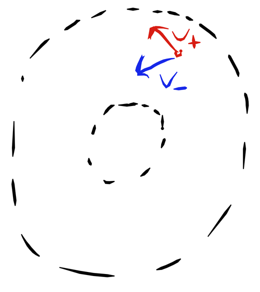


$*$ correción para la última clase $*$

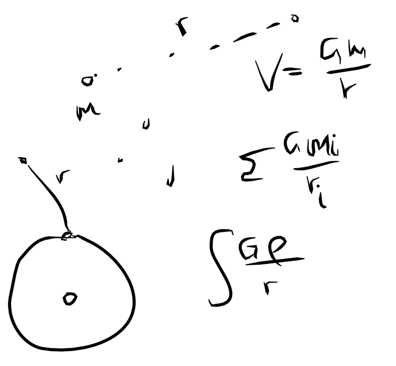
Potenciales

Considera una distribución continua de masa extendida sobre la superficie de una esfera (concha esferica).

Tal distribución de masa se induce la misma campo de fuerzas (en su exterior) que una masa puntual y ningún fuerzas en su interior

$$\Leftrightarrow$$

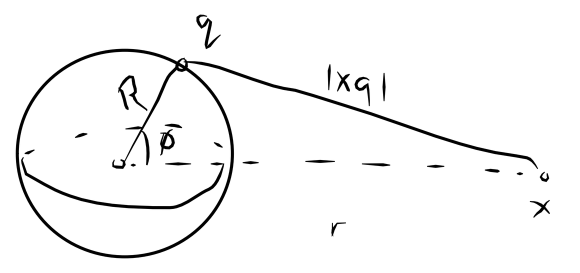
$$F \sim \frac{1}{r^2}.$$



$V = \frac{Gm}{r}$

$\Sigma \frac{Gm_i}{r_i}$

$\int \frac{G\rho}{r}$

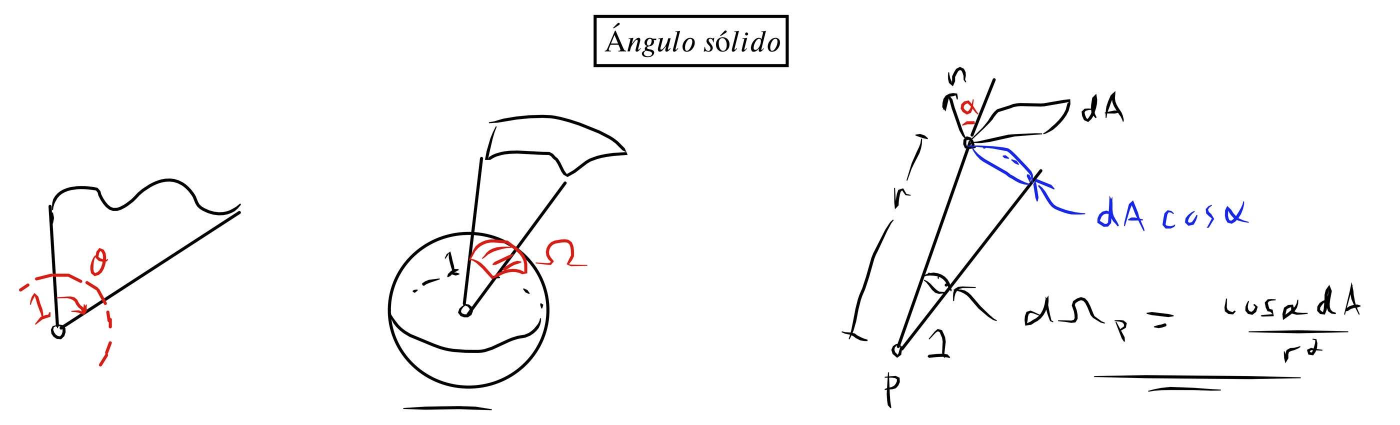


$$V = -\int_{S^2_R} \frac{\sigma\, dA}{|xq|} = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sigma \sin\phi\, R^2\, d\theta\, d\phi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\phi}}$$

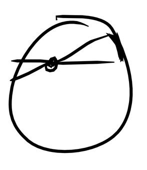
$u = \cos\phi$

$$= -\frac{4\pi R^2 \sigma}{r} = -\frac{M}{r}. \quad \square$$

Ángulo sólido

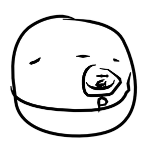


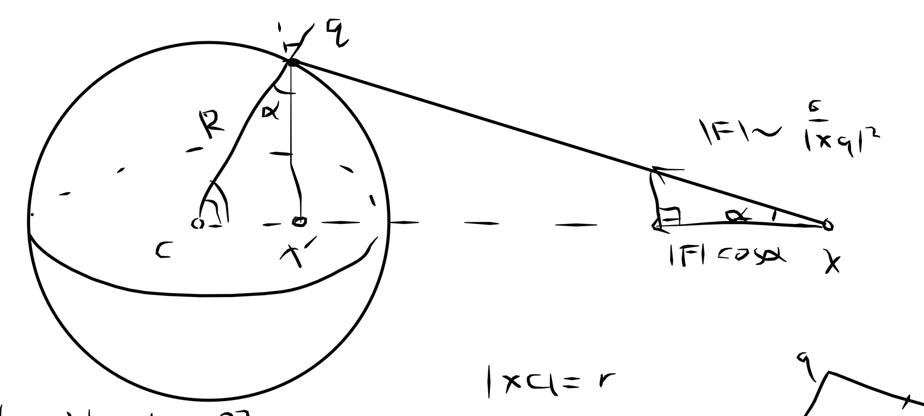
$$d\Omega_p = \frac{\cos\alpha\, dA}{r^2}$$



El ángulo sólido atravesado de un superficie (desde un punto) es el area de su proyección por una esférica del radio 1 alrededor el punto.

ejemplo : el total ángulo sólido de una esfera desde un punto en su interior es 4π.





$$\int_{q \in S^2_R} \frac{\sigma\, dA}{|xq|^2}\cos\alpha = \int \frac{\sigma\, |x'q|^2\, d\Omega_{x'}}{|xq|^2}$$

$$= \sigma \int \frac{R^2\, d\Omega_{x'}}{|r|^2} = \frac{4\pi R^2 \sigma}{r^2}$$

$$= \frac{M}{r^2}$$

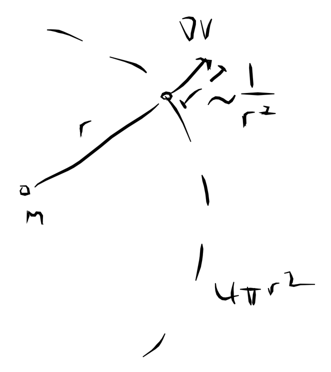
$|cx||cx'| = R^2$ $\quad |xc| = r$

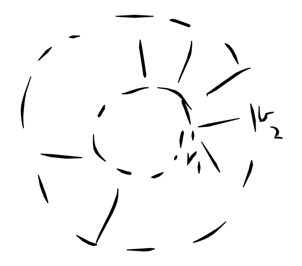
$\Delta cqx' \sim \Delta cxq$

Ecuación de Poisson

Deja que $V \sim -\frac{1}{r}$ sea la potencial debida a una masa puntual. Entonces :

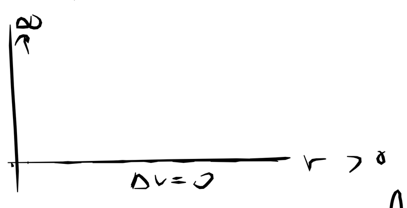
$$\int_{B^3_r} \Delta V\, d^3q = \int_{S^2_r} \nabla V \cdot n\, dA = \int_{S^2_r} \frac{Gm\, dA}{r^2} = k \neq 0.$$





$\int \Delta V = 0 \quad 0 < r_1 \le r \le r_2 \Rightarrow \Delta V = 0 \quad \mathbb{R}^3 \setminus 0$

$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta V = k$

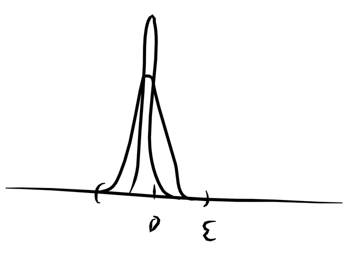


ΔV como un funcion por $\mathbb{R}^3$?
Supone que $k = 1$ (o rescalar V).

$$\Delta V = \delta_0 = \delta$$

$(\delta, f) := f(0)$ es un 'distribución' o 'función generalizada'
Para etablir su propiedades reemplazar δ con δ_ε donde :
$\delta_\varepsilon = 0$ para $|x| > \varepsilon$ y

$$\int \delta_\varepsilon = 1.$$



$$\int f(x)\delta(x)\, dx = \int f\, \delta_\varepsilon\, dx = f(0)$$

Strichartz : Guide to distribution theory
Arnold : Lectures on partial differential equations (lecture 9)

$$\int \delta(x)\, f(x)\, d^3x = f(0)$$

$$\int \delta(x - x_o)\, f(x)\, d^3x = f(x_o)$$

$$\Delta V_\Omega(x_0) = \int_{x \in \Omega} \rho(x)\,\delta(x - x_0)\, d^3x = \rho(x_0)$$

Considera una distribución de masa sobre un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con densidad $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ $(\rho = 0$ en $\Omega^c)$
Produce el potencial :

$$V_\Omega(x_o) := -\int_{x \in \Omega} \frac{\rho(x)\, d^3x}{|x - x_o|}$$

que satisfice la ecuación de Poisson :

$$\Delta V_\Omega = \rho$$

Funciones armónicas

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es armónica donde $\Delta f = 0$

ejemplo : potenciales, V_Ω, son armónica por Ω^c.

ejemplo (funcionas armónicas sobre $\mathbb{R}^2$) :

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r \cdot) + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2$$

$$r^n \ (z^n) \xrightarrow{\mathrm{Re}} \begin{cases} r^{\pm n} \cos n\theta \\ r^{\pm n} \sin n\theta \end{cases} \xleftarrow{\mathrm{Im}}$$

$$f(r,\theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta)$$

$$\frac{\Theta}{r}(rR')' = -\frac{R}{r^2}\Theta''$$

$$\frac{r}{R}(rR')' = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda^2$$

$$\Theta = A\cos\lambda\theta + B\sin\lambda\theta \Rightarrow \lambda = n \in \mathbb{Z}.$$

$$R = a\, r^n + b\, r^{-n} \quad (n \neq 0)$$

$$R = a + b\log r \quad (n = 0)$$

$\Theta'' = -\lambda^2 \Theta$

$x = \log r$

$\frac{d^2R}{dx^2} = n^2 R$

Tenemos las funciones armónicas de la forma :

$$(*) \quad f(r,\theta) = a_0 + b_0 \log r + \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} r^n\,(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

Teorema : cada funcion armónica sobre un annilo $(r_1 < r < r_2)$ admete un expansion de la forma arriba $(*)$

Armónicas esfericas

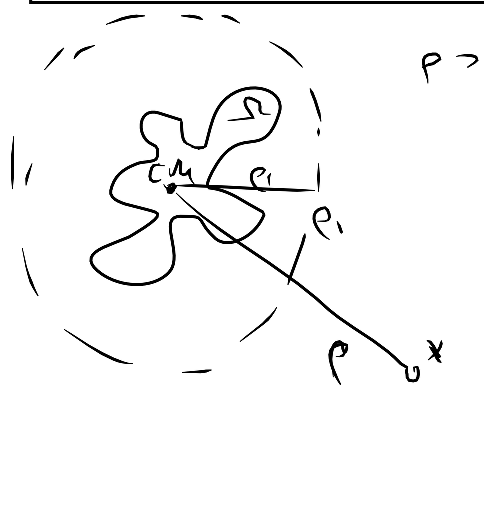
Por método de seperación de variables obtenemos funcionas armónicas en $\mathbb{R}^3$ de la forma :

$$(**) \quad f(\rho,\theta,\phi) = \sum_{k \ge 0} (a_k \rho^k + b_k \rho^{-1-k}) Y_k(\theta,\phi)$$

donde $Y_k = \sum_{\ell = 0}^{k} (A_{k\ell} \cos \ell\theta + B_{k\ell} \sin \ell\theta) P_k^\ell(\cos\phi)$ es una 'armónica esferica'

y P_k^ℓ es un 'polinomio de Legendre'.

Teorema : Cada función armónica sobre un region $\rho_1 < \rho < \rho_2$ admete un expansion de la forma $(**)$



$\rho > \rho_1 \mid \Delta V_\Omega = 0$

$$\underline{\underline{I}}_\Omega \vec{\omega} = \int_{q \in \Omega} q \times (\omega \times q)\, \rho(q)\, d^3q$$

$$I(x) = \underline{\underline{I}}_\Omega(\hat{x}) \cdot \hat{x}$$

$$V_\Omega(x) = -\frac{M}{\rho} - \frac{I_1 + I_2 + I_3 - 3I(x)}{2\rho^3} + O\left(\frac{1}{\rho^4}\right)$$

$*$ Spin-orbit model