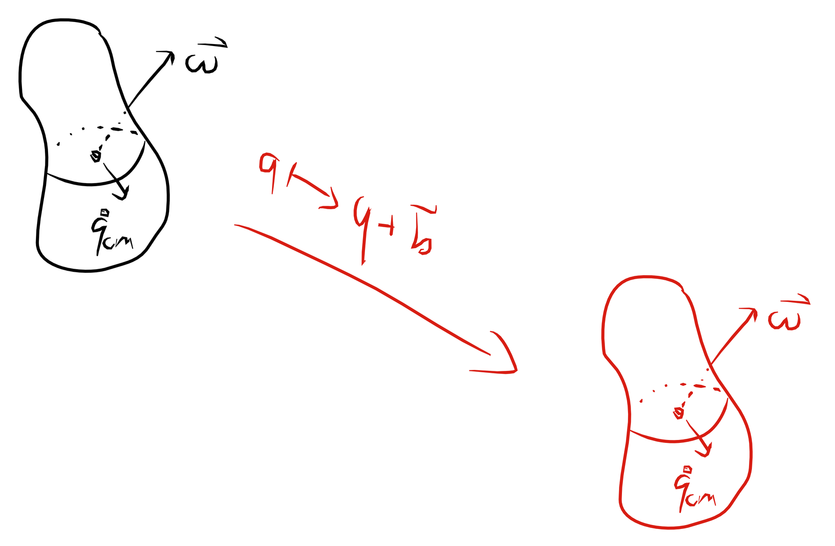
última semana : teorema de Noether (pg. 88 Arnold)
$h_s : Q \to Q,\ s \in \mathbb{R}\ (h_0 = id)$ *son simetrias si* $L(h_s q, dh_s v) = L(q,v)$.
$\Rightarrow \partial_v L \cdot X = cst.$ *donde* $X(q) = \frac{d}{ds}_{s=0} h_s(q)$.

sim ⇒ int.

{ * trans → lin. mom
rot → ang. mom

Cuerpos rígidos libres

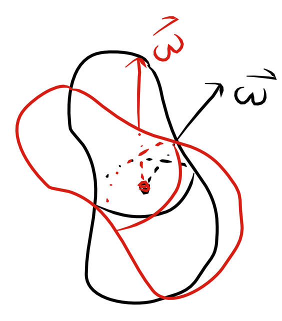


$q \mapsto q + \vec{b}$

El movimiento de un cuerpo rígido libre en espacio admete simetrias por translaciones.

Entonces, el momento lineal es conservada y sin perder de generalidad, podemos estudiar el movimiento en una marca con centro de masa por origen.

$q_{cm} = 0$



$q \mapsto Aq$
$A \in SO_3$

El 'tambaleando' del cuerpo rígido libre en esta marca con c.m. fijada, admete simetrias por rotaciones.

Entonces el momento angular es conservada :

$m = \mathbb{I}\omega$, *queda costante sobre el movimiento.*

m_1, m_2, m_3 3 int.
+
$E = \int \frac{|\dot{q}|^2}{2} d\mu$ 1 int.

Con c.m. fijada, el espacio de configuraciones nos identifica con :

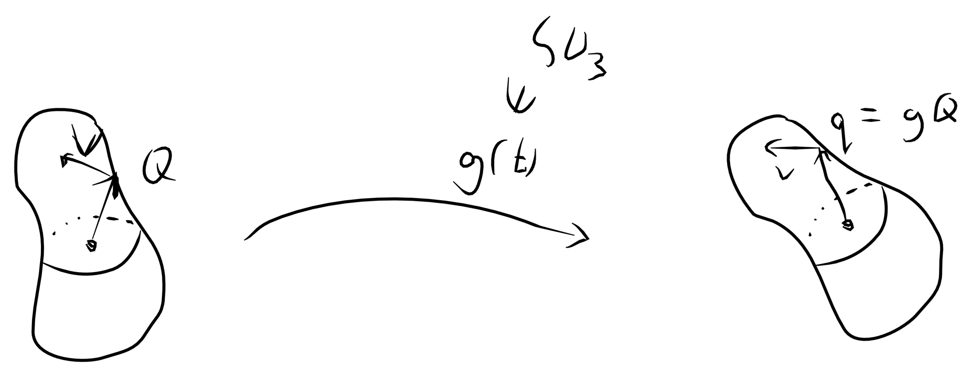
$$Q = SO_3$$

y tenemos un campo vectorial que siguen las movimientos en :

$$TQ = TSO_3 \cong SO_3 \times so_3.$$

6-dim. $\xrightarrow[E \neq 0]{\text{fix int.}}$ 2-dim $\Sigma \approx \mathbb{T}^2$
invariant.

La escena



SO_3
$g(t)$
Q
$q = gQ$
$Q \in B$
$q \in g(B)$

$v := \dot{q} = \omega q$
$gV = v$
$\Omega Q = V$

espacio con cuerpo fijado (conf. de referencia)

espacio donde cuerpo se mueve (donde observamos el mov.)

$g\vec{\Omega} = \vec{\omega}$

Tenemos el velocidad angular en esp. de obs. :

$$\omega = \dot{g}\, g^{-1} \in so_3$$

y velocidad angular en esp. de ref. :

$$\Omega = g^{-1}\dot{g} \in so_3.$$

Los momentos angulares son :

$$m = \mathbb{I}\omega$$
y
$$M = \mathbb{I}_B \Omega$$

$\mathbb{I}(t)$ fixed symm. mat.

$\vec{m} = cst.$

$$\vec{m} = \int_{q \in g(B)} q \times (\vec{\omega} \times q)\, d\mu$$
$$= \int_{Q \in B} gQ \times (g\vec{\Omega} \times gQ) d\mu$$
$$= g \int_{Q \in B} Q \times (\vec{\Omega} \times Q)\, d\mu = g\mathbb{I}_B \vec{\Omega} = g\vec{M}$$

Ecuaciones de Euler

De Noether, sabemos $\vec{m}$ *es constante. Entonces :*

$$\mathring{\vec{M}} = \vec{M} \times \vec{\Omega}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\vec{m} = \frac{d}{dt} g\vec{M} = \dot{g}\vec{M} + g\mathring{\vec{M}}$$
$$= g(\underbrace{g^{-1}\dot{g}\vec{M}}_{\substack{\Omega\vec{M} \\ \parallel \\ \Omega \times \vec{M}}} + \mathring{\vec{M}})$$

$SO_3 \xrightarrow{\ell_h} SO_3$ $h \in SO_3$
$g \longmapsto h \cdot g$
$d\ell_h(\dot{g}) = h\dot{g}$
$L(g, \dot{g}) = L(hg, h\dot{g})$
$(\ell_h(g), d\ell_h \dot{g})$

En un base ortonormal para $\mathbb{I}_B$, *tenemos :*
$\vec{M} = (M_1, M_2, M_3) = \mathbb{I}_B \vec{\Omega} = (I_1\Omega_1, I_2\Omega_2, I_3\Omega_3)$
y obtenemos una forma estandard para las ecuaciones de Euler :

$$I_1\mathring{\Omega}_1 = (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3$$
$$I_2\mathring{\Omega}_2 = (I_3 - I_1)\Omega_1\Omega_3$$
$$I_3\mathring{\Omega}_3 = (I_1 - I_2)\Omega_1\Omega_2$$

Este sistema tiene las integrales de :

$$I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = |\vec{M}|^2 = |\vec{m}|^2$$

$$I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = 2E = \mathbb{I}_B\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}$$

$$L(g, \dot{g}) = E = \frac{1}{2}\int_{q \in g(B)} |\omega q|^2\, d\mu$$
$$= \frac{1}{2}\int_{Q \in B} |g\Omega g^{-1} gQ|^2\, d\mu = \frac{1}{2}\int_{Q \in B} |\Omega Q|^2\, d\mu$$
$$= \frac{1}{2}\mathbb{I}_B\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} = L(e, \Omega)$$

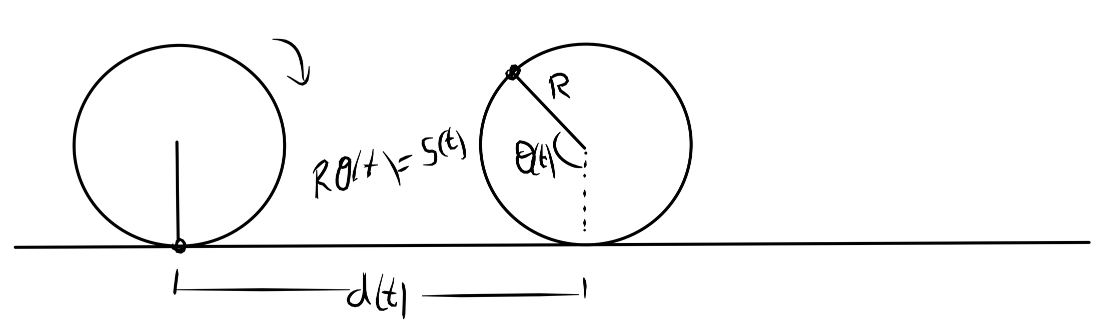
id

Teorema de Poinsot

Por el momento, podriamos – en principio – resolver para $\Omega(t)$. *Para encontrar el descripción completo todavía teniamos que resolver la EDO :*
$\dot{g} = g\Omega(t)$, *para* $g(t)$.

$\rightsquigarrow g(t)$?

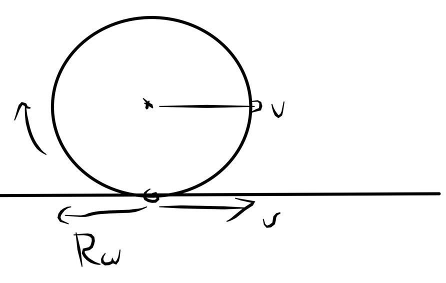
El teorema de Poinsot, da una descripción de $g(t)$ *sin resolver este EDO. Para declarar este teorema, primero unas antecedentes.*



$R\theta(t) = s(t)$
R
$\theta(t)$
$d(t)$

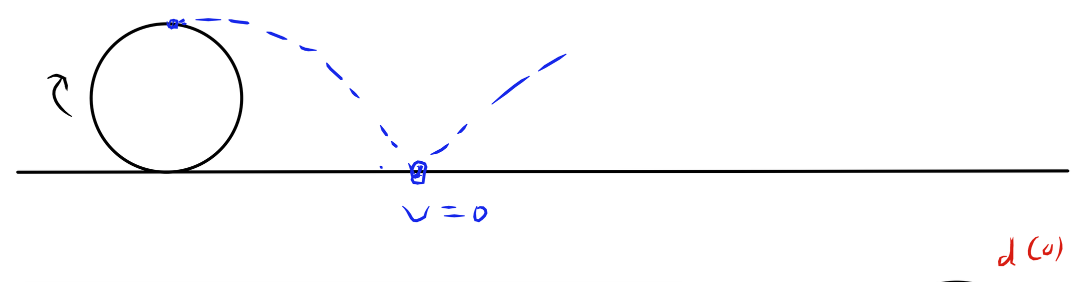
digamos el circulo rueda sin resbaldarse si :
$R\theta(t) = d(t)$ *para cada* t. *O equivalentamente si :*

$$R\omega(t) = R\mathring{\theta}(t) = \mathring{d}(t) = v(t)$$



v
v
$R\omega$

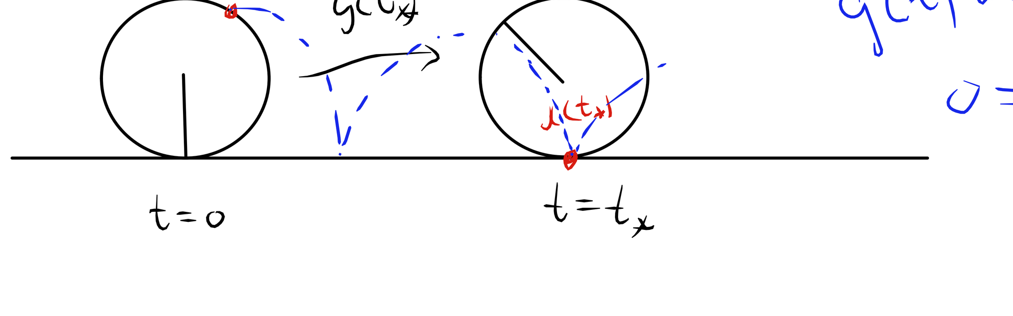
Otra forma de decir 'rueda sin resbaldar' es que : el punto de contacto tiene velocidad cero.



$v = 0$

Otra forma más de decir la misma condición : el círculo rueda sin resbaldar en el momento $t = t_*$, *si ponemos* $d(t_*) = g(t_*)d(0)$ *y tenemos :*

$$\frac{d}{dt}_{t = t_*} g(t)d(0) = 0.$$



$d(0)$
$g(t_*)$
$d(t_*)$
$t = 0$
$t = t_*$

$g(t_*)d(0) = d(t_*)$
$g(t)d(0)$
$0 = \dot{g}(t_*)d(0)$

POINSOT →

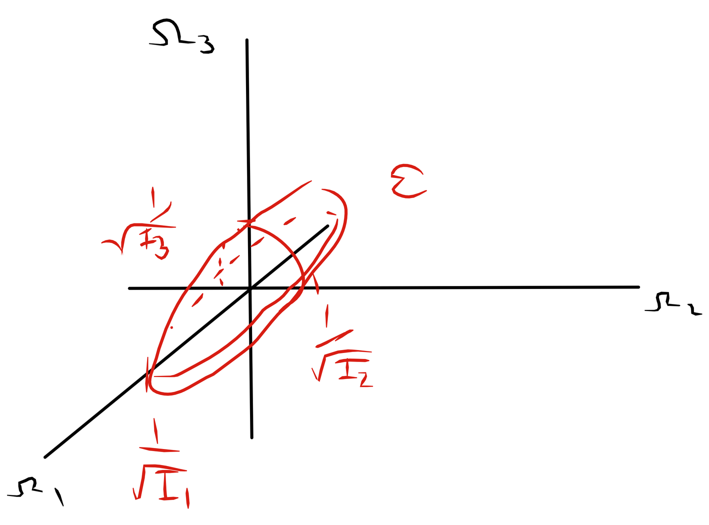
Pon $\mathcal{E} = \{\vec{\Omega} : \mathbb{I}_B\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} = 1\}$.

Deja que $\vec{\Omega}(t), \vec{\omega}(t), g(t)$ *una solución para el movimiento de cuerpo rígido libre, con momento angular* $\vec{m}$, *y energía* E.

Entonces, el rotación $g(t)$ *es tal que el elipsoide*

$$\mathcal{E}_t := g(t)\mathcal{E}$$

rueda sin resbaldarse sobre un plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ *fijado.*



Ω_3
$\mathcal{E}$
$\frac{1}{\sqrt{I_3}}$
Ω_2
$\frac{1}{\sqrt{I_2}}$
Ω_1
$\frac{1}{\sqrt{I_1}}$

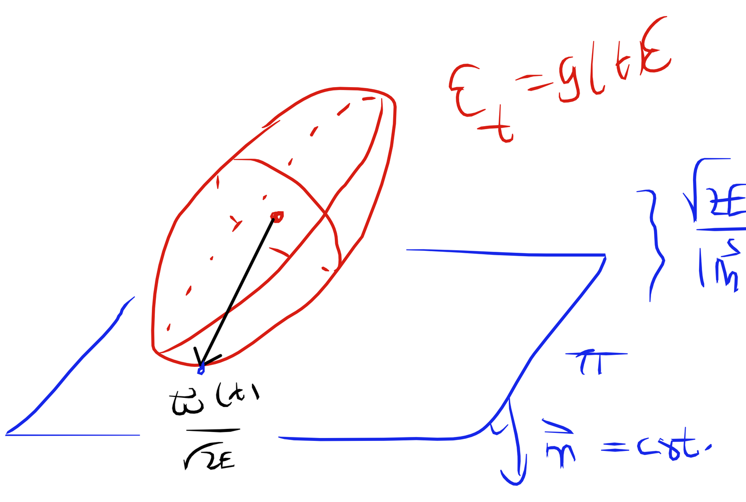
demonstración :

Observa que por conservación de energía, tenemos :
$\mathbb{I}_B\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\Omega}(t) = 2E$, *es constante.*

$$\Rightarrow \frac{\vec{\Omega}(t)}{\sqrt{2E}} \in \mathcal{E}$$

Desde $g(t)\vec{\Omega}(t) = \vec{\omega}(t)$, *tenemos :*

$$\frac{\vec{\omega}(t)}{\sqrt{2E}} \in \mathcal{E}_t$$



$\mathcal{E}_t = g(t)\mathcal{E}$
$\Big\} \frac{\sqrt{2E}}{|\vec{m}|}$
$\frac{\vec{\omega}(t)}{\sqrt{2E}}$
π
$\vec{m} = cst.$

Ahora, queremos determinar el plano tangente de $\mathcal{E}_t$ *por* $\vec{\omega}(t)$. *Primero, para* $\vec{\Omega} \in \mathcal{E}$, *el normal de* $\mathcal{E}$ *por* $\vec{\Omega}$ *tiene dirreción :*

$$\mathbb{I}_B\vec{\Omega} = \vec{M}(\vec{\Omega})$$

Entonces, el normal de $\mathcal{E}_t = g(t)\mathcal{E}$ *por* $\vec{\omega}(t)$ *es*

$$g(t)\vec{M}(t) = \vec{m}(t) = \vec{m} = cst!$$

Ademas, la distancía del plano por $\vec{\omega}(t)$ *con normal* $\vec{m}$ *a el origen es :*

$$\left|\frac{\vec{\omega}(t)}{\sqrt{2E}} \cdot \frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}\right| = \frac{\vec{\omega} \cdot \mathbb{I}\vec{\omega}}{\sqrt{2E}\,|\vec{m}|} = \frac{\sqrt{2E}}{|\vec{m}|} = cst!$$

Ahora, tenemos que $\frac{\vec{\omega}(t)}{\sqrt{2E}} \in \mathcal{E}_t \cap \pi$, *donde* π *es un plano fijado que es tangente a* $\mathcal{E}_t$ *por* $\frac{\vec{\omega}(t)}{\sqrt{2E}}$.
Queda verificar que $\mathcal{E}_t$ *esta rodando sin resbaldarse sobre* π *:*

considera que $\vec{\omega}(t_*) = g(t_*)\vec{\Omega}(t_*)$ *para cualquier* t_*.
Entonces, queremos chequear que :
$\dot{g}(t_*)\vec{\Omega}(t_*) = 0.$

$$\dot{g}\vec{\Omega} = \dot{g}g^{-1}g\vec{\Omega} = \omega(\vec{\omega}) = \vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$$