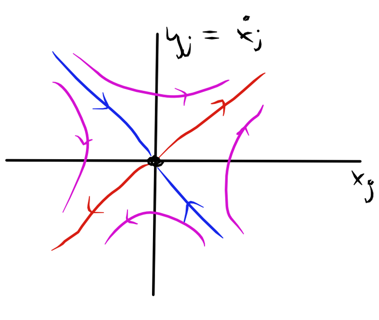
$$\ddot{x}_j = \lambda_j x_j$$

$$\begin{cases} \dot{x}_j = y_j \\ \dot{y}_j = \lambda_j x_j \end{cases} \qquad \pm\sqrt{\lambda_j} = w_j$$

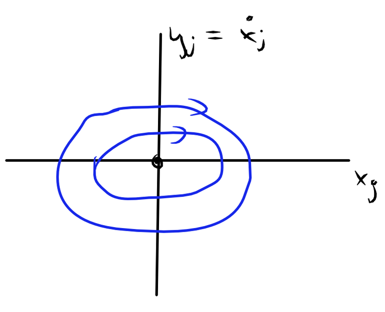
Compartamiento local de la sistema linealizada :

(de sistemas naturales: $L = \underbrace{(A(q)\dot{q}\cdot\dot{q})}_{T(q,\dot{q})} + U(q)$)

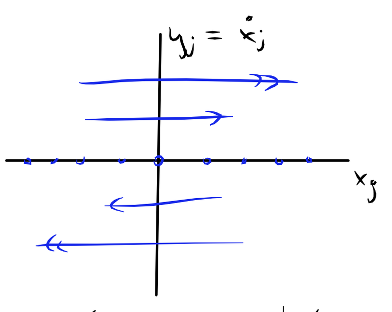
1. algún $\lambda_j > 0$:



2. algún $\lambda_j < 0$:



3. algún $\lambda_j = 0$:



'degenerate'

Que podemos decir sobre la sistema verdadero :

Algunos definiciones

$\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $v(x_o) = 0$.

1. x_o es estable si para cualquier barrio $U \ni x_o$, $\exists$ un barrio $x_o \in V \subset U$ para que : todos soluciones $x(t)$ de $\dot{x} = v(x)$ con $x(0) \in V$ tienen $x(t) \in U$ para todo el tiempo.

2. x_o es linealmente estable si la sistema $\dot{y} = v'(x_o)y$ es estable.

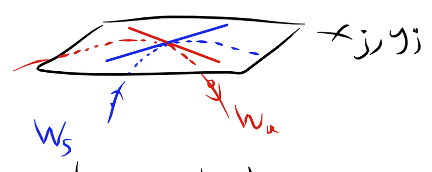
3. x_o es asintóticamente estable (en el futuro) si $\exists$ un barrio V de x_o para que : cada solucion $x(t)$ de $\dot{x} = v(x)$ con $x(0) \in V$ tiene $x(t) \to x_o$ cuando $t \to \infty$.

$*$ un equilibrio x_o es inestable si no es estable $*$

$**$ cualquier linearización de $E - L$ por x_o no es asintóticamente estable! $**$

1. si $\lambda_j > 0$ para algún j, entonces existe lineas invariantes : W_s, W_u pasando por x_o que son tangentes por x_o a las soluciones estable e inestable de la sistema linealizada.

Ademas, cada solución con condition inicial en W_s es asintótica (futuro) a x_o.



true syst. unstable.

2. Describir las órbitas verdaderos en un barrio de x_o es mucho más intrincado!

Algo initial :

si todos las $\lambda_j < 0$ (o más general si $U(q_o)$ es un maximo local $\Leftrightarrow$ $V(q_o)$ es un minimo local) entonces q_o es estable.

$T(q,\dot{q}) > 0 \ (\dot{q} \neq 0) \Rightarrow (q_0, v=0)$ loc. min of $E = T + V$

$E(q,v) > E(q_0, 0) = E_0 \quad \forall (q,v)$ near $(q_0, 0)$.

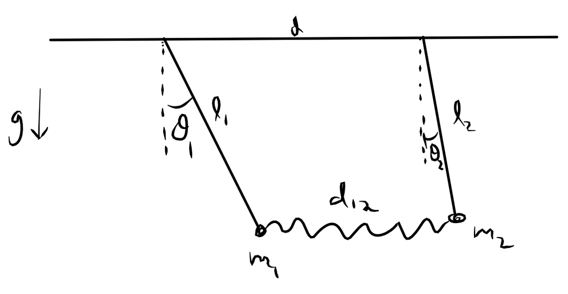
$V_\varepsilon = \{(q,v) : E(q,v) \leq E_0 + \varepsilon\} \qquad \varepsilon = 0 \quad V_0 = (q_0, 0)$

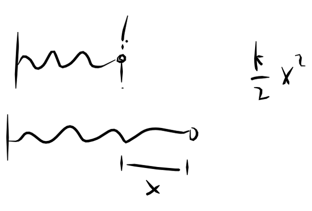
V_ε invariant by En. cons. $\square$

3. Cuando algún $\lambda_j = 0$, la sistema verdadera podria ser estable o inestable.

ejemplo : $\ddot{x} = \pm x^3$.

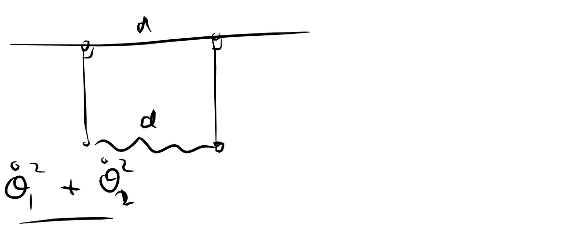
Pendulos acoplados





$\frac{k}{2}x^2$

Suponemos que d = longitud de descanso para el resorte. Ademas, consideramos el caso $\ell_j = m_j = g = 1$.



$$T = \frac{\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2}{2}$$

$$V = 1 - \cos\theta_1 + 1 - \cos\theta_2 + \frac{k}{2}(d_{12} - d)^2$$

m_1 tiene coordenadas : $(\sin\theta_1, -\cos\theta_1)$

m_2 tiene coordenadas : $(d + \sin\theta_2, -\cos\theta_2)$

y tenemos :

$$d_{12} = \sqrt{(d + \sin\theta_2 - \sin\theta_1)^2 + (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)^2}$$

$$(d + \theta_2 - \theta_1 + O_2)^2 + O_4 \qquad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + O(x^2)$$

$$= d^2 + 2d(\theta_2 - \theta_1) + O_2$$

$$d_{12} = d\sqrt{1 + \frac{2}{d}(\theta_2 - \theta_1) + O_2} = d\left(1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{d} + O_2\right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} + \frac{k}{2}(\theta_2 - \theta_1)^2 + O_3$$

La linearización tiene Lagrangiana :

$$L = \frac{\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2}{2} - \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2} - \frac{k(\theta_1 - \theta_2)^2}{2}$$
$$= \frac{\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2}{2} - \frac{(1+k)\theta_1^2 + (1+k)\theta_2^2 - 2k\theta_1\theta_2}{2}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1-k & k \\ k & -1-k \end{pmatrix} \qquad \text{e. vecs: } \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e. val: } \quad -1, \quad -(1+2k)$$

En las coordenadas :

$$Q_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\sqrt{2}}, \quad Q_2 = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\sqrt{2}}$$

$$L = \frac{\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2}{2} - \frac{Q_1^2 + \omega^2 Q_2^2}{2}$$

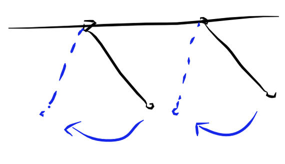
$$\left[\ddot{Q}_1 = -Q_1 \qquad \ddot{Q}_2 = -\omega^2 Q_2\right]$$

$$\omega^2 = 1 + 2k$$

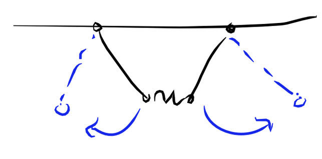
Soluciones especiales :

1. $Q_1 = \cos\omega t$, $Q_2 = 0$
2. $Q_1 = 0$, $Q_2 = \cos\omega t$

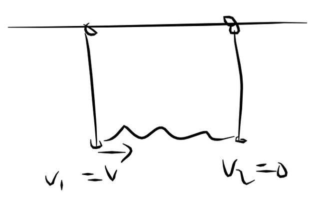
1. $\theta_1 = \theta_2$



2. $\theta_1 = -\theta_2$



Pequeno acoplamiento : cuando $0 < k \ll 1$ es muy pequeno.



$\theta_1 = \theta_2 = 0$

La solución con condiciones iniciales :

$$Q_1(0) = Q_2(0) = 0, \ \dot{Q}_1(0) = \dot{Q}_2(0) = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

corresponde a :

$$\theta_1 = \frac{v}{2}\left(\sin t + \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$
$$\theta_2 = \frac{v}{2}\left(\sin t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$$

$$\omega = \sqrt{1 + 2k} = 1 + k + O(k^2)$$

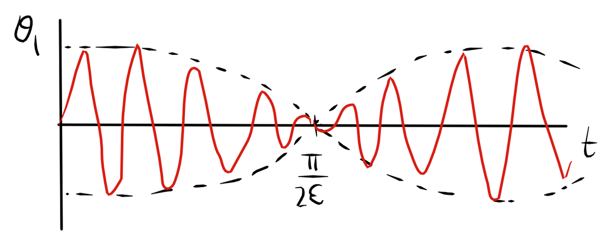
$$\frac{1}{\omega} = 1 - k + O(k^2)$$

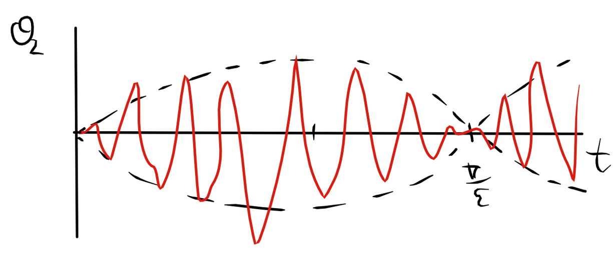
desde $k \ll 1$, y adicion formulas de trigonometria, tenemos :

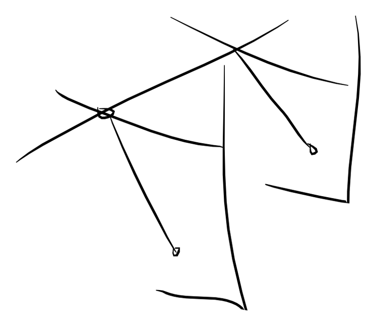
$$\theta_1 = \frac{v}{2}(\sin t + \sin\omega t) + O(k) = v\sin\omega' t \cos\varepsilon t + O(k)$$
$$\theta_2 = \frac{v}{2}(\sin t - \sin\omega t) + O(k) = v\cos\omega' t \sin\varepsilon t + O(k)$$

$$\omega' = \frac{\omega + 1}{2} = 1 + O(k)$$

$$\varepsilon = \frac{1 - \omega}{2} = O(k)$$



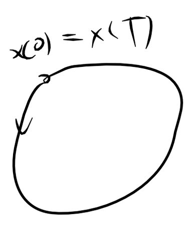




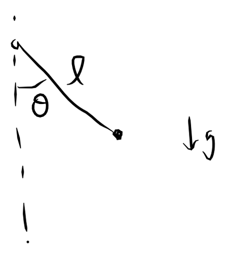
Órbitas periodicas

Una solución $x(t)$ de $\dot{x} = v(x)$ es periodica con periodo T si :

$$x(t + T) = x(t)$$
$$y$$
$$x(t + s) \neq x(s), \quad 0 < s < T.$$



ejemplo (columpios) :



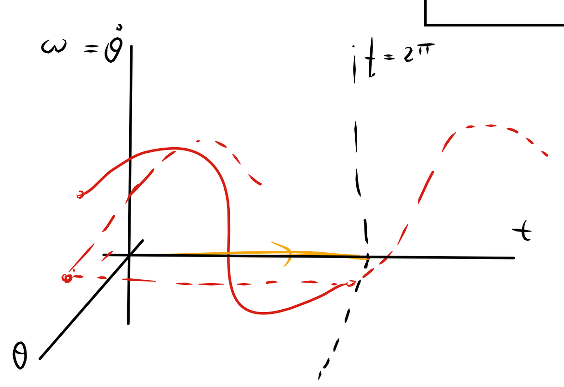
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta \approx -\frac{g}{\ell}\theta$$

Consideramos pequenos oscilaciones de un pendulo, con parametros (e.g. ℓ) que pueden depender de tiempo :

$$\ddot{\theta} = -k(t)^2\theta$$

Ademas, suponemos que $k(t)$ es periodico :

$$k(t + 2\pi) = k(t).$$



$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -k(t)^2\theta \\ t' = 1 \quad (t + 2\pi \equiv t) \end{cases}$$

$\theta(t) = \dot{\theta}(t) = 0$