geodesis = free motion

Geodesicas en grupos de Lie (metricas invariante por izquierda)

Deja que G sea un grupo de Lie (por ejemplo $G = SO_3$),
y g su algebra de Lie : $\underset{\mathfrak{g}}{g} = \left\{ \frac{d}{dt}_{t=0} g(t) \ \ t.q. \ g(0) = \underset{id}{e} \right\}$ (por ejemplo so_3)

$\mathfrak{g} = T_e G$

Tenemos $TG \cong G \times g$ en dos maneras : por traslacion de isquierda o por derecha.

$(g, \dot{g}) \xmapsto{left} (g, g^{-1}\dot{g}) \in G \times \mathfrak{g}$

$\dot{g} = \frac{d}{dt}\Big|_0 \underset{g(0)=g}{g(t)}$ $\qquad \frac{d}{dt}\Big|_0 g^{-1} g(t)$

Notación : para $h \in G$ ponemos $\ell_h : G \to G, \ g \mapsto hg$.
entonces, $g^{-1}\dot{g} = d\ell_{g^{-1}} \dot{g} = \ell_{g^{-1}*} \dot{g}$.

$r_h(g) = gh.$

Una métrica invariante por izquierda consideramos como una Lagrangiana :

$T(g, \dot{g}) = \frac{1}{2} < \dot{g}, \dot{g} >_g$ que es un producto interior por $T_g G$ y para que :

$T(g, \dot{g}) = T(\ell_h g, \ell_{h*} \dot{g})$ para cada $h \in G$.

$E = \underline{\underline{I}}\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}$

** T esta determinado por su forma en $\overset{\mathfrak{g}}{g}$: $\underline{T(e, \Omega)} = T(g, \ell_{g*}\Omega)$ **

$\mathfrak{g}^* = \{\alpha : \mathfrak{g} \xrightarrow{lin.} \mathbb{R}\}$
$(\alpha, \xi) = \alpha(\xi)$

Definimos el 'operador de inercia' por escribiendo el producto interior sobre g como :

$< \xi, \eta > = (\mathbb{I}\xi, \eta)$ todos $\xi, \eta \in g$

donde $\mathbb{I} : g \to g^*$ es simetrico y positiva definida :
$(\mathbb{I}\xi, \xi) > 0$ para $\xi \neq 0$, y $(\mathbb{I}\xi, \eta) = (\mathbb{I}\eta, \xi)$

Por un punto general podemos poner $< \dot{g}, \dot{g} >_g = (\mathbb{I}_g \dot{g}, \dot{g})$ para $\mathbb{I}_g : T_g G \to T_g^* G$.

$d_e \ell_g$
$\|$
$\underline{T_e G = \mathfrak{g}} \xrightarrow{\ell_{g*}} T_g G$

$T_g^* G \xrightarrow{\ell_g^*} \mathfrak{g}^*$

$h \in G, \ c_h(g) = hgh^{-1} = \ell_h \circ r_{h^{-1}}(g)$

$\mathfrak{g} \xrightarrow{c_{h*} = Ad_h} \mathfrak{g} \qquad \mathfrak{g}^* \xrightarrow{Ad_h^*} \mathfrak{g}^*$

$Ad_{gh} = Ad_g Ad_h \qquad Ad_{gh}^* = Ad_h^* Ad_g^*$

Este situación es el misma punto de partida como para el cuerpo rígido libre.
Para $(g,\dot{g}) \in TG$, definimos :

$\Omega := \ell_{g^{-1}*} \dot{g}, \quad \omega := r_{g^{-1}*} \dot{g} \in \mathfrak{g}$

$\mathbb{M} := \mathbb{I}_g \dot{g} \in T_g^* G, \quad M := \mathbb{I}\Omega = \ell_g^* \mathbb{M}, \quad m := r_g^* \mathbb{M} = Ad_{g^{-1}}^* M \in \mathfrak{g}^*$

** las formulas arriba siguen de $\mathbb{I} = \ell_g^* \mathbb{I}_g \ell_{g*}$ lo que expresa invariancia por izquierda $< \Omega, \Omega >_e = < \ell_{g*}\Omega, \ell_{g*}\Omega >_g$ en terminos de $\mathbb{I}_g$. **

Teorema de Noether en este caso (debido a las simetrias de translación por izquierda) :

Deja que $h(s)$ sea una curva en G con $h(0) = e, \dot{h}(0) = \xi \in g$.
El campo vectorial asociado a las simetrias $\ell_{h(s)}$ es :

$X_\xi(g) = \frac{d}{ds}_{s=0} h(s) g = r_{g*}\xi$

y el integral corespondiente es :

$$\frac{d}{d\varepsilon}_{\varepsilon=0} T\big(g, \dot{g} + \varepsilon X_\xi(g)\big) = (\mathbb{I}\Omega, Ad_{g^{-1}}\xi) = (Ad_{g^{-1}}^* M, \xi) = (m, \xi) \ \text{ para cada } \xi \in g$$

Es decir que $m \in g^*$ es constante.

$\mathfrak{g}^* \xrightarrow{ad_\xi^*} \mathfrak{g}^* \qquad \mathfrak{g} \xrightarrow{ad_\xi} \mathfrak{g}$

(app. 2 Arnold)

El analogo de las ecuaciones de Euler encontramos por :

$$\dot{M}(t_o) = \frac{d}{dt}_{t=t_o} Ad_{g(t)}^* m = \frac{d}{dt}_{t=t_o} Ad_{g(t_o)^{-1}g(t)}^* Ad_{g(t_o)}^* m = \{\Omega(t_o), M(t_o)\}$$

$$o \ \ \dot{M} = \{\Omega, M\}$$

donde los crochets de Poisson, $\{\ ,\ \} : g \times g^* \to g^*$, son definidos por :
$\{\xi, \mu\} = \frac{d}{dt}_{t=0} Ad_{h(t)}^* \mu = ad_\xi^* \mu$ donde $h(t) \in G$ tiene $h(0) = e, \dot{h}(0) = \xi$.

En terminos de Ω las generalizadas ecuaciones de Euler tiene la forma :

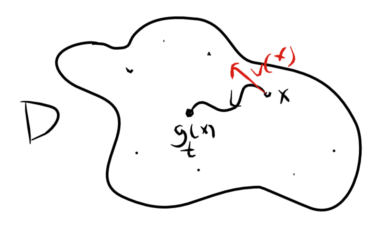
$$< \dot{\Omega}, \eta > = (\dot{M}, \eta) = (M, [\Omega, \eta]) = < \Omega, [\Omega, \eta] > = < B(\Omega, \Omega), \eta > \ \text{ cada } \eta \in g$$

$$\Rightarrow \ \dot{\Omega} = B(\Omega, \Omega)$$

Donde los soportes de Lie, $[\ ,\ ] : g \times g \to g$, son definidos por :
$[\xi, \eta] = \frac{d}{dt}_{t=0} Ad_{h(t)}\eta = ad_\xi \eta$, con $h(t) \in G$ tiene $h(0) = e, \dot{h}(0) = \xi$.
La mapa $B : g \times g \to g$ esta definida por $< [\xi, \eta], \zeta > = < B(\zeta, \xi), \eta >$.

Fluido incompresible y perfecto

Considera una capa fina de fluido contenida en un conjunto abierto y acotado $D \subset \mathbb{R}^2$.
Asumimos que el densidad es constante, $\rho = 1$ (el fluido es incompresible).



Consideramos el produto interior sobre g :

$< v_1, v_2 > := \frac{1}{2} \int_{x \in D} v_1(x) \cdot v_2(x) \ d^2x$

Extiende naturalmente a un metrica invariante por derecha sobre G.

$\ell_{g*}v = v^\ell$, con $v^\ell(x) = dg_x v(x)$
$r_{g*}v = v^r$, con $v^r(x) = v(gx)$.

por izquierda :

$\int_{x \in D} v_1^\ell(x) \cdot v_2^\ell(x) \ d^2x = \int_{x \in D} dg_x v_1(x) \cdot dg_x v_2(x) \ d^2x$

por derecha :

$\int_{x \in D} v_1^r(x) \cdot v_2^r(x) \ d^2x = \int_{x \in D} v_1(g(x)) \cdot v_2(g(x)) \ d^2x$

$= \int_{y \in D} v_1(y) \cdot v_2(y) \ d^2y.$

La 'configuración' del fluido esta dado por describiendo donde se muevan las partículas del fluido. Es decir, un difeomorfismo :
$g : D \to D$

$g_t \ ; \ g_0 = id$

$\frac{d}{dt}\Big|_0 g_t(x) = v(x)$

Por conservación de masa, tenemos :
$Area(U) = Area(g(U))$, para cada conjunto abierto $U \subset D$.

$0 = \frac{d}{dt}\Big|_0 \int_{g_t(U)} d^2x = \int_U div(v) \, d^2x$

Entonces el espacio de configuraciones es un grupo!
$G = SDiff(D,D)$
el grupo de difeomorfismos de D que preservan area.

El espacio tangente al identidad es :
$g = \{v : D \to \mathbb{R}^2 \ t.q. \ div(v) = 0\}$

Las generalizadas ecuaciones de Euler tienen la forma :

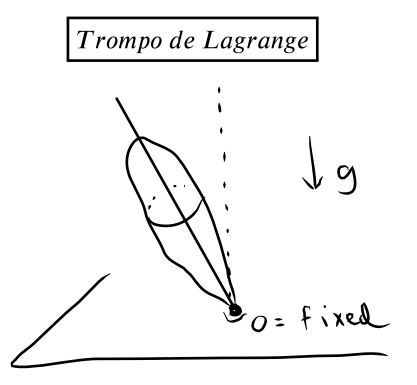
$\partial_t v = -B(v,v) = -(v \cdot \nabla)v - \nabla p$
($y \ div(v) = 0$, lo que determina p).

que son las ecuaciones de Euler para un fluido perfecto y incompresible

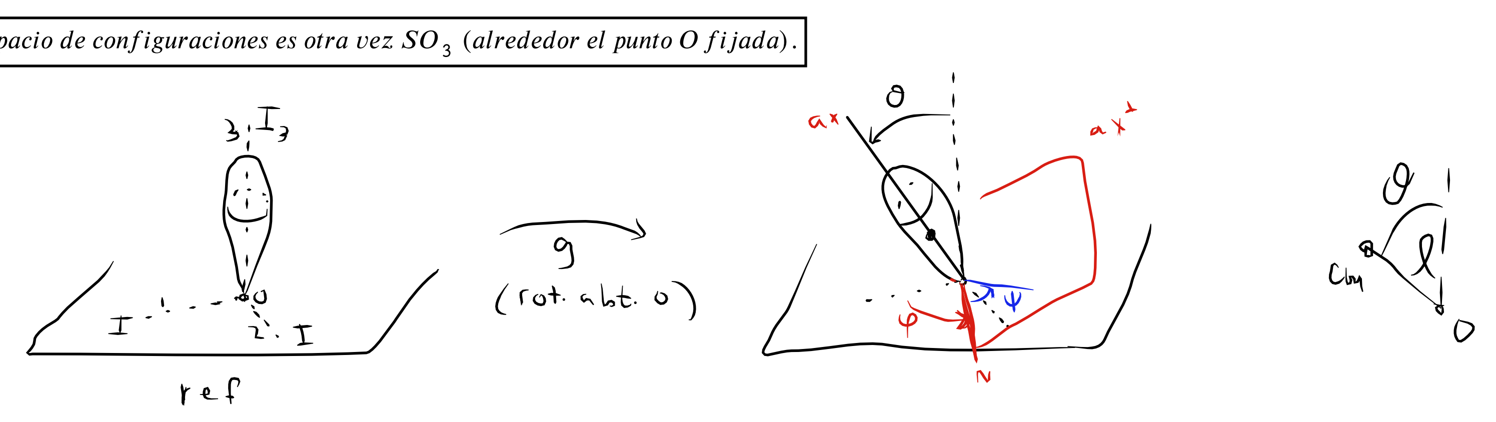
---

Trompo de Lagrange

Considera un cuerpo rígido que tiene un eje de simetría :
$I = I_1 = I_2 \neq I_3$.
Estudiamos su movimiento en un campo gravitacional constante, y con un punto en el eje de simetría fijada.



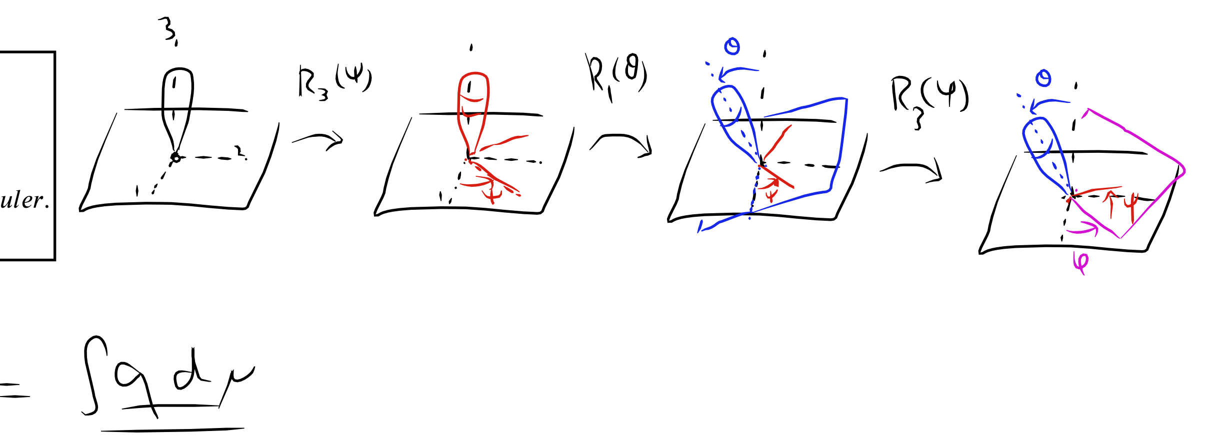
El espacio de configuraciones es otra vez SO_3 (alrededor el punto O fijada).



Escribir $g \in SO_3$ en la forma :

$g = R_3(\phi) R_1(\theta) R_3(\psi)$

llamamos los angulos, ψ, θ, ϕ los angulos de Euler.
Son coordenadas en SO_3.



El potenciál es :

$V = \int g \, h \, d\mu =$

$\underline{g} M h_{cm} = gM\ell \cos\theta$

$g_{cm} = \frac{\int g \, d\mu}{M}$

Para la energía cinetica, vamos a determinar el velocidad angular, $\vec{\Omega}$, y entonces
$K = \frac{1}{2} \mathbb{I}\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}$.
Observa que, debido a las simetrías en variando ϕ o ψ, que la Lagrangiana no depende de estos variables.

$g = R_3(\varphi) R_1(\theta) R_3(\psi) \qquad \Omega_{\vec{v}}(\vec{v}) = 0$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s} A(s)^{-1} A(t) = \Omega_{\vec{v}}$

$g \Omega_{\vec{v}} g^{-1} = \Omega_{g(\vec{v})}$

Desde $\Omega = g^{-1}\dot{g}$, calculamos :

$$\Omega = \dot{\phi} R_3(\psi)^{-1} R_1(\theta)^{-1} \underline{R_3(\phi)^{-1} R'_3}(\phi) R_1(\theta) R_3(\psi) + \dot{\theta} R_3(\psi)^{-1} \underline{R_1(\theta)^{-1} R'_1}(\theta) R_3(\psi) + \dot{\psi} \underline{R_3(\psi)^{-1} R'_3}(\psi)$$

Cuando $\phi = \psi = 0$, tenemos :

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi} e_3 + \dot{\theta} e_1 + \dot{\phi} R_1(-\theta) e_3$$
$$= \dot{\theta} e_1 + \dot{\phi} \sin\theta \, e_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \, e_3$$
$$= \Omega_1 e_1 + \Omega_2 e_2 + \Omega_3 e_3$$

Entonces, desde e_1, e_2, e_3 son ortonormal y corresponde a autovalores I, I, I_3 de $\mathbb{I}$ resp. tenemos :

$$K = \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \, \dot{\phi}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \cos\theta \, \dot{\phi})^2$$

Comentarios

Tenemos integrales :

$M_{ax} = \partial_{\dot{\psi}} L = \mathbb{I}\vec{\Omega} \cdot e_3 = I_3 \Omega_3$
$M_{ver} = \partial_{\dot{\phi}} L = \mathbb{I}\vec{\Omega} \cdot (\sin\theta \, e_2 + \cos\theta \, e_3) = I \Omega_2 \sin\theta + I_3 \Omega_3 \cos\theta$

Fijando estos integrales, conduce a :
$2K = I(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + I_3 \Omega_3^2$
$= I\Omega_1^2 + \frac{(M_v - M_a \cos\theta)^2}{I \sin^2\theta} + \frac{M_a^2}{I_3}$

$\Rightarrow \ E = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta)$

De $E = cst.$, uno encuentra que $\theta(t)$ es periodico,
de $M_v(\dot{\phi}, \theta(t)) = cst.$ determina $\phi(t)$.
Esto permite describir el movimiento del eje de simetria :

aplicaciones :
* giroscopios (limite $\Omega_3 \to \infty$)
* precesión axial de la tierra (~ 25,000 años)