cuando $n = 0$ tenemos $R = A + B\log r$ y cuando $n \neq 0$ tenemos $R = Cr^n + Dr^{-n}$.
El Laplaciano esta lineal, entonces podemos tomar combinaciones lineales de las soluciones arriba que encontremos. Las funciones de la forma:

$$(*) \qquad f = a_0 + b_0\log r + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} r^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta), \quad a_j, b_j \in \mathbb{R},$$

estan funciones armónicas donde convergencia tiene sentido. Un contrario queda:

Thm: Si un funcion f es armónica en un anillo $r_1 < r < r_2$ (permitimos $r_1 = 0$ o $r_2 = \infty$), entonces se tiene un expansion de la forma $(*)$ en este anillo.

Comentario: Si han aprendido un poco de analisis compleja, podria ser divertida pasar por la demonstración de la teorema arriba (ver por ejemplo S. Axler, Harmonic functions from a Complex Analysis viewpoint). El punto principal es que los partes reales o imaginarios de un funcion compleja analitica son funciones armónicas. Uno obtiene los funciones armónicas $r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta$ de las partes real/imaginario de z^n. La suma sobre $\mathbb{Z}^*$ en la expansion $(*)$ viene de la serie de Laurent de un funcion compleja analitica en el annilo.

Funciones armónicas ($\Delta f = 0$) en $\mathbb{R}^3$

Procedemos como en el caso planar, por seperación de variables. Recuerda que en el caso planar las funcionas armónicas (excepto de $\log r$) eran homogenea, es decir el componente radial era un poder entero de r. Buscamos funciones armónicas en espacio de la forma $f = \rho^k Y(\varphi, \theta)$ con $k \in \mathbb{Z}$ y encontramos la condicion:

$$\Delta_{S^2} Y := \frac{\partial_\varphi(\sin\varphi\partial_\varphi Y)}{\sin\varphi} + \frac{\partial_\theta^2 Y}{\sin^2\varphi} = -k(k+1)Y$$

para Y. Una función Y_k que satisficie la EDP arriba nos llaman una *armónica esferica* de grado k.
Observa que $k(k+1) = k'(k'+1)$ para $k' = -(1+k)$. Entonces, si $k \geq 0$, y Y_k es una armónica esferica de grado k tenemos los funciones armónicas en el espacio: $\rho^k Y_k$ y $\frac{1}{\rho^{1+k}}Y_k$ (la segunda definida sobre $\mathbb{R}^3\backslash\vec{0}$).

Queda describir las armónicas esfericas, Y_k.

Hacemos otra seperación de variables: assumimos $Y_k = \Phi(\varphi)\Theta(\theta)$ que conduce a:

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} = k(k+1)\sin^2\varphi + \frac{\sin\varphi(\sin\varphi\Phi')'}{\Phi}$$

$$\Rightarrow \Theta'' = -\ell^2\Theta, \quad \ell^2 = k(k+1)\sin^2\varphi + \frac{\sin\varphi(\sin\varphi\Phi')'}{\Phi}.$$

Tenemos $\Theta = a\cos\ell\theta + b\sin\ell\theta$ con $\ell \in \mathbb{Z}$. La EDO para Φ se presenta a menudo en una forma diferente, despues haciendo el cambio de variable $z = \cos\varphi$ que da:

$$0 = (k(k+1) - \frac{\ell^2}{1-z^2})\Phi - 2z\frac{d\Phi}{dz} + (1-z^2)\frac{d^2\Phi}{dz^2},$$

conocido como la EDO de Legendre. Es una EDO singular por los puntos $z = \pm 1$ (que coresonde a $\varphi = 0, \pi$). Buscamos soluciones Φ a este EDO para que los limites $\lim_{z\to\pm1}\Phi(z)$ existen. Es posible demonstrar, usando por ejemplo series de potencia, que tales soluciones existen solo cuando $\ell^2 \leq k^2$. Con un rescalamiento, estos soluciones son llamados los polinomios de Legendre, y nos denotamos por $\Phi = P_k^\ell(\cos\varphi)$. Uno puede encontrar mas detalles y propieades de estos polinomios de Legendre en libros tipicos de 'funciones especiales' (por ejemplo K. Jänich, Analysis für Physiker und Ingenieure). En fin nos tenemos armónicas esfericas de grado k con la forma: $\cos\ell\theta P_k^\ell(\cos\varphi), \sin\ell\theta P_k^\ell(\cos\varphi)$ (con $0 \leq \ell \leq k$).

Ahora damos expreciones para algunos polinomios de Legendre. Deja que $P_k[x,y,z]$ sea los polinomios homogeneos de grado k. Por ejemplo, $P_2[x,y,z] = \{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx\}$. En coordenadas Cartesianos, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, y uno puedo encontrar los *polinomios armónicas* de grado k, es decir los $p \in P_k$ para que $\Delta p = 0$. Nos denotamos estos polinomios armónicas por H_k. Por ejemplo, $H_2 = \{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx : A + B + C = 0\}$. Entonces, para cada $h \in H_k$, el funcion $Y_k = h|_{\rho=1}$ sea una armónica esferica de grado k. Una cuento de dimensiones muestra que *todas* armónicas esfericas (en particular los associados a los polinomios de Legendre) son obtenidos en este manera.
Los primeros armónicas esfericas, y son relación a los polinomios de Legendre son:
H_0 solo consiste en funciones constantes. Les dejan a las funciones armónicas en espacio: $f = cst., f = cst./\rho$.
H_1 son funciones lineales, generado por las tres funciones x, y, z. Sus restricciones a la esfera son: $\sin\varphi\cos\theta, \cos\varphi, \sin\varphi\sin\theta$.
H_2 describimos arriba, es generado por las funciones: $xy, xz, yz, x^2 - y^2, x^2 + y^2 - 2z^2$. Obtenemos las siguientes armónicas esfericas de grado 2: $\sin^2\varphi\cos 2\theta, \sin^2\varphi\sin 2\theta, \sin 2\varphi\cos\theta, \sin 2\varphi\sin\theta, 1 - 3\cos^2\varphi$.
Estos se relacionan con los primeros polinomios de Legendre por:

$$P_0^0 = P_0 = 1, \qquad P_1^0 = P_1 = \cos\varphi, P_1^1 = \sin\varphi, \qquad P_2^0 = P_2 = \frac{1}{2}(3\cos^2\varphi - 1), P_2^1 = \frac{3}{2}\sin 2\varphi, P_2^2 = 3\sin^2\varphi$$

Tomando combinaciones lineales de las funciones arriba, tenemos funciones armónicas en espacio de la forma:

$$(*) \qquad f = \sum_{k\geq 0}(a_k\rho^k + b_k\rho^{-1-k})Y_k, \qquad Y_k = \sum_{\ell=0}^{k}(A_{k,\ell}\cos\ell\theta + B_{k,\ell}\sin\ell\theta)P_k^\ell(\cos\varphi)$$

donde $a_k, b_k, A_{k,\ell}, B_{k,\ell}$ son costantes.

Thm: Si f es armónica en un región: $\{\rho_1 < \rho < \rho_2\}$ (permitimos $\rho_1 = 0$ o $\rho_2 = \infty$), entonces se tiene un expansion de la forma $(*)$ en este región.

Comentario: Las armónicas esfericas son importante por ejemplo en la teoria de representaciones y la física cuantica (ver por ejemplo S. Sternberg, Group theory and Physics). La teorema arriba illustra la teorema de Peter-Weyl para el grupo de rotaciones.

EJEMPLOS PRINCIPALES:
1. Deja $\vec{q}_o \in \mathbb{R}^3$. La potencial generado por una masa puntual situado en $\vec{q}_o$ es proporcional a $U(\vec{q}) = \frac{1}{|\vec{q}-\vec{q}_o|}$, lo que es armónica sobre $\mathbb{R}^3 \backslash \vec{q}_o$. En particular, U es armónica en la región $|\vec{q}| > |\vec{q}_o|$ y entonces se admete

un expansion de la forma $(*)$. Considera coordenadas esfericas con φ medida del eje $\vec{q_o}$. Observa que U no depende de θ, y $U \to 0$ cuando $|\vec{q}| \to \infty$. Por consecuencia, $U(\vec{q}) = \sum_{k\geq 0} a_k |\vec{q}|^{-k-1} P_k(\cos\varphi)$ para $|\vec{q}| > |\vec{q}_o|$ y unos costantes a_k. Usando que $P_k(1) = 1$, y por $\varphi = 0$ tenemos $U = \frac{1}{|\vec{q}|-|\vec{q}_o|} = \frac{1}{|\vec{q}|} + \frac{|\vec{q}_o|}{|\vec{q}|^2} + ...$, nosotros obtenemos $a_k = |\vec{q}_o|^k$. Entonces:

$$\frac{1}{|\vec{q}-\vec{q}_o|} = \sum_{k\geq 0} \frac{|\vec{q}_o|^k}{|\vec{q}|^{k+1}} P_k(\cos\varphi) = \frac{1}{|\vec{q}|} + \frac{|\vec{q}_o|}{|\vec{q}|^2}\cos\varphi + \frac{|\vec{q}_o|^2}{2|\vec{q}|^3}(3\cos^2\varphi - 1) + O(\frac{1}{|\vec{q}|^4}), \tag{2}$$

para $|\vec{q}| > |\vec{q}_o|$, y donde $\varphi = \angle(\vec{q}, \vec{q}_o)$, y P_k son los polinomios de Legendre.
2. Considera una distribución continua de masa sobre una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y deja que $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sea el funcion de densidad (entonces $\rho \equiv 0$ en Ω^c). Vamos a derivar una expansión (eq. 3) para la funcion de fuerza, U_Ω, que es producido por Ω.
La masa total del cuerpo Ω es:

$$M := \int_{q\in\Omega} \rho \ d^3q,$$

el centro de masa del Ω es:

$$q_{cm} := \frac{\int_{q\in\Omega} \rho q \ d^3q}{M},$$

y el tensor de inercia de Ω es:

$$\mathbb{I}\vec{\omega} := \int_{q\in\Omega} \rho(q \times (\vec{\omega} \times q)) \ d^3q.$$

Recordar que para un vector unitario, $\hat{\omega}$, tenemos

$$\mathbb{I}\hat{\omega}\cdot\hat{\omega} = \int_{q\in\Omega} \rho \ dist^2(q, \ell_{\hat{\omega}}) \ d^3q$$

es el momento de inercia alrededor el eje $\ell_{\hat{\omega}} := \mathbb{R}\hat{\omega}$. Sabemos $\mathbb{I}$ es un matrix simetrico, y entonces es diagonal en un base ortonormal. Deja que e_1, e_2, e_3 sea un base ortonormal en que $\mathbb{I}$ es diagonal, y $\mathbb{I}e_j \cdot e_j =: I_j$ los autovalores de $\mathbb{I}$. Observa que

$$tr(\mathbb{I}) = \sum \mathbb{I}e_j \cdot e_j = \sum \int \rho \ dist^2(q, \ell_j) \ d^3q = 2\int \rho \ |q|^2 \ d^3q,$$

donde $\ell_j = \mathbb{R}e_j$ es el eje-e_j.
Ahora tomamos coordenadas con centro por q_{cm} (es decir $q_{cm} = 0$ es el origen). Deja que $\vec{Q} \in \Omega^c$ con $|\vec{Q}| > |\vec{q}|$ para todos $\vec{q} \in \Omega$. Pon $R := |\vec{Q}|$ y $\hat{Q} = \vec{Q}/R$. Con eq. 2, obtenemos:

$$U_\Omega(\vec{Q}) = \int_{\vec{q}\in\Omega} \frac{\rho(\vec{q}) \ d^3q}{|\vec{Q}-\vec{q}|} = \int_{\vec{q}\in\Omega} \left(\frac{1}{R} + \frac{\vec{q}\cdot\hat{Q}}{R^2} + \frac{3(\vec{q}\cdot\hat{Q})^2 - |\vec{q}|^2}{2R^3} + O(\frac{1}{R^4})\right)\rho(\vec{q}) \ d^3q.$$

El primer término simplamente integra a M/R. El segundo término integra a cero, ya que $\vec{Q}$ es fijada el segundo término es $\vec{Q} \cdot q_{cm} = 0$ debido a que $q_{cm} = 0$ es el origen. Para el término con R^{-3}, observa que $|\vec{q}|^2 = (\vec{q}\cdot\hat{Q})^2 + dist^2(\vec{q}, \ell_{\hat{Q}})$. Deja que $I := I(\hat{Q}) := \mathbb{I}\hat{Q}\cdot\hat{Q}$ sea el momento de inercia alrededor el eje-$\vec{Q}$, este tercer término integra a $\frac{1}{2R^3}(tr(\mathbb{I}) - 3I)$. Todo junto, tenemos:

$$U_\Omega(\vec{Q}) = \frac{M}{R} + \frac{I_1 + I_2 + I_3 - 3I}{2R^3} + O(\frac{1}{R^4}). \tag{3}$$

Movimiento del pendulo con funciones elípticas

Vamos a considerar osilaciones del pendulo estandard: $\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$, donde $g \approx 10$ es el costante de gravedad y ℓ es el longitud del pendulo. Por un rescalamiento de tiempo, o un cambio de unidades, podemos sin perder de generalidad considera que $\frac{g}{\ell} = 1$. La energía es:

$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + 1 - \cos\theta,$$

o bien $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2(E-(1-\cos\theta))}$. Para relacionar la posición, θ, con el tiempo, t, queremos integrar:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{2(E-(1-\cos\theta))}} = \int dt = t - t_o.$$

Pon $y = \sin\frac{\theta}{2}$, y obtenemos:

$$(*) \qquad \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(y_m^2-y^2)}} = t - t_o,$$

donde $2y_m^2 := E$. Tenga en cuenta que, cuando el movimiento es acotado (es decir oscillando alrededor el punto bajo), $y_m = \sin\frac{\theta_m}{2}$ donde θ_m es el valor maximal de θ sobre el movimiento. Tales movimientos coresponede a valores de la energía $0 < E < 2$, es decir $0 < y_m < 1$.

El integral $(*)$ se puede calcular con funcionas elípticas. Recordar que funcionas trigonometricas son definidos usando el círculo: $\frac{x}{r} = \cos\theta, \frac{y}{r} = \sin\theta$. El longitud del arco del círculo, s, satisfice $ds = r\ d\theta$. Podemos definir las funciones elítpicas por considerando una parametrización analoga de una elipse.

Considera una elipse, $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$, donde $a \geq 1$ es el eje-mayor. Deja que $r = \sqrt{x^2+y^2}, \theta$ sea coordenadas polares desde el centro del elipse para que $\frac{x}{r} = \cos\theta, \frac{y}{r} = \sin\theta$ parametriza la elipse. Pero ahora, r no es constante, de hecho tenemos $\frac{1}{r} = \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$, donde $k^2 = 1 - \frac{1}{a^2} \in [0,1)$ es la eccentricidad de la elipse. Consideramos un nuevo parametrización de la elipse por

$$(**) \qquad du = r\ d\theta = \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

Observa que u no es el longitud del arco a lo largo de la elipse, más bien solo definida para imitar la relación $r\ ds = d\theta$ que tenemos con el círculo.[1] La ecuación $(**)$ determina $u(\theta)$ y por contrario $\theta(u)$. Definimos

$$\mathrm{cn}(u;k) := \cos\theta(u) = \frac{x}{r}, \quad \mathrm{sn}(u;k) := \sin\theta(u) = \frac{y}{r}, \quad \mathrm{dn}(u;k) := \frac{1}{r},$$

que son llamadas las funciones elípticas de Jacobi. Son útil por ejemplo en integrales de la forma $(*)$ que aparece con el pendulo en la misma manera que las funciones trigonometricas son utiles para evaluar integrales con racines de polinomios cuadraticos.

Para ver esto, considera que par definición tenemos las identidades:

$$\mathrm{cn}^2(u;k) + \mathrm{sn}^2(u;k) = 1, \quad \mathrm{dn}^2(u;k) + k^2\mathrm{sn}^2(u;k) = 1.$$

Ademas, con la regla de cadena, tenemos: $\frac{d}{du}\mathrm{sn}(u;k) = \mathrm{cn}(u;k)\mathrm{dn}(u;k)$, es decir que:

$$\frac{d}{du}\mathrm{sn}(u;k) = \sqrt{(1-\mathrm{sn}^2(u;k))(1-k^2\mathrm{sn}^2(u;k))}.$$

Ahora, regresando el pendulo, en el integral $(*)$ cuando $0 < y_m < 1$ sustituimos $Y = \frac{y}{y_m}$ para que:

$$t - t_o = \int \frac{dY}{\sqrt{(1-y_m^2Y^2)(1-Y^2)}},$$

[1] Pero, similar expresiones uno encontre para determinar el longitud del arco, s, de una elipse. Por ejemplo con la parametrización $x = \cos v, y = a\sin v$, tenemos $ds = a\sqrt{1-k^2\sin^2 v}\ dv$.

y ahora con la substitución $Y = \mathrm{sn}(u; y_m)$ tenemos:

$$t - t_o = \int du \Rightarrow Y = \mathrm{sn}(t - t_o; y_m) \Rightarrow$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = y = y_m \mathrm{sn}(t - t_o; y_m). \tag{4}$$

Cuando $y_m = 1$ es posible integrar las ecuaciones de movimiento con la función tanh y cuando $y_m > 1$ uno obtene $y = \mathrm{sn}(y_m(t - t_o); \frac{1}{y_m})$.

Comentario: Desde su definición geometrical las funciones elípticas son periodico en u (ver figuras para sus gráficas). Este periodo es $4K(k)$ donde

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}.$$

Por expansion de Taylor en k ($\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$) obtenemos:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + O(k^4)\right).$$

En particular, el periodo de osilación del pendulo depende de la altura ($k = y_m$) desde que dejamos lo caer.