La etapa es una clase de curvas, Γ, y una funcional (acción) $A : \Gamma \to \mathbb{R}$. Quisieramos determinar condiciones para A, Γ que implican la existencia de extremales (minimizadores) de A sobre Γ, los que esperamos satisfficen las ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L) asociados a A.

Método directo:

El método directo en cálculo variacional es una manera para establecer la existencia de minimizadores globales. El esquema es:

(1) Verificar $\alpha := \inf_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma)$ es finita. Entonces $\exists \gamma_n \in \Gamma$ con $A(\gamma_n) \to \alpha$.
(2) Verificar que la convergencia en (1) implica $\gamma_n \to \gamma_* \in \Gamma$, para algún sentido de convergencia sobre Γ.
(3) Verificar que $\lim_{n\to\infty} A(\gamma_n) \geq A(\gamma_*)$, para que $A(\gamma_*) = \alpha$ y γ_* es un minimizador (global).
(4) Verificar que γ_* satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L).

Para illustrar el método, primero procedemos en una situación general –para que vemos las etapas principales y suposiciones para verificar– despues consideramos una situación mas especifica y relevante en la mecánica.

Ejemplo: (una situación general) Deja que Γ sea un subconjunto de un espacio de Hilbert, $\mathscr{H}$. Suponemos que A es *coercitiva*: $A(\gamma) \to \infty$ cuando $\|\gamma\| \to \infty$, donde $\|\cdot\|$ es la norma de $\mathscr{H}$. Ademas, suponemos que A esta *acotada desde abajo* sobre Γ.

(1) Como A es acotado desde abajo, existe una secuencia $\gamma_n \in \Gamma$ con $A(\gamma_n) \to \alpha = \inf_{\gamma\in\Gamma} A(\gamma)$.

(2) Como A es coercitiva, y $A(\gamma_n)$ son acotados cerca de $\alpha \in \mathbb{R}$, tenemos $\|\gamma_n\|$ son acotados.
El *teorema de Banach-Aloaglu* implica que existe una subsecuencia, γ_{n_k}, que es convergente de manera debil-*. Vamos a continuar escribir γ_n para este subsecuencia. Tenemos: $\gamma_n \rightharpoonup \gamma_*$.
Suponemos que Γ esta *cerrado* en este topología debil-*, entonces vamos a tener que $\gamma_* \in \Gamma$.

(3) Suponemos que A es *semi-continuo desde abajo* en la topología debil-*. Entonces (3) se mantiene (definicion de semi-continuo desde abajo), y consecuentamente $\gamma_* \in \Gamma$ es una minimizador de A. Con estas suposiciones, una minimizador de A en Γ existe!

(4) En este situación, expresamos las ecuaciones E-L con las siguientes condiciones sobre A y Γ:
Desde $\mathscr{H}$ es un espacio vectorial, podemos hablar de curvas diferenciables $\gamma_s \in \mathscr{H}$: las curvas para que los limites $\frac{d}{ds}\gamma_s := \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_{s+h}-\gamma_s}{h} \in \mathscr{H}$ existen (pensamos de γ_s como variaciones de curvas). Asumimos que para cada $\gamma \in \Gamma$, el conjunto $T_\gamma\Gamma := \{\frac{d}{ds}|_0 \gamma_s : \gamma_s \in \Gamma, \gamma_0 = \gamma\} \subset \mathscr{H}$ es un subsepacio lineal.
Proxima, asumimos que A es diferenciable en el sentido de Gateaux: $\frac{d}{ds}|_0 A(\gamma_s)$ existe para cada variación $\gamma_s \in \Gamma$. Pon $\eta := \frac{d}{ds}|_0 \gamma_s$, y escribimos $\delta A_\gamma(\eta) := \frac{d}{ds}|_0 A(\gamma_s)$ para el *primer variación* de A. Ya que $\gamma_* \in \Gamma$ es una minimizador, se satisface $\delta A_{\gamma_*}(\eta) = 0, \forall \eta \in T_{\gamma_*}\Gamma$. En las problemas de mecánica que consideramos, este condición traduce a que γ_* satisface la forma 'debil' o 'integrado' de las ecuaciones E-L.

En resumen: con este esquema, las condiciones principales sobre A son ser acotado desde abajo, coercitiva, y semi-continuou desde abajo. La condición principal sobre $\Gamma \subset \mathscr{H}$ es ser cerrado en algún sentido apropiado. Para ejemplos más concretos, es posible proceder con menos. Por ejemplo puede ser que Γ no es cerrada, sin embargo, todavia podemos tener que $\gamma_n \rightharpoonup \gamma_* \in \Gamma$ para secuencias que convergen a minimizadores (es decir si podrias establir que los minimizadores evitar los 'hoyos' de Γ).

Ejemplo: (una situación 'típica' en mecánica) Considera un acción de la forma $A(\gamma) = \int_\gamma \frac{|\dot\gamma|^2}{2} + U(\gamma)$, donde γ es una curva en $\mathbb{R}^n$ y $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es suave.
Consideramos el clase de curvas con *puntos finales y tiempo fijado*, p.ej. $\hat\Gamma = \{\gamma \in C^2([0,1], \mathbb{R}^n)\ t.q.\ \gamma(0) = q_0, \gamma(1) = q_1\}$ con q_0, q_1 los puntos finales fijados. Observa que estando en C^2, cualquier extremal en $\hat\Gamma$ satisface E-L. Para aplicar la esquema grande de arriba, necesitamos ver $\hat\Gamma$ como sentado en algún espacio de Hilbert.

El escoge estandard es el espacio de Sobolev $H^1 = W^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^n)$. Podemos pensar de este espacio como los senderos absolutamente continuos $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, tal que $\int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 \; dt < \infty$. Con la norma $\|\gamma\|_{H^1}^2 := \int_0^1 |\dot{\gamma}|^2 + |\gamma|^2 \; dt$, el espacio H^1 es un espacio de Hilbert. Escogimos nuestro clase de curvas Γ como las curvas en H^1 con puntos finales fijados.

Ahora que tenemos la configuración, continuamos con los pasos principales.
(1) Ya que $U(\gamma) \geq 0$, tenemos $A(\gamma) \geq 0$, y existe algún secuencia $\gamma_n \in \Gamma$ con $A(\gamma_n) \to \inf A(\gamma)$.

(2) Proxima verificamos que A es coercitiva sobre Γ. El hecho clave para nuestras estimaciones es que para una curva absolutamente continuo tenemos: $\gamma(t) - \gamma(s) = \int_s^t \dot{\gamma}(\tau) \; d\tau$. En particular, tenemos:

$$\gamma(s) = \int_0^s \dot{\gamma}(\tau) \; d\tau + \gamma(0) \Rightarrow |\gamma(s)| \leq \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| \; dt + |\gamma(0)|.$$

Con Cauchy-Schwarz, $\int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| \; dt \leq \sqrt{\int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|^2 \; dt} =: \|\dot{\gamma}\|_{L^2}$, así que:

$$\|\gamma\|_{L^2}^2 := \int_0^1 |\gamma(s)|^2 \; ds \leq \|\dot{\gamma}\|_{L^2}^2 + 2|\gamma(0)|\|\dot{\gamma}\|_{L^2} + |\gamma(0)|^2,$$

y tenemos:

$$\|\gamma\|_{H^1}^2 = \|\gamma\|_{L^2}^2 + \|\dot{\gamma}\|_{L^2}^2 \leq 2\|\dot{\gamma}\|_{L^2}^2 + |\gamma(0)|\|\dot{\gamma}\|_{L^2} + |\gamma(0)|^2.$$

Ahora, si $\|\gamma\|_{H^1} \to \infty$ entonces $\|\dot{\gamma}\|_{L^2} \to \infty$, ya que $\gamma(0)$ es fijado. Tenga en cuento que, desde $U \geq 0$, $2A(\gamma) \geq \|\dot{\gamma}\|_{L^2}^2$. Entonces, sí, A es coercitiva. Como el caso general, existe $\gamma_* \in H^1$ con $\gamma_n \rightharpoonup \gamma_*$.

(2') Queda verse que $\gamma_* \in \Gamma$, es decir que Γ es debil-* cerrada. Primer, observa que por coercitividad, γ_n son acotados en H^1, digamos $\|\gamma_n\|_{H^1} \leq M$ para algún constante $M \in \mathbb{R}$.
Proxima, desde γ_n son absolutamente continuo, tenemos las estimaciones:

$$|\gamma_n(t) - \gamma_n(s)| \leq \int_s^t |\dot{\gamma}_n(\tau)| \; d\tau \leq \sqrt{|t-s|}\|\dot{\gamma}_n\|_{L^2} \leq \sqrt{|t-s|}\|\dot{\gamma}_n\|_{H^1} \leq M\sqrt{|t-s|} \quad (*)$$

$$|\gamma_n(s)| \leq \|\dot{\gamma}_n\|_{L^2} + |\gamma(0)| \leq \|\gamma_n\|_{H^1} + |\gamma(0)| \leq M + |\gamma(0)| \quad (**)$$

Porque $\gamma(0)$ es fijado, $(**)$ dice que las curvas γ_n son uniformamente acotadas, mientras $(*)$ dice que γ_n son uniformamente equicontinuo. Ahora, la *teorema de Arzela-Ascoli* implica que existe una subsecuencia γ_{n_k}, que converge uniformamente (en la norma C^0). De nuevo reetiquando, escribimos este C^0 convergente subsecuence como γ_n. Entonces, podemos asumir que nuestro secuencia minimizador, γ_n, converge a γ_* en el sentido debil-* y en el sentido C^0. En particular desde $\gamma_n(0) = q_0$ es fijado:

$$|\gamma_*(0) - q_0| = |\gamma_*(0) - \gamma_n(0)| \leq \sup_{s \in [0,1]} |\gamma_*(s) - \gamma_n(s)| = \|\gamma_* - \gamma_n\|_{C^0} \to 0,$$

es decir que $\gamma_* \in H^1$ tiene los mismos puntos finales q_0, q_1 y de hecho esta en Γ.

(3) Verificamos que A es semi-continuo desde abajo: $A(\gamma_*) \leq \lim_{n\to\infty} A(\gamma_n)$. Una vez hecho esto, ya que acabamos de mostrar que $\gamma_* \in \Gamma$, tenemos $A(\gamma_*) = \alpha = \inf_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma)$. La curva γ_* sería una minimizador!
Primero, desde $\gamma_n \to \gamma_*$ uniformamente (norma C^0) y U es suave, tenemos $U(\gamma_n(t)) \to U(\gamma_*(t))$ uniformamente y también $\int_0^1 U(\gamma_n(t)) \; dt \to \int_0^1 U(\gamma_*(t)) \; dt$.
Proxima, controlamos el termino cinético. Considera la funciónal lineal $\ell : H^1 \to \mathbb{R}, \gamma \mapsto \int_0^1 \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma}_* \; dt$. Por definición de convergencia debil-*, tenemos $\ell(\gamma_n) \to \ell(\gamma_*) = \|\dot{\gamma}_*\|_{L^2}^2$. Ahora,

$$0 \leq \int_0^1 |\dot{\gamma}_n - \dot{\gamma}_*|^2 \; dt = \|\dot{\gamma}_n\|_{L^2}^2 + \|\dot{\gamma}_*\|_{L^2}^2 - 2\ell(\gamma_n)$$

$$\Rightarrow 2\ell(\gamma_n) - \|\dot\gamma_*\|^2_{L^2} \le \|\dot\gamma_n\|^2_{L^2} \le \|\gamma_n\|^2_{H^1} \le M \quad (***)$$

Desde $\|\dot\gamma_n\|^2_{L^2}$ es una secuencia acotada, pasando quizas a otra subsecuencia tenemos que $\lim_{n\to\infty}\|\dot\gamma_n\|^2_{L^2}$ existe. Ahora toma limites de los dos lados en $(***)$ y usa que $\ell(\gamma_n) \to \|\dot\gamma_*\|^2_{L^2}$. Llegamos a:

$$\|\dot\gamma_*\|^2_{L^2} \le \lim_{n\to\infty}\|\dot\gamma_n\|^2_{L^2}.$$

Entonces, $A(\gamma_*) = \|\dot\gamma_*\|^2_{L^2} + \int_0^1 U(\gamma_*)\,dt \le \lim_{n\to\infty}\|\dot\gamma_n\|^2_{L^2} + \int_0^1 U(\gamma_n)\,dt = \lim_{n\to\infty} A(\gamma_n)$, como deseamos.

(4) Finalmente, establecemos algunas *condiciones de regularidad* para γ_*. A saber, ahora mismo solo sabemos que $\gamma_* \in \Gamma$ es absolutamente continuo –puede ser que las ecuaciones E-L (EDO de 2^o orden) no tenga sentido por tales curvas. Nos gustaria mostrar que γ_* no es solamente absolutamente continuo, pero es de hecho en C^2! Si este es el caso, con las mismas computaciones que hicimos en clase (integración por partes), vamos a tener que γ_* satisface las ecuaciones de E-L.

Un cálculo produce:

$$0 = \delta A_{\gamma_*}\eta = \int_0^1 \dot\gamma_*\cdot\dot\eta + \nabla U(\gamma_*)\cdot\eta\,dt, \quad \eta \in T_{\gamma_*}\Gamma = \{H^1([0,1],\mathbb{R}^n) : \eta(0) = \eta(1) = 0\}.$$

Actualmente, la integración por partes que conduce a las ecuaciones de E-L, podria no tener sentido, ya que requiere encontrar $\ddot\gamma_*$. Sin embargo, podemos integrar por partes el segundo termino para obtener:

$$0 = \delta A_{\gamma_*}\eta = \int_0^1 (\dot\gamma_* - v(\gamma_*))\cdot\dot\eta\,dt, \quad v(\gamma_*(t)) := \int_0^t \nabla U(\gamma_*(s))\,ds.$$

La formula arriba queda cierto para cualquier $\eta \in T_{\gamma_*}\Gamma$, entonces (ver p.ej. Moser):

$$\dot\gamma_*(t) = \int_0^t \nabla U(\gamma_*(s))\,ds, \text{ para casi todos } t \in [0,1].$$

Entonces $\dot\gamma_*$ es una función que es egal casi siempre a una función continuo. De hecho, podemos tomar $\dot\gamma_* = v(\gamma_*)$ sobre $[0,1]$, debido a $\int_0^t \dot\gamma_* dt = \int_0^t v(\gamma_*)\,dt = \gamma_*(t) - \gamma_*(0)$ para cada t. Entonces tenemos γ_* es C^1. Ademas, la integral de una función continuo es continuamente diferenciable, para que $\gamma_* \in C^2$ con $\ddot\gamma_* = \nabla U(\gamma_*)$, es decir γ_* satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Referencias: Seguimos de cerca estas notas, donde aprendi este método (vienen de un curso dado por mi asesor de posgrado). Para mas detalles sobre regularidad (4) en estas problemas mecánicas, ver las primeras paginas de Moser 'lectures on calculus of variations'. Puedes ver ch. 8 de Gelfand and Fomin para un sobrevista del método. Para discusiones más detalladas, ver ch. 5 de Young, o, para algo más reciente y avanzado, ver M. Struwe 'Variational Methods'.

La intención de estas notas es que las ideas generales serian acesible sin muchos antecedentes en análisis –en caso de que no han visto mucho análisis, aqui una motivación para aprenderlo! Por otro lado, si ya acostumbrarse con estos antecedentes, aqui vemos un aplicación importante historicamente en la desarollo de la tema de análisis. Una referencia que me ha servido bien es Kolmogorov y Fomin 'Elements of the theory of functions and functional analysis'.

Enfaticemos que normalmente sale mal en la situación de el segundo ejemplo. A saber, muchas funciones potenciales de interesa no son definidos en todo el espacio: se pueden tener singularidades (tipicamente debido a colisiones). Por ejemplo, fuerzas centrales $U \sim 1/r^\alpha$ con $\alpha > 0$, solo estan definidos aparte del origen (para $r > 0$). Sin embargo, la mayoridad de nuestros argumentos arriba pasan sin cambio, *excepto* cuando afirmamos $\gamma_* \in \Gamma$. Mas preciso, curvas en H^1 que evitan las singularidades de U no son tipicamente subconjuntos cerados de H^1. Para tales problemas, uno tiene que verificar que minimizadores $\gamma_* \in H^1$ quedan en Γ, es decir queda establer que minimizadores evitan colisiones.

Para terminar, mencionamos que estos métodos directs a menudo se pueden aplicar –con algunas modificaciones– a clases de curvas mas ricos que puntos finales y tiempo fijado. En este manera, tenemos una esquema para establecer órbitas interesantes en sistemas mecánicas. Por ejemplo, uno puede intentar establecer órbitas periodicas que realizan ciertas clases de homotopia en la variedad de configuraciones. Para ejemplos en mecánica celeste, ver R. Montgomery: "Action spectrum and collisions in the planar three-body problem."