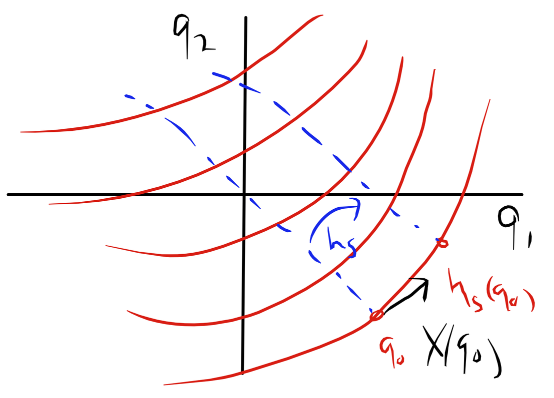
Simetrías ⇒ integrales (teorema de Noether)

$*$ recordar que cuando $L(q_1,\dots,q_n,v_1,\dots,v_n)$ no depende de q_j,
$\Rightarrow \partial_{v_j} L = cst.$

$\frac{d}{dt}(\partial_{v_j} L) = \partial_{q_j} L = 0$ n. dep. q_j



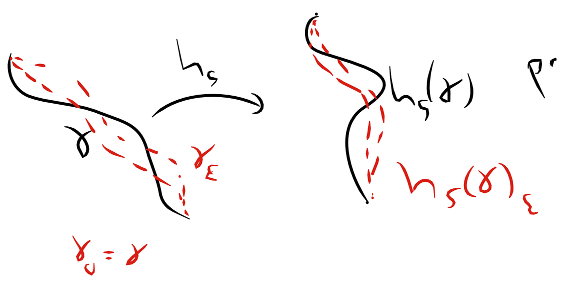
Considera una familia de curvas en Q, que no intersectan y pasan por todos puntos (foliación de Q)
Deja que $h_s(q_0)$ parametriza la curva de familia pasando por q_0, donde $s \in \mathbb{R}$.

Digamos $h_s: Q \to Q$ es una simetría de la sistema definida por L, cuando:
$L(h_s(q), d_q h_s v) = L(q,v) \quad \forall (q,v) \in TQ.$

$h_0(q) = q \qquad h_{s_1+s_2}(q) = h_{s_1} \circ h_{s_2}(q) \qquad$ smooth.

$*$ h_s toma soluciones a soluciones $*$

si $\gamma(t) \in Q$ satisface $E-L$,
entonces también $h_s(\gamma(t))$.



pf: $\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_0 A(\gamma_\varepsilon) = 0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_0 A(h_s(\gamma)_\varepsilon)$

$h_s(\gamma)$ ext. ⇒ E-L □.

Deja que $\gamma_o(t)$ sea una extremal pasando por q_o cuando $t=0$.
Entonces para cada $s \in \mathbb{R}$ fijado, las curvas:
$h_s(\gamma_o(t)) = \gamma_s(t)$
satisficen $E-L$.

$\frac{d}{dt}\partial_v L(\gamma_s(t), \dot\gamma_s(t)) = \partial_q L(\gamma_s(t), \dot\gamma_s(t))$

$*$ $\dot\gamma_s(t) = dh_s \dot\gamma_0(t)$ $*$

Desde h_s es una simetría, tenemos:
$L(\gamma_s(t), \dot\gamma_s(t)) = L(\gamma_o(t), \dot\gamma_o(t))$

entonces,

$$0 = \frac{d}{ds} L(\gamma_s(t), \dot\gamma_s(t))$$
$$= \partial_q L(\gamma_s(t), \dot\gamma_s(t)) \cdot \frac{d}{ds}\gamma_s(t) + \partial_v L(\gamma_s(t), \dot\gamma_s(t)) \cdot \frac{d}{ds}\dot\gamma_s(t)$$

$0 = \frac{d}{dt}(\partial_v L) \cdot \frac{d}{ds}\gamma_s + \partial_v L \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{ds}\gamma_s\right)$

$= \frac{d}{dt}\underbrace{\left[\partial_v L \cdot \left(\frac{d}{ds}\gamma_s\right)\right]}_{\text{int!}}$ $\quad s=0 \quad X(q)$

Con la ecuaciones de $E-L$, y tomando $s = 0$, obtenemos:

$$0 = \frac{d}{dt}\partial_v L(\gamma_o(t), \dot\gamma_o(t)) \cdot X(\gamma_o(t))$$

o

$cst. = \partial_v L \cdot X$ sobre extremales,

donde $X(q) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} h_s(q).$

NOETHER'S THM.

Ejemplos

para sistemas de partículas: $L = \sum \frac{m_j |v_j|^2}{2} - V(q_1,\dots,q_n), \quad q_j, v_j \in \mathbb{R}^3.$

$v_j = \dot q_j$
$\partial_v L = (m_1 v_1, \dots, m_n v_n) \in \mathbb{R}^{3n}$

1. traslaciones

$b \in \mathbb{R}^3$

$q = (q_1,\dots,q_n) \longmapsto q + (b,\dots,b)$

$\Rightarrow v \longrightarrow v$

$\left[q \overset{h_s}{\longmapsto} q + s(b,\dots,b) \right]$

$X(q) = (b,\dots,b)$

$cst. = \partial_v L \cdot X = \sum (m_j v_j \cdot b)$

$= \underline{(\sum m_j v_j) \cdot b}$

Lin mom.

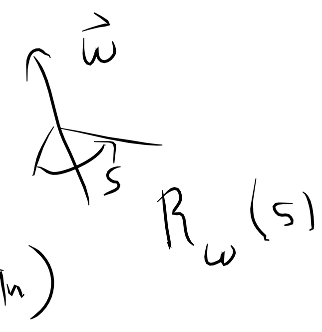
$\forall b \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \sum m_j v_j = cst.$

2. rotaciones

$Aq \longmapsto (Aq_1, \dots, Aq_N) \quad A \in SO_3$

$\Rightarrow v \longmapsto (Av_1, \dots, Av_N)$

$\left[h_s(q) = R_\omega(s) \cdot q \right]$



$X(q) = \frac{d}{ds}\Big|_0 h_s(q) = (\vec\omega \times q_1, \dots, \vec\omega \times q_n)$

$cst. = \sum m_j v_j \cdot (\vec\omega \times q_j) = \left(\sum m_j q_j \times v_j\right) \cdot \vec\omega$

ang. mom.

$\forall \vec\omega \Rightarrow \sum m_j q_j \times v_j = cst.$

Acción de un grupo

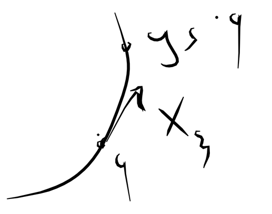
Considera cuando un grupo G actúa por Q:
$id \cdot q = q$
$g \cdot (h \cdot q) = (gh) \cdot q$

$q \overset{f}{\longmapsto} g \cdot q$ invertible.

$f: Q \to Q$ sim.
$L(fq, dfv) = L(q,v)$

Toma una curva, g_s de elementos de G con
$g_0 = id$
y pon $\dot g_0 = \xi \in \mathfrak{g} = T_{id}G$

$h_s(q) = \underline{g_s \cdot q}$



$\dot g_0 = \xi$.

Si $h_s(q) = g_s \cdot q$ son simetrías de la sistema, tenemos integrales:

$\partial_v L \cdot X_\xi$

donde $X_\xi(q) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} g_s \cdot q. = \frac{d}{ds}\Big|_0 h_s(q)$

$\Big\{$ L aut

$E = \partial_v L \cdot v - L$

"time trans." $(q,v) \longrightarrow (q_t, v_t)$ $\Big\}$

$*$ eq. pts.

broad $\quad L = \frac{A(q)v \cdot v}{2} + U(q)$

A p.d. symm.

$\Big\{$ $*$ per. orbs.

$*$ integrals ⟵ Ham.

ex: Free rig. body ∃ Lagrange top

next.

ex: 3-body problem ∃ RC3BP.