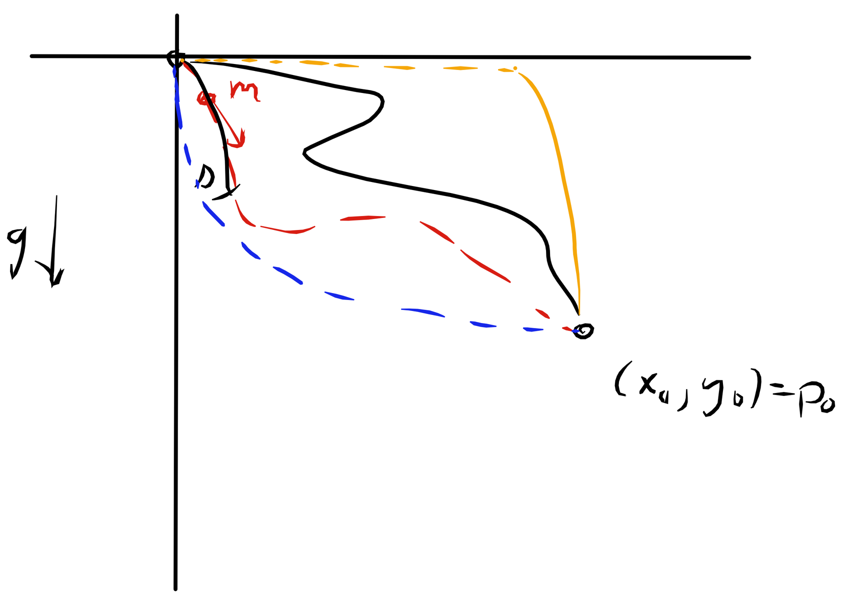
Ejemplos clásicos en cálculo variacional

1. Brachistrone



$\Gamma = \{ y : [0, x_0] \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R} : y(0) = 0, \; y(x_0) = y_0 \}$ $(x, y(x))$

$y \longmapsto T(y) = \int_0^T dt = \int_0^\ell \frac{ds}{v} = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{v} dx$

$x(t), y(t) \longrightarrow v(t) = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}$

$s(t) = \int_0^t v \, dt \qquad ds = v \, dt$

$E = \frac{mv^2}{2} + mgy = 0 \Rightarrow v^2 = -2mgy \quad (y \leq 0)$

Que curva minimiza el tiempo de descenso?

Una curva que es una gráfica, $(x, y(x))$, tiene tiempo de descenso :

$$\int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{-2gy}} \, dx = \int_0^{x_0} L(y, y') \, dx$$

$\ast \; \frac{d}{dx} \partial_{y'} L = \partial_y L \quad$ (E-L eq's)

$e = y' \partial_{y'} L - L \quad$ cst. over ext's.

$\partial_{y'} L = \frac{y'}{\sqrt{-2gy(1 + y'^2)}}$

$$(y')^2 = -\frac{k^2 + y}{y}$$

$$\sqrt{\frac{-y}{k^2 + y}} \, dy = -dx$$

$$y = -k^2 Y \quad \leftarrow \text{sub.}$$

$$\sqrt{\frac{Y}{1 - Y}} \, dY = \frac{dx}{k^2}$$

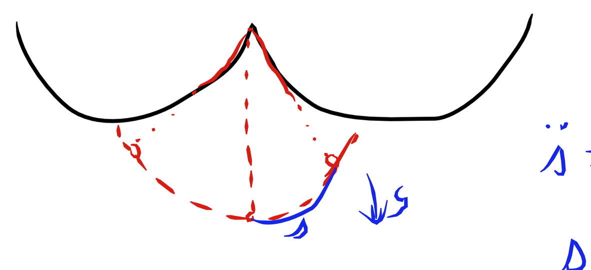
$$Y = \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} \, d\theta = \frac{dx}{k^2} = \frac{1 - \cos\theta}{2} \, d\theta$$

$\begin{cases} y = -\frac{k^2}{2}(1 - \cos\theta) \\ x = \frac{k^2}{2}(\theta - \sin\theta) \end{cases}$

cicloide!

Propiedades de cicloide

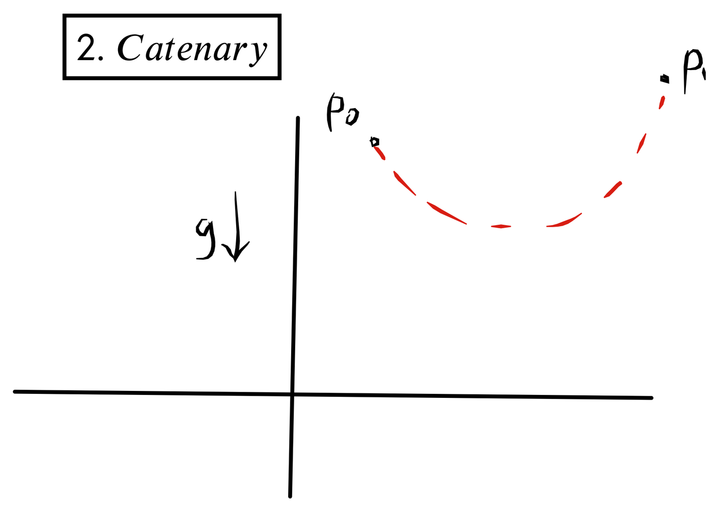


$\ddot s = -k^2 s$

$s(t) = A \cos(kt + \phi)$

$\ast$ *la evolvente de una cicloide es una cicloide*
$\ast$ *la cicloide es una curva tautochrone*
$\ast$ *la cicloide es una curva brachistrone*

2. Catenary



$\Gamma = \{ y : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}, \; y(x_j) = y_j, \text{ suave} \}$

$\Gamma_\ell \subset \Gamma$

fixed $\rightarrow \ell = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \qquad (\ell > \text{dist}(P_0, P_1))$

$[\, m \ddot q = \partial_q u = 0 \quad$ c.p.s of u $\,]$

$u(y) = \int_{x_0}^{x_1} \rho g y \sqrt{1 + (y')^2} \, dx \qquad (\rho = \text{cst.})$

Que forma colgará una cadena?

Deja que $\Gamma_c \subset \Gamma$ sea definida por una condición de la forma
$\Gamma_c = \{ \gamma \in \Gamma \text{ t.q. } B(\gamma) = c \}$ *donde c is un constante.*
Considera un funcional $\Gamma \ni \gamma \mapsto A(\gamma) \in \mathbb{R}$.

Entonces :
$\gamma^* \in \Gamma_c \subset \Gamma$ *es un extremal de* $A + \lambda B : \Gamma \to \mathbb{R}$ *para algún* $\lambda \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$
γ^* *es un extremal de* $A|_{\Gamma_c} : \Gamma_c \to \mathbb{R}$

$B : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$

prf: $\gamma_s \in \Gamma_c$ var. of γ^*

$0 = \frac{d}{ds}\Big|_0 A(\gamma_s) + \underbrace{\lambda B(\gamma_s)}_{\text{l.c.}} = \frac{d}{ds}\Big|_0 A(\gamma_s) \quad \square$

Para la cadena buscamos extremales de :

$$\int_{x_0}^{x_1} g\rho \, (y - \lambda) \sqrt{1 + (y')^2} \, dx = \int_{x_0}^{x_1} L(y, y') \, dx$$

sobre Γ.

$e = y' \partial_{y'} L - L$

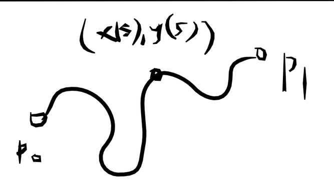
$\Rightarrow \frac{(y - \lambda)^2}{k^2} = 1 + (y')^2$

subst. $\cosh u = \frac{y - \lambda}{k} \qquad u = \frac{x + a}{k}$

$\Rightarrow dx = k \, du$

$\Rightarrow y = \lambda + k \cosh \frac{x + a}{k} \qquad$ cat. curve.

$\ast$ un otra opción para introducir la restricción de longitud constante $\ast$



$\Gamma = \{ (x(s), y(s)), s \in [0, \ell] \text{ t.q. } (x(0), y(0)) = P_0, \; (x(\ell), y(\ell)) = P_1 \}$

$\Gamma_1 \subset \Gamma$

$\ast \int \rho g y \, ds + \lambda(\dot x^2 + \dot y^2) \; \ast$

$\dot x^2 + \dot y^2 = 1 \quad // \quad u = \int_0^\ell \rho g y \, ds$

Buscamos extremales de

$$\int_0^\ell \rho \, g \, y + \lambda(\dot x^2 + \dot y^2) \, ds = \int_0^\ell L(s, x, y, \dot x, \dot y) \, ds, \quad \text{sobre } \Gamma$$

$\gamma^* \in \Gamma_1 \subset \Gamma$ *extremal de*

$\Gamma \ni \gamma \mapsto \int_0^\ell \rho \, g \, y + \lambda(s)(\dot x^2 + \dot y^2) \, ds$, *por algún* $\lambda : [0, \ell] \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$

γ^* *extremal de*

$\Gamma_1 \ni \gamma \mapsto \int_0^\ell \rho \, g \, y \, ds$

ex.

$\frac{d}{ds} \partial_{\dot x} L = \partial_x L = 0 \Rightarrow 2\lambda \dot x = k \qquad 2\lambda = \frac{k}{\dot x}$

$\frac{d}{ds} \partial_{\dot y} L = \partial_y L = \rho g = \frac{d}{ds}(2\lambda \dot y)$

$y' = \frac{dy}{dx}$

at $\gamma^* \in \Gamma_1 \qquad 1 + (y')^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{\rho g}{k} = \frac{d}{ds} \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{d}{ds} y' = \frac{dx}{ds} y''$$

$$\Rightarrow c = \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

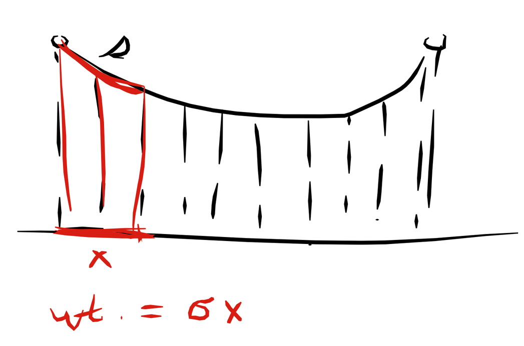
subst. $y' = \sinh u \quad (y'' = \cosh u \, u')$

$\Rightarrow c \, dx = du$

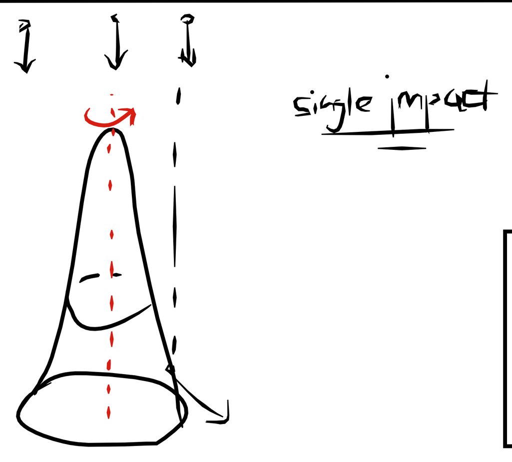
$\Rightarrow y' = \sinh c(x + a)$

$\Rightarrow y = b + \frac{1}{c} \cosh c(x + a)$

"loaded chain"



$\int_0^x \rho(s) \, ds = \sigma \, x(s)$



comentario : problema de Newton sobre 'resistencia minimal'

$\ast$ al asumiendo que la superficie es uno de revolución, se reduce a una problema del tipo que consideramos arriba.

$\ast$ tales soluciones son extremales, pero no son mínimos!