Pendulo y funciones elípticas

Recuerda : $E = \dfrac{\dot\theta^2}{2} + 1 - \cos\theta$

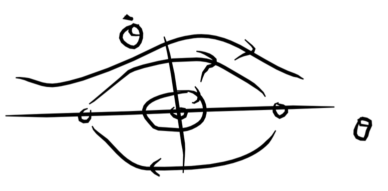
$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2(E + \cos\theta - 1)}$$

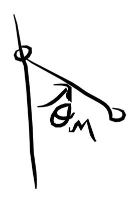
Relacionamos posición con tiempo por integrando :

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{2(E + \cos\theta - 1)}} = t - t_o$$

La substitución $y = \sin\frac{\theta}{2}$ $\left(y\ E = 2y_m^2\right)$ *conduce a* :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(y_m^2 - y^2)}} = t - t_o.$$





$E = 1 - \cos\theta_m$
$= 2y_m^2$

para $y_m \in (0,1)$, *subst.* $y_m Y = y \Rightarrow$

$$t - t_o = \int \frac{dY}{\sqrt{\left(1 - Y^2\right)\left(1 - y_m^2 Y^2\right)}}$$

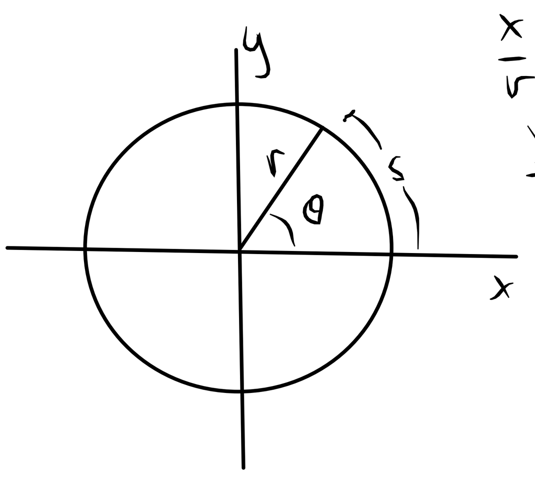
subst. $Y = sn\left(u;y_m\right) \Rightarrow$
$Y = sn\left(t - t_o;y_m\right)$

$\sin\frac{\theta}{2} = y = y_m sn(t - t_o; y_m)$

Analogía con funciones trigonometricas :

$$t - t_o = \int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}},\quad \text{con subst. } y = \sin u,\ \left(\frac{dy}{du} = \sqrt{1 - y^2}\right)$$

$$\Rightarrow t - t_o = u \Rightarrow y = \sin\left(t - t_o\right).$$



$\frac{x}{r} = \cos\theta$
$\frac{y}{r} = \sin\theta$
$s = r\theta$
$ds = r\,d\theta$

$$x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1,\quad k^2 := 1 - \frac{1}{a^2} \in (0,1)$$

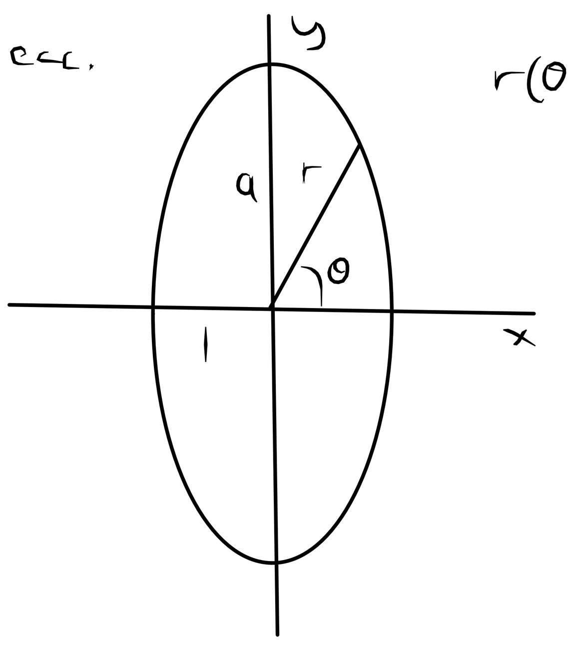
$$\frac{1}{r} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}$$

$du = r\,d\theta$ (*reparametrización por* u)

$$\frac{x}{r} = \cos\theta = cn(u;k),\quad \frac{y}{r} = sn(u;k),\quad \frac{1}{r} = dn(u;k)$$

$$\frac{d}{du} sn(u;k) = \sqrt{\left(1 - sn^2(u;k)\right)\left(1 - k^2 sn^2(u;k)\right)}$$

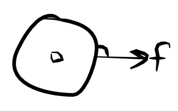
$k = ecc.$



$r(\theta)$ $\quad du = r\,d\theta$
$\theta(u)$

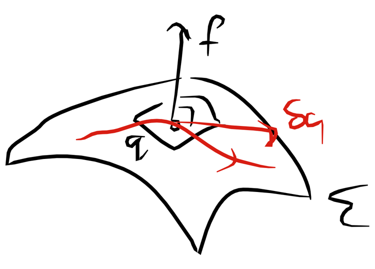
Restricciones

$q \in \mathbb{R}^2 \quad |q| - \ell = 0$



$\mathbb{R}^{3N} \supset \Sigma = \{c(q) = 0\}$

Consideramos restricciones sobre una sistema de partículas :
$q_1, \ldots, q_N \in \mathbb{R}^3$
de la forma :
$c_1(q_1, \ldots, q_N) = 0, \ldots, c_k(q_1, \ldots, q_N) = 0.$



$q(t) \in \Sigma \quad q(0) = q$
$\dot q(0) = \delta q \in T_q\Sigma$

$f \perp T_q\Sigma$

Principio de equilibrio estático :

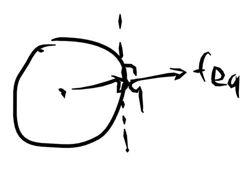
Una sistema de partículas con restricciones sometido a las fuerzas :
$f_1, \ldots, f_N$
es en equilibrio cuando :

$$\sum f_j \cdot \delta q_j = 0$$

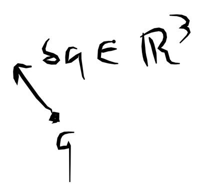
para todos velocidades virtuales, δq_j.

ejemplos :
1. *pendulo* $q \in \mathbb{R}^2$, $|q| = \ell$
2. *no restricciones* : $q \in \mathbb{R}^3$
3. $q \in \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *una superficie*

1.



2.



$f \cdot \delta q = 0 \quad \forall \delta q \in \mathbb{R}^3$

$f = 0$

3.

Calkin :
Lagrangian and Hamiltonian mechanics

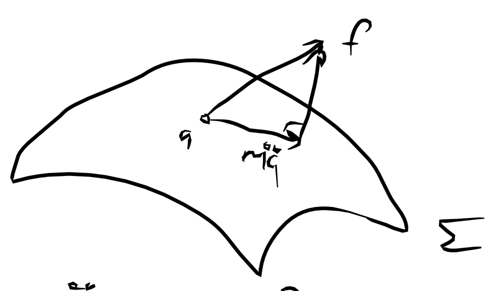
De la estática a la dinámica

Principio de d'Alembert

Para una sistema de partículas con restricciones sometidos a las fuerzas :
$f_1, \ldots, f_N$
sus aceleraciones satisficen :

$$\sum (f_j - m_j \ddot q_j) \cdot \delta q_j = 0$$

para todes velocidades virtuales, δq_j.



$m\ddot q_{tan} = f_{tan}$

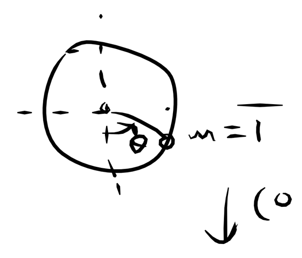
∗ indep. of how Σ is param.

*** este principio también aplica a sistemas continuos ***

$$\int (f - \rho\ddot q) \cdot \delta q\ d^3q = 0.$$

las fuerzas, f, *y velocidades virtuales*, δq, *ahora son campos vectoriales sobre el region considerada.*

1.



$q = (\sin\theta, -\cos\theta)$
$\delta q = \delta\theta(c\theta, s\theta) \quad \delta\theta \in \mathbb{R}$
$\ddot q = \ddot\theta(c\theta, s\theta) + \dot\theta^2(-s\theta, c\theta)$

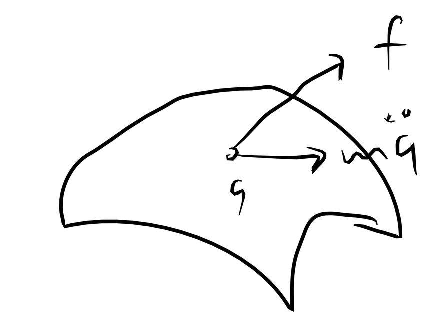
$0 = (f - \ddot q) \cdot \delta q = \delta\theta\left[-g s\theta - \ddot\theta\right]$

$\Rightarrow \ddot\theta = -g s\theta$

2. $\sum(f_j - m_j\ddot q_j) \cdot \delta q_j = 0 \quad \delta q_j \in \mathbb{R}^3$

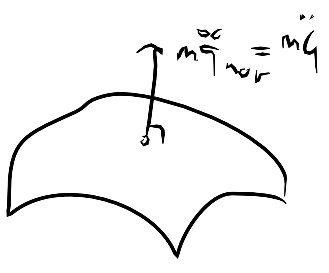
$f_j = m_j \ddot q_j$

3.



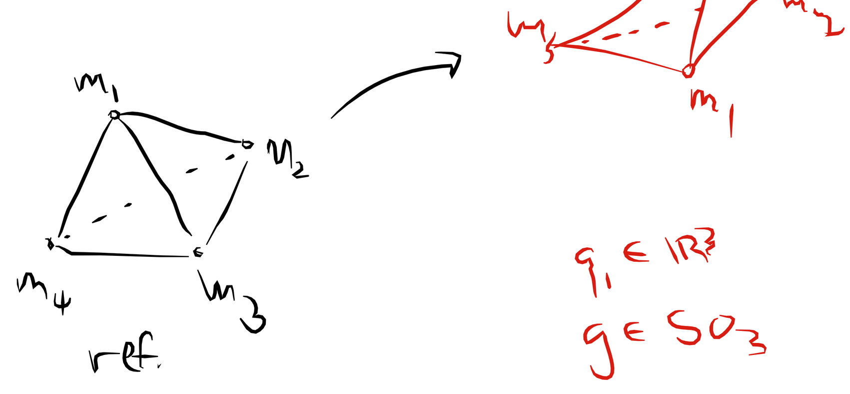
$m\ddot q_{tan} = f_{tan}$

$$\left[\begin{array}{ll} f = 0 & (\text{free motion}) \\ m\ddot q_{tan} = 0 & (\ddot q \perp T_q\Sigma) \end{array}\right]$$



Cuerpos rígidos

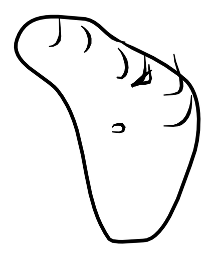
Un cuerpo rígido (discreto) es un coleción de masas puntuales
$q_1, \ldots, q_N$
para que todos las distancias mutuas son fijados :
$|q_i - q_j| = cst.$



$q_1 \in \mathbb{R}^3$
$g \in SO_3$

$\mathbb{R}^3 \times SO_3$

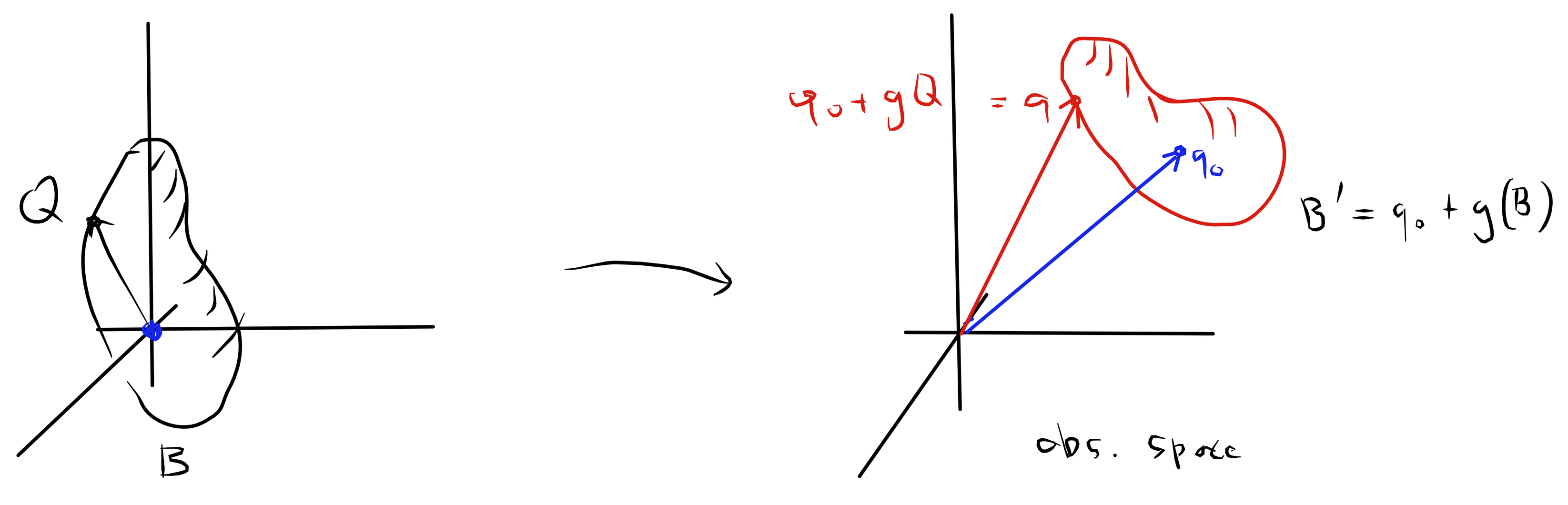
Un cuerpo rígido (continuo) es un subconjunto
$B \subset \mathbb{R}^3$
que solo se puede mover con isometrias :
$g(B) + a,\ \ g \in SO_3 \ \ a \in \mathbb{R}^3.$



$\rho : B \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Cuerpo rígido libre

$f = 0$



El movimiento del cuerpo está dado por una curva :
$\left(q_o(t), g(t)\right) \in \mathbb{R}^3 \times SO_3.$