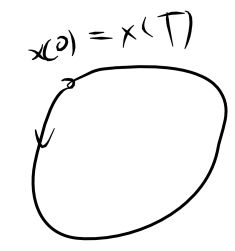
## *Órbitas periodicas (primera ronda)*

Una solución $x(t)$ de $\dot{x} = v(x)$ es periodica con periodo $T$ si :

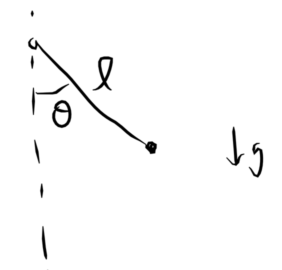
$$x(t+T) = x(t)$$
$$y$$
$$x(t+s) \neq x(s), \quad 0 < s < T.$$

$x(0) = x(T)$



*ejemplo (columpios) :*

$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin\theta \approx -\frac{g}{\ell}\theta$



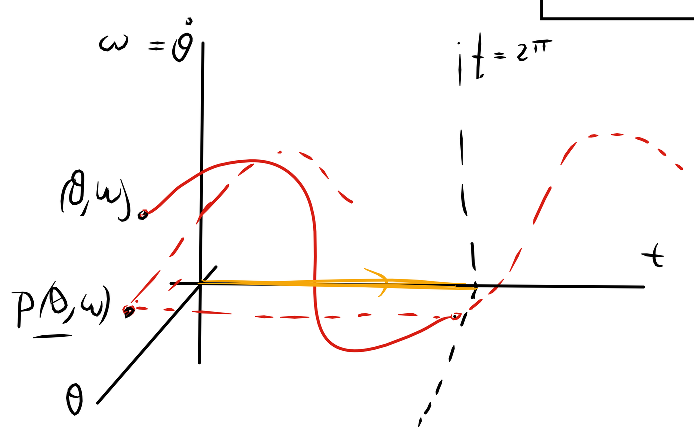

Consideramos pequenos oscilaciones de un pendulo, con parametros (e.g. $\ell$) que pueden depender de tiempo :

$$\ddot{\theta} = -k(t)^2\theta$$

Hill's eq'n.

Ademas, suponemos que $k(t)$ es periodico :

$$k(t+2\pi) = k(t).$$




$$\begin{cases} \theta' = \omega \\ \omega' = -k(t)^2\theta \\ t' = 1 \quad (t + 2\pi \equiv t) \end{cases}$$

$\theta(t) = \dot{\theta}(t) = 0$

per. orb

$\dot{x} = A(t)x$ $\quad x_1^{(t)}, x_2^{(t)} \mapsto c_1x_1 + c_2x_2$

$x_1(0) = \binom{1}{0}, \; x_2(0) = \binom{0}{1}$

$$\begin{pmatrix}\dot\theta \\ \dot\omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k(t)^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta \\ \omega\end{pmatrix}$$

$x(t) = \begin{pmatrix} | & | \\ x_1 & x_2 \\ | & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_0 \\ \omega_0\end{pmatrix} = X(t)\, x_0$

La mapa de retorno, o mapa de Poincaré :
$(\theta,\omega) \mapsto P(\theta,\omega)$
nos da 'instantáneas' del compartamiento de soluciones.

$P\binom{\theta}{\omega} = X(2\pi)\binom{\theta}{\omega}$.

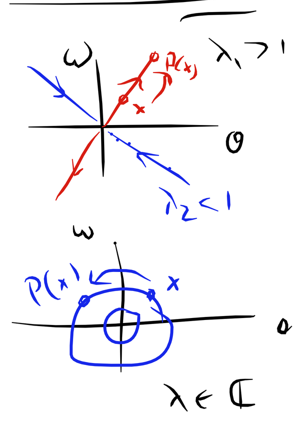
$W(t) := \det X(t)$ [Wronskian] $\quad W(0) = 1$.

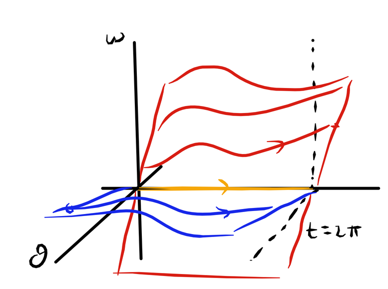
$\dot{W}(t) = tr(A(t))\,W(t) = 0 \quad \left[\frac{d}{ds}\Big|_0 \det(id + sA + O(s^2)) = trA\right]$

Aqui, la mapa de Poincaré es un mapa lineal.

Ademas, se preserva Area : $\det(P) = 1$.

$\lambda_1\lambda_2 = 1$

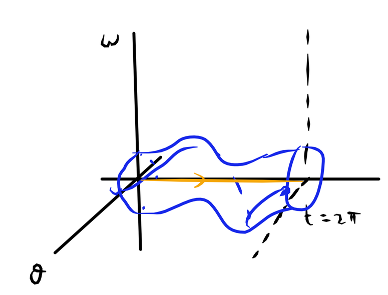



$\lambda_j \in \mathbb{R} \setminus 1$

En este ejemplo, sabemos todo cerca de la órbita desde las autovalores de $P$ :

si $\lambda$ con $|\lambda| > 1$ es un autovalor $\Rightarrow$ inestable (futuro)
si $\lambda$ con $|\lambda| < 1$ es un autovalor $\Rightarrow$ inestable (pasado)
si $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow$ estable




$\lambda \in \mathbb{C}$

Estos propiedades desde las autovalores, nos resumen por :

$\lambda_j \in \mathbb{R} \setminus 1$ si $|tr(P)| > 2$, la órbita periodica ($\theta = \omega = 0$) es inestable

si $|tr(P)| < 2$, la órbita periodica es estable.

$\lambda_j \in \mathbb{C}$

$\lambda_j$ roots of :

$\lambda^2 - (trP)\lambda + 1 = 0$

$\varepsilon = 0 : \quad \theta(t) = \theta_0\cos(kt) + \frac{\omega_0}{k}\sin(kt)$

$\frac{2\pi}{k}$

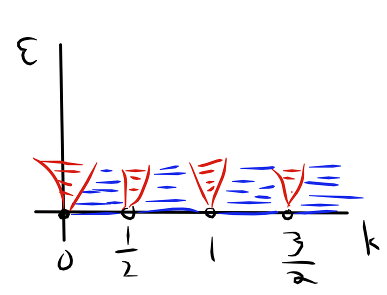
$a(t + 2\pi) = a(t)$

Considera cuando $k(t) = k^2 + \varepsilon\, a(t)$, y pensar de $0 < \varepsilon \ll 1$.

Deja que $P_\varepsilon$ sea la mapa de Poincaré para $\varepsilon$ fijada.

Un calculo que $tr(P_0) = 2\cos(2\pi k)$.

Entonces, por continuidad, la sistema queda estable cuando $k \neq \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}$.




---

## *Proceso general*

Dado una órbita periodica :

$$\gamma(t+T) = \gamma(t)$$

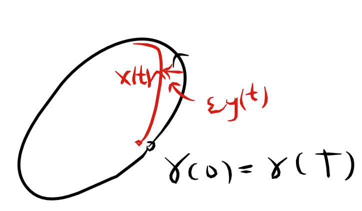
de $\dot{x} = v(x), x \in \mathbb{R}^n$,
considera una solución cerca de $\gamma$ :
$x(t) = \gamma(t) + \varepsilon\, y(t)$.

Entonces cuando $\varepsilon \to 0$, $y(t)$ satisficie :

$$\dot{y} = v'(\gamma(t))\, y = A(t)\, y$$

var eq's.

donde la matriz $A(t)$ es periodico : $A(t+T) = A(t)$.




$\dot{x} = \dot{\gamma} + \varepsilon\dot{y} = v(\gamma) + \varepsilon\dot{y}$
$\quad\| \; v(x) = v(\gamma) + \varepsilon v'(\gamma)y + O(\varepsilon^2)$

$\dot{y} = v'(\gamma(t))y + O(\varepsilon)$

$Y \; n\times n, \quad M \; (n-1)\times(n-1)$

$y(t) = \dot{\gamma}(t)$ sol'n of $\dot{y} = A(t)y$

$\dot{y}(t) = \frac{d}{ds}\Big|_0 \dot{\gamma}(t+s) = \frac{d}{ds}\Big|_0 v(\gamma(t+s)) = A(t)\,y(t)$

Considera una sistema de soluciones fondamentales de $\dot{y} = A(t)y$ :

$y_1(t), \ldots, y_n(t)$ con $y_j(0)$ un base de $\mathbb{R}^n$ y $y_n(0) = \dot{\gamma}(0)$
y escribe la matriz fondamental correspondiente :
$Y(t)$.

$Y(t) = \begin{pmatrix} | & & | \\ y_1 & \cdots & y_n \\ | & & | \end{pmatrix}$

$y_n(0) = \dot{\gamma}(0)$

$Y(T) = \left(\begin{array}{c|c} M & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\end{matrix} \\ \hline * \; * \; * & 1 \end{array}\right)$

$\xi \in \Sigma$

$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_0 P(\gamma(0) + \varepsilon\xi) = dP_{\gamma(0)}\xi$

$\left[\gamma(t) + \varepsilon\xi(t) + O(\varepsilon^2)\right.$
$\left.\quad \dot{\xi} = A(t)\xi\right]$

$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_0 \left(\gamma(T_\varepsilon) + \varepsilon\xi(T_\varepsilon) + O(\varepsilon^2)\right)$

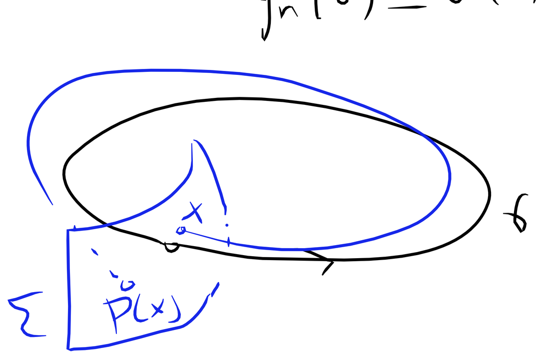
$pr_\Sigma\left(\dot{\gamma}(T)\cdot T' + Y(T)\xi\right) = M\xi$.

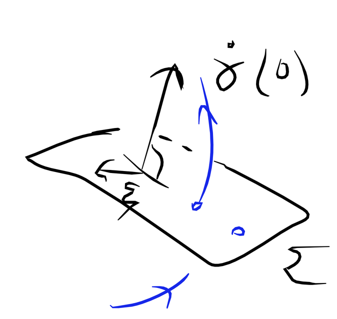
Si dejamos $\Sigma = \dot{\gamma}(0)^\perp$ y $pr : \mathbb{R}^n \to \Sigma$ la proyección, tenemos :

La linearización de $P : \Sigma \to \Sigma$ (mapa de Poincaré) satisfice :

$$dP_{\gamma(0)} = M$$

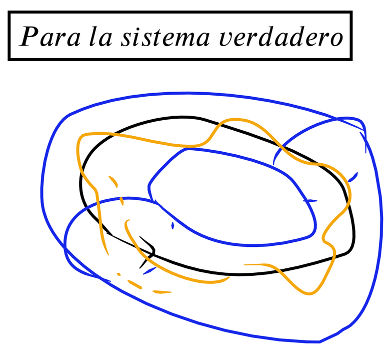
donde $M = pr\left(Y(T)|_\Sigma\right) : \Sigma \to \Sigma$.




---

## *Para la sistema verdadero*



Llamamos una órbita periodica, $\gamma$, estable si para cada barrio $U$ que contiene $\gamma$, existe un barrio $V$ de $\gamma$ para que cualquier solución $x(t)$ con $x(0) \in V$ queda en $U$ por todo el tiempo.

De misma manera uno puede definir órbitas periodicas que son :
estable en el futuro (o pasado),
asintóticamente estable en el futuro (o pasado).

Si algún autovalor, $\lambda$, de $M = dP$ tiene $|\lambda| \neq 1$ entonces las soluciones asintoticamente estable en el futuro o pasado de la sistema lineal, continuan existir para la sistema verdadero.

Digamos $\gamma$ es linealmente estable si $M = dP$ es diagonalizable y los autovalores tienen $|\lambda| = 1$.