Resumen

$Q \subset \mathbb{R}^{3N}$, *el espacio de configuraciones*

$U : Q \to \mathbb{R}$, *función de fuerza* $(U = -V)$

$T = \frac{K}{2} : TQ \to \mathbb{R}$, *energía cinetica.*

$L := T + U : TQ \to \mathbb{R}$

eqs of mot. = E-L eqs = ext $A = \int L$

$$\begin{array}{ccc} TQ & \xrightarrow{\varphi_*} & TQ' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q & \xrightarrow{\varphi} & Q' \end{array} \qquad \varphi_*(q,v) = (\varphi(q), d\varphi_q v) = (q', v')$$

pos. + vel. $\{(q,v) : v \in T_q Q\}$

$v = \frac{d}{ds}\big|_0 q(s)$; $q(0) = q$, $q(s) \in Q$

ejemplos :

1. *pendulo*, $Q = S^1, TQ \cong S^1 \times \mathbb{R}$
2. *pendulo esf.*, $Q = S^2, TQ = TS^2 \not\cong S^2 \times \mathbb{R}^2$
3. *problema de dos cuerpos (atración de Newton)*, $Q = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \Delta$, $TQ = Q \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$
4. *cuerpos rígidos (centro de masa fijada)*, $Q \cong SO_3, TQ \cong SO_3 \times so_3$

$(q_1, q_2) \in Q$

$\Delta = \{q_1 = q_2\}$

Las ecuaciones de movimiento definan un campo vectorial sobre TQ.
En estudiando estos trayectorias, primero queriamos buscar soluciones 'simples' :

$*$ *puntos fijos (equilibrios)*
$*$ *órbitas periódicas*

(ch. 5 Arnol'd)

Linealización (pequeñas oscilaciones)

En general, para un campo vectorial :

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

si $v(x_o) = 0$, *tenemos la solución de equilibrio :* $x(t) = x_o$.

La linealización del campo alrededor de x_o *es :*

$$\dot{y} = v'(x_o)y, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

$x = x_0 + \varepsilon y$

$\dot{x} = \varepsilon\dot{y} = v(x) = v(x_0 + \varepsilon y)$

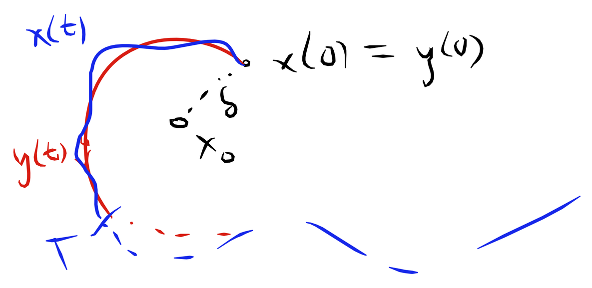
$= v(x_0) + \varepsilon v'(x_0)\cdot y + O(\varepsilon^2)$

$\Rightarrow \varepsilon\dot{y} = \varepsilon v'(x_0)\cdot y + O(\varepsilon^2)$

$\dot{y} = v'(x_0)\cdot y + O(\varepsilon) \qquad \varepsilon \to 0$

Estimaciones para la aproximación :

Suponer que el equilibrio es por $x_o = 0$.
Para cualquier $\varepsilon > 0, T > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que :*
$|x(t) - y(t)| < \varepsilon$, *para* $0 < t < T$
donde $x(t), y(t)$ *son soluciones de* $\dot{x} = v(x), \dot{y} = v'(0)y$
con $x(0) = y(0)$ *y* $|x(0)| < \delta$.



Prf: $x(t), y(t), \varepsilon, T$ given.

$z(t) := x(t) - y(t) \qquad (z(0) = 0)$

$$= \int_0^t \dot{x} - \dot{y}\, ds = \int_0^t v(x) - v'(x_0)y\, ds = \int_0^t v'(x_0)z + O(x(s)^2)\, ds$$

$x = \delta\cdot X, \quad y = \delta\cdot Y, \quad z = \delta\cdot Z$

$$Z(t) = \int_0^t v'(x_0)Z(s) + \delta f(s)\, ds$$

$$|Z(t)| \le \int_0^t |v'(x_0)Z| + \delta|f(s)|\, ds$$

$$\le \delta M t + \int_0^t L|Z(s)|\, ds$$

$M = \sup_{t\in[0,T]} |f(s)|$

$\le \frac{\delta M}{L}(e^{LT} - 1)$

$\xRightarrow{\text{Gron}} |Z(t)| \le \frac{\delta M}{L}(e^{Lt} - 1) \quad t \in [0,T]$

$v(t) = |Z(t)|$

$c(t) = \delta M t \qquad u(t) = L$

$\Rightarrow |x(t) - y(t)| \le \delta^2 k. \quad \delta^2 < \frac{\varepsilon}{k} \quad \square.$

Lemma de Gronwall :
Si $c \ge 0$ u, v *son funciones sobre* $[0, T]$ *con* $c(0) = 0$, *y*

$$v(t) \le c(t) + \int_0^t u(s)\, v(s)\, ds$$

$$\Rightarrow v(t) \le \int_0^t c'(s)\, e^{\int_s^t u(\tau)\, d\tau}\, ds \qquad t \in [0,T]$$

Para Lagrangianas

$(v = \dot{q})$

$L = T + U$
donde $U(q)$ *y* $T(q,v)$ *es cuadratica en* v :

$T(q,v) = A(q)\, v \cdot v$
para algún matriz $A(q)$ *simetrica y strictamente positiva.*

$T(q,v) > 0$
$\forall v \neq 0$

$\frac{d}{dt}(A(q)\dot{q}) = \partial_q A \dot{q}\cdot\dot{q} + \partial_q U$

$q = q_0 + \varepsilon Q, \quad v = \varepsilon V \qquad \left(\begin{array}{l} \dot{q} = v = \varepsilon\dot{Q} \\ V = \dot{Q} \end{array} \right)$

$\varepsilon\frac{d}{dt}(A(q_0 + \varepsilon Q)\dot{Q}) = \varepsilon^2(\partial_q T) + \partial_q U(q_0 + \varepsilon Q)$

$\varepsilon\frac{d}{dt}(A(q_0)\dot{Q} + O(\varepsilon)) = \cancel{\partial_q U(q_0)} + \varepsilon\partial_q^2 U(q_0)\cdot Q + O(\varepsilon^2)$

$A(q_0)\ddot{Q} = \partial_q^2 U(q_0)\cdot Q + O(\varepsilon)$

Tenemos soluciones de equilibrio :

$v(t) = 0, \quad q(t) = q_o$

cuando q_o *es un punto critical de* U :
$\partial_q U(q_o) = 0.$

$\varepsilon \to 0$

$A\ddot{Q} = BQ$

Las ecuaciones de movimiento linealizadas :

con $v = \varepsilon V$, $q = q_o + \varepsilon Q$, *tenemos :*

$$L = \varepsilon^2 A(q_o)V\cdot V + \varepsilon^2\partial_q^2 U(q_o)Q\cdot Q + U(q_o) + O(\varepsilon^3)$$

pon $A = A(q_o)$ *y* $B = \partial_q^2 U(q_o)$.
Entonces :

$$L = \varepsilon^2(AV\cdot V + BQ\cdot Q) + cst. + O(\varepsilon^3)$$

A pos. def, sim

B sim

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Desde algebra lineal, las matrizes A, B pueden ser diagonalizado simultáneamente :
$\exists P$ *t.q.* $P^T A P = id$, $P^T B P = D$ *es diagonal.*

Con el cambio de variables :
$Px = Q$, $Py = V$, *tenemos :*

$$L = \varepsilon^2(y\cdot y + Dx\cdot x) + cst. + O(\varepsilon^3)$$

$(y = \dot{x})$

$AV\cdot V = P^T A P y\cdot y = y\cdot y$

$\frac{d}{dt}\dot{x} = Dx + O(\varepsilon) \qquad \varepsilon \to 0$

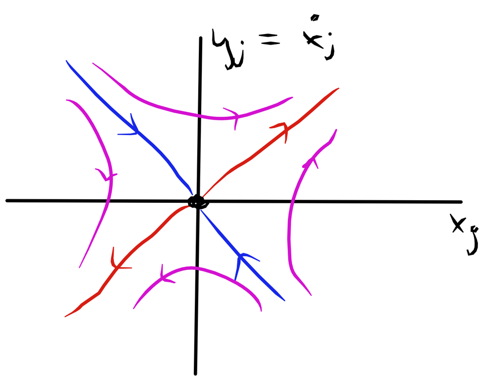
$\ddot{x}_j = \lambda_j x_j$

λ_j – char. freq $\in \mathbb{R}$

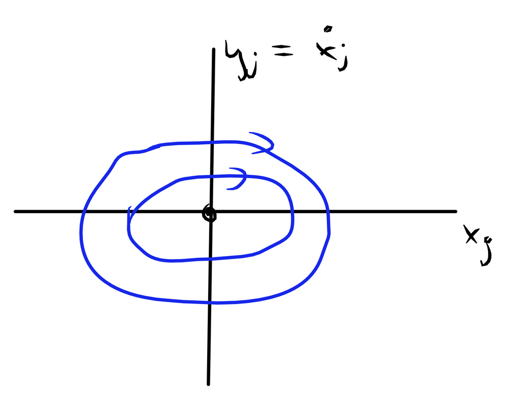
$0 = \det(B - \lambda A)$

Compartamiento local de la sistema linealizada :

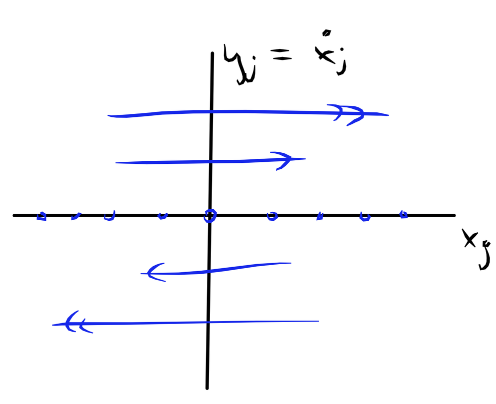
1. *algún* $\lambda_j > 0$:



2. *algún* $\lambda_j < 0$:



3. *algún* $\lambda_j = 0$:



Que podemos decir sobre la sistema verdadero :

Algunos definiciones

$$\dot{x} = v(x), \; x \in \mathbb{R}^n \; y \; v(x_o) = 0.$$

1. x_o *es estable si para cualquier barrio* $U \ni x_o$,
$\exists$ *un barrio* $x_o \in V \subset U$ *para que :*
todos soluciones $x(t)$ *de* $\dot{x} = v(x)$ *con* $x(0) \in V$ *tienen* $x(t) \in U$ *para todo el tiempo.*

2. x_o *es linealmente estable si la sistema* $\dot{y} = v'(x_o)y$ *es estable.*

3. x_o *es asintóticamente estable (en el futuro) si* $\exists$ *un barrio V de* x_o *para que :*
cada solucion $x(t)$ *de* $\dot{x} = v(x)$ *con* $x(0) \in V$ *tiene* $x(t) \to x_o$ *cuando* $t \to \infty$.

$*$ *un equilibrio* x_o *es inestable si no es estable* $*$

$**$ *cualquier linearización de* $E - L$ *por* x_o *no es asintóticamente estable!* $**$