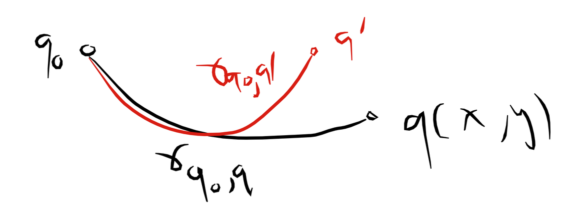
Cuando son extremales mínimos?

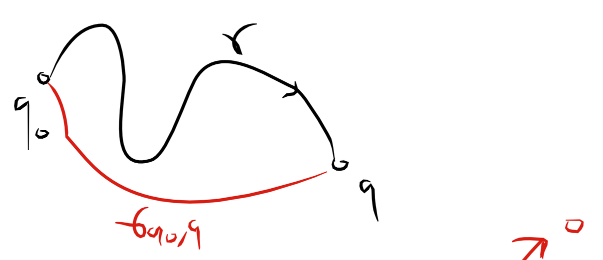


un método :

Suponer que tenemos unas curvas extremales (una familia de extremales) las que sospechamos son mínimos y :
1. para cada q_0, q hay un tal curva de la familia conectandolos.

Tomando q_0 fijado, y deja que $q(x,y)$ se mueve. Definimos :

$$S(x,y) := \int_{\gamma_{q_0,q}} L(\gamma,\dot\gamma)\,dt = A(\gamma_{q_0,q})$$



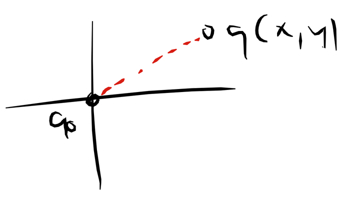
Pon $dS = S_x dx + S_y dy = \overbrace{\left(S_x\dot x + S_y\dot y\right)}^{\Phi} dt =: \Phi(\gamma,\dot\gamma)\,dt$

Si $L(\gamma,\dot\gamma) \geq \Phi(\gamma,\dot\gamma)$ y $S(q_0) = 0$, entonces las curvas son mínimas.

prf: $\displaystyle 0 \leq \int_\gamma L - \Phi\, dt = A(\gamma) - \int_\gamma dS = A(\gamma) - \underbrace{S(q)}_{A(\gamma_{q_0,q})} + \cancel{S(q_0)}^{0}$

$\Rightarrow A(\gamma_{q_0,q}) \leq A(\gamma)$ $\square$

Ejemplo (lineas) :



$L = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}$

$S(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$dS = \dfrac{x\,dx + y\,dy}{S} = \overbrace{\dfrac{x\dot x + y\dot y}{S}}^{\Phi} dt$

$L \overset{?}{\geq} \Phi$ ✓

$\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}\sqrt{x^2+y^2} \overset{?}{\geq} x\dot x + y\dot y$

$|(\dot x,\dot y)| \cdot |(x,y)| \geq (x,y)\cdot(\dot x,\dot y)$ CAUCHY-SCHWARZ

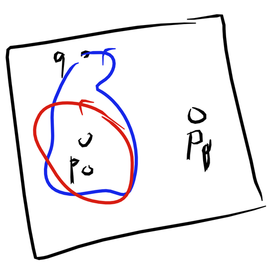
referencias :
Arnold – part 2
Gelfand, Fomin – Calculus of variations
Young – Lectures on calculus of cariations and optimal control ← + MOSER – CCV

Ventajas de punto de vista Lagrangiana para la dínamica de sistemas mecánicas

una situación general (masas puntuales que interactúan)

$L = \sum \dfrac{m_j|\dot q_j|^2}{2} + U(q_1,\dots,q_N)$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{p_0, p_1\}$ $\Gamma = \{\text{loops around } p_0\}$



$A : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$

* mas facíl escribir las ecuaciones de movimiento : en cualquier sistema de coordenadas, hacer de frente con restricciones.

* tenemos un esquema para etablecer la existencia de ciertas soluciones : minimizar la acción sobre un clase de curvas!

---

d'Alembert ⇒ Lagrangian

Considera las partículas :
$q = (q_1,\dots,q_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ con masas m_j,
sometidos a fuerzas $f = (f_1,\dots,f_N)$, con $f_j = \partial_{q_j} U$ conservativa,
y sujeta a las restricciones :
$q \in \Sigma^M \subset \mathbb{R}^{3N}$.

$\sum (f_j - m_j\ddot q_j)\cdot\delta q_j \overset{*}{=} 0$

Deja que
$\mathbb{R}^M \ni (x^1,\dots,x^M) = x \mapsto q(x) \in \Sigma$
sea un parametrización (local) de Σ

[Sps. $x(t)$ s.t. $q(x(t))$ sat. $*$
$\Rightarrow$ $x(t)$ sat. EL eqs for $L(x,\dot x) = \sum \dfrac{m_j|\dot q_j|^2}{2} + U(q)$]

Calculamos :
$\dot q_j = \partial_{x^k} q_j\,\dot x^k$
$\delta q_j = \partial_{x^k} q_j\,\delta x^k$

$\sum_{k=1}^{n}$

$\delta x = (\delta x^1,\dots,\delta x^M) \in \mathbb{R}^M$ arbitrary

$*$ $\partial_{\dot x^k}\dot q_j = \partial_{x^k} q_j$ $*$

a'Alembert convierte a :

$$0 = \sum_{j,k} (\partial_{q_j} U \cdot \partial_{x^k} q_j - m_j\ddot q_j \cdot \partial_{\dot x^k}\dot q_j)\,\delta x^k$$

desde $\delta x \in \mathbb{R}^M$ arbitraria, tenemos :

$$0 = \sum_j \partial_{q_j} U \cdot \partial_{x^k} q_j - m_j \ddot q_j \cdot \partial_{\dot x^k}\dot q_j$$

cada k.

$U(q(x))$

$\partial_{x^k} U = \sum_j \partial_{q_j} U \cdot \partial_{x^k} q_j$

$T = \sum m_j \dfrac{|\dot q_j|^2}{2}$

$\partial_{\dot x^k} T = \sum m_j(\dot q_j \cdot \partial_{\dot x^k}\dot q_j)$

$\dfrac{d}{dt}\partial_{\dot x^k} T = \sum m_j(\ddot q_j \cdot \partial_{\dot x^k}\dot q_j + \dot q_j \cdot \partial_{x^k}\dot q_j)$

$= \sum m_j(\ddot q_j \cdot \partial_{\dot x^k}\dot q_j) + \partial_{x^k} T$

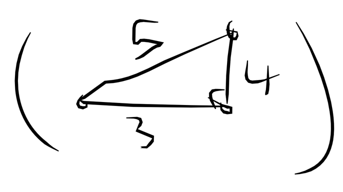
Es decir que :

$$0 = \partial_{x^k} U - \frac{d}{dt}\left(\partial_{\dot x^k} T\right) + \partial_{x^k} T$$

o

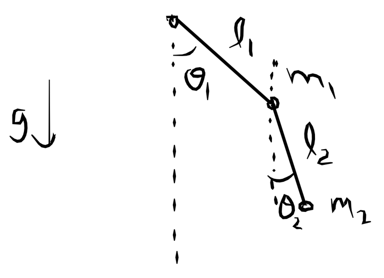
$$\partial_{x^k} L = \frac{d}{dt}\partial_{\dot x^k} L$$

con $L = T(x,\dot x) + U(x)$ $\square$

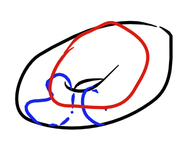


Ejemplos

1. péndulo doble



El espacio de configuraciones es un toro :
$(\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$

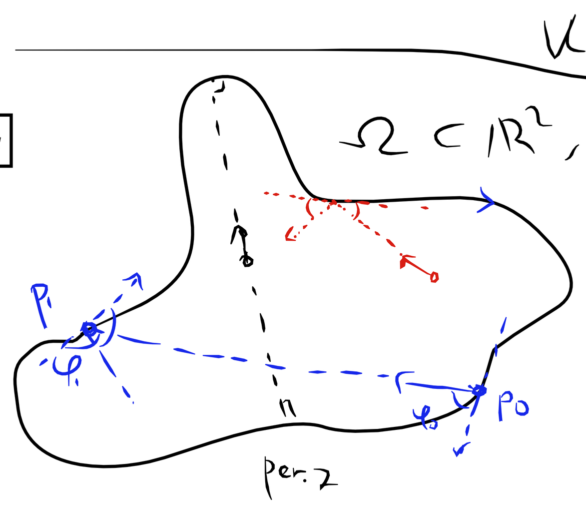


expect many per. orbs.

$2K = (m_1+m_2) l_1^2 \dot\theta_1^2 + m_2 l_2^2 \dot\theta_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$

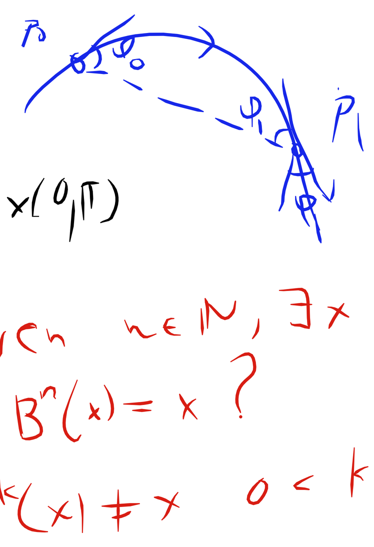
$U = \dots$

2. Bilares



$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega$ smooth.

¿per. orbs?

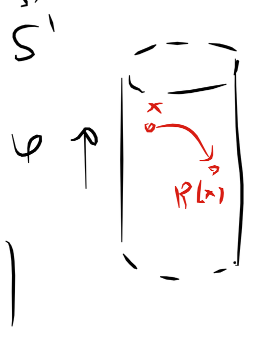


$\partial\Omega \times (0,\pi) \xrightarrow{B} \partial\Omega \times (0,\pi)$

$\cong$

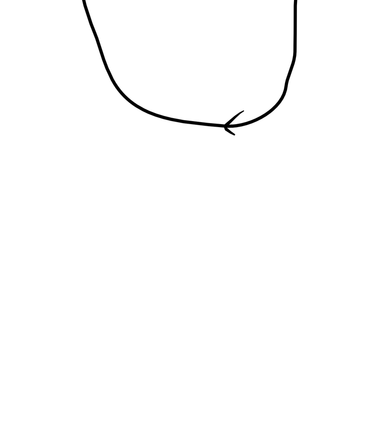
S^1

φ



¿ given $n \in \mathbb{N}$, $\exists x$ s.t. $B^n(x) = x$?
$(B^k(x) \neq x \quad 0 < k < n)$

Ω convex



$S(q_0, q_1) := \mathrm{dist}(q_0, q_1)$

$S^1 \times S^1 \xrightarrow{S} \mathbb{R}$

(s_0, s_1)

arc length

c.p. of S ⟷ q_0, q_1 lie on per. 2 orb.

$\partial_{s_0} S = -\cos\varphi_0$

$\partial_{s_1} S = \cos\varphi_1$

3. Superficie de revolución ... (see ARNOLD pg. 86) ...