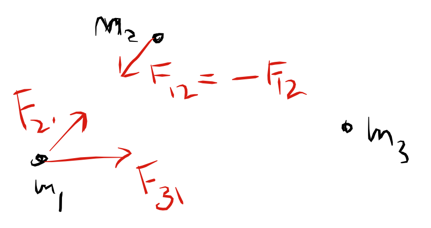
3 – cuerpos en el plano

Consideramos 3 masas puntuales, m_1, m_2, m_3 en el plano con posiciones :
$q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{C}^3$.



Sometemos las masas a fuerza gravitacional $\left(\sim \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\right)$

$$m_1 \ddot{q}_1 = m_1 m_2 \frac{q_2 - q_1}{r_{12}^3} + m_1 m_3 \frac{q_3 - q_1}{r_{13}^3},$$
$$\ldots$$
donde $r_{ij} := |q_i - q_j|$.

Estas fuerzas son conservativas con función de fuerza :

$$U = \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}}$$

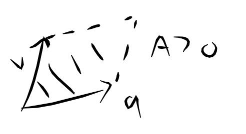
La energía cinetica es :

$$K = \frac{1}{2}\left(m_1 |\dot{q}_1|^2 + m_2 |\dot{q}_2|^2 + m_3 |\dot{q}_3|^2 \right)$$

De N3, tenemos cantidades conservadas :

$$E = K - U$$
$$P = m_1 \dot{q}_1 + m_2 \dot{q}_2 + m_3 \dot{q}_3$$
$$C = m_1 q_1 \wedge \dot{q}_1 + m_2 q_2 \wedge \dot{q}_2 + m_3 q_3 \wedge \dot{q}_3$$

$q \wedge v = v \cdot iq = \mathrm{Im}(\bar{q} v)$



Reducción

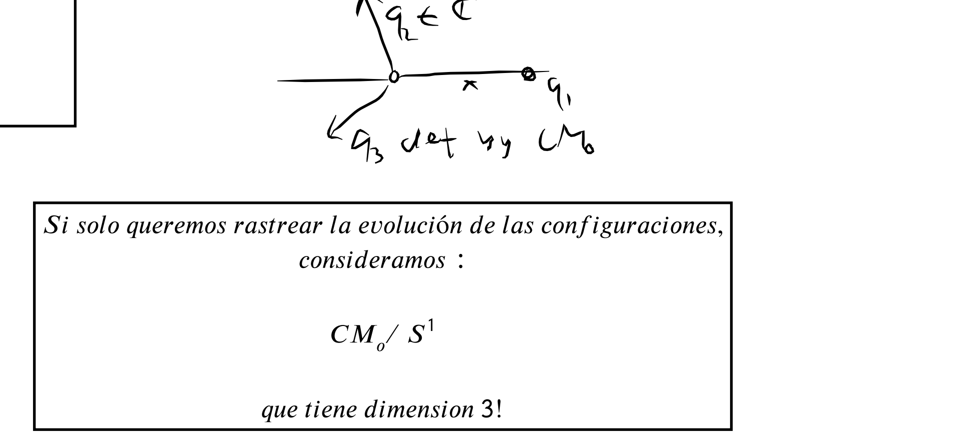
Desde $P = cst.$, tomamos una marca con $q_{cm} = m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 = 0$.

Tales configuraciones, $CM_0 \subset \mathbb{C}^3$, tienen dimension 4.
(CM_0 es un subespacio lineal de $\mathbb{C}^3$ parametrizado por $\mathbb{C}^2$)

6-dim.

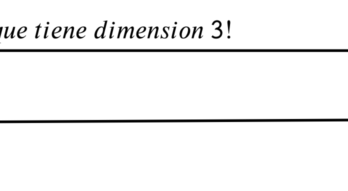
El momento angular, es asociado al simetria por rotaciones :

$$q \mapsto e^{i\theta} q = (e^{i\theta} q_1, e^{i\theta} q_2, e^{i\theta} q_3)$$



Es decir, condiciones iniciales (q_o, v_o) y $e^{i\theta}(q_o, v_o)$ conducen a soluciones :

$$(q(t), v(t)) \;\; y \;\; e^{i\theta}(q(t), v(t))$$
para cada $e^{i\theta} \in S^1$.



$V_0 = \{ m_1 v_1 + m_2 v_2 + m_3 v_3 = 0 \}$

Consideramos el espacio cociente :
$$\left(CM_0 \times V_0\right) / S^1$$

de centro de masa cero con el relación :
$$(q,v) \sim \left(e^{i\theta} q, e^{i\theta} v\right)$$

Si solo queremos rastrear la evolución de las configuraciones, consideramos :

$$CM_o / S^1$$

que tiene dimension 3!

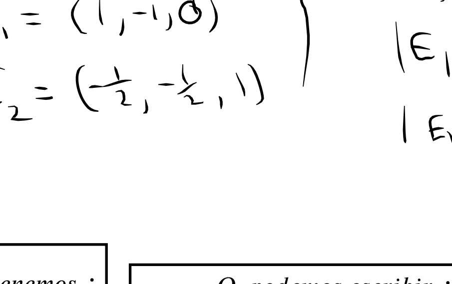
Coordenadas sobre CM_0

Realizamos la redución por translaciones en la siguiente manera :

$$CM_0 \ni (q_1, q_2, q_3) \mapsto (Q_{12}, Q_{23}, Q_{31}) \in \Sigma \subset \mathbb{C}^3$$

donde $\Sigma = \{ (Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{C}^3 \text{ t.q. } Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0 \}$

$q_2 - q_1 = Q_{12}$



$\underline{Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = 0}$

Por el producto hermitiano estandard :

$$(Z_1, Z_2, Z_3) \cdot (W_1, W_2, W_3) = Z_1 \bar{W}_1 + Z_2 \bar{W}_2 + Z_3 \bar{W}_3$$

sobre $\mathbb{C}^3$, tenemos :
$$\Sigma = (1,1,1)^{\perp}$$

$E_0 = (1,1,1)$
$\Sigma \begin{cases} E_1 = (1,-1,0) \\ E_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$ ortogonal

$|E_1| = \sqrt{2}$

$|E_2| = \sqrt{\frac{3}{2}}$

En el base ortogonal, $E_1 = (1, -1, 0)$, $E_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ para Σ, tenemos :

$$Q = \underbrace{\frac{Q \cdot E_1}{E_1 \cdot E_1}}_{u_1} E_1 + \underbrace{\frac{Q \cdot E_2}{E_2 \cdot E_2}}_{u_2} E_2 \quad \text{para cada } Q \in \Sigma.$$

O, podemos escribir :

$$Q = z_1 e_1 + z_2 e_2, \text{ con } e_j = \frac{E_j}{|E_j|}$$

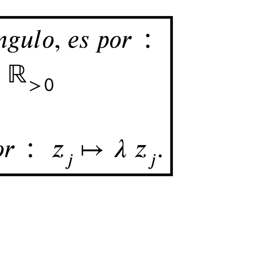
para parametrizar CM_0 por $\mathbb{C}^2$.

$\underline{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2}$

$Q_{31} = 0 \qquad Q_{12} + Q_{23} = 0$
$\Rightarrow u_2 = 0 \;\&\; z_2 = 0$
$u_1 = 2 Q_{12} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}\, Q_{12}$

Ponemos :
$$u_1 = Q \cdot E_1 = Q_{12} - Q_{23} = \sqrt{2}\, z_1$$
$$u_2 = Q \cdot E_2 = Q_{31} - \frac{Q_{12} + Q_{23}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, z_2$$

$Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = 0$



La acción por rotaciones, $q \mapsto e^{i\theta} q$, es lo mismo sobre los Q_{ij}'s :

$$Q_{ij} \mapsto e^{i\theta} Q_{ij}$$

y entonces lo mismo en nuestro parametrización de Σ por $\mathbb{C}^2$:
$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2)$$

El acción de escalar el triangulo, es por :
$$Q_{ij} \mapsto \lambda Q_{ij}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$$

y en nuestros coordenadas por : $z_j \mapsto \lambda z_j$.

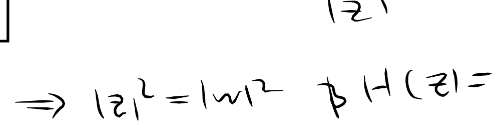
Mapa de Hopf

$z_2 \neq 0 \neq w_2, \; \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$

Para $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus (0,0)$ tenemos :

$$z_j = \lambda e^{i\theta} w_j \iff \frac{z_1}{z_2} = \frac{w_1}{w_2} \in \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C}^2 \setminus 0 \longrightarrow \mathbb{C} \cup \infty \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$$
(Hopf: $\mathbb{C}^2 \setminus 0 \to S^2$)



Entonces, triangulos similares son parametrizadas por una esfera :

$$(z_1, z_2) \mapsto H(z_1, z_2) = \frac{(2 z_1 \cdot z_2, 2\, z_1 \wedge z_2, |z_1|^2 - |z_2|^2)}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

$|H(z)|^2 = 1$

$H(z) = \dfrac{h(z)}{|z|^2}$

Triangulos congruentes son parametrizadas por :

$$(z_1, z_2) \mapsto (2 z_1 \cdot z_2, 2\, z_1 \wedge z_2, |z_1|^2 - |z_2|^2) \in \mathbb{R}^3$$
$$= h(z) = |z|^2 H(z)$$

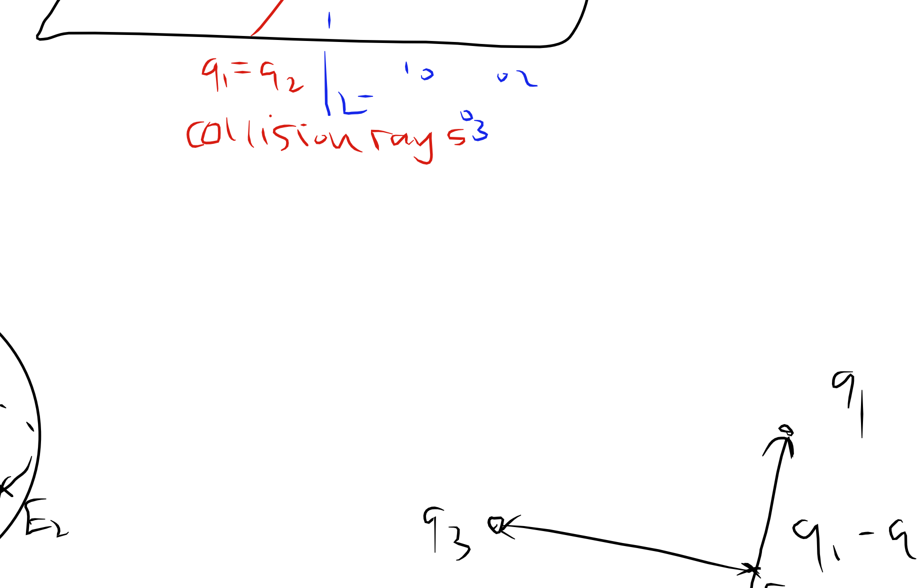
$z = e^{i\theta} w \Rightarrow |z|^2 = |w|^2 \;\&\; H(z) = H(w)$

$(\Leftarrow)$ ex.

Espacio de formas

Por convencion, cambiamos el orden en nuestro parametrización de triangulos congruentes :

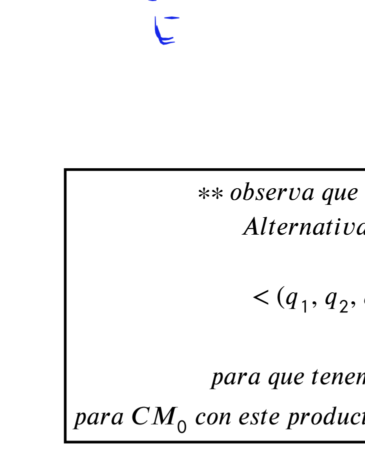
$$(|z_1|^2 - |z_2|^2, 2 z_1 \cdot z_2, 2 z_1 \wedge z_2) \in \mathbb{R}^3.$$



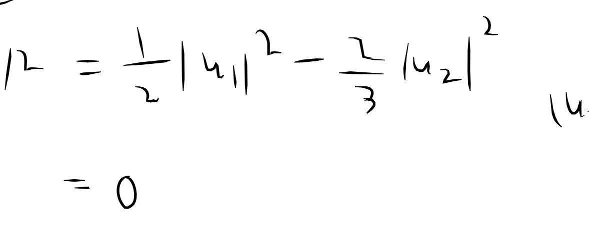
Algunos puntos de referencia :

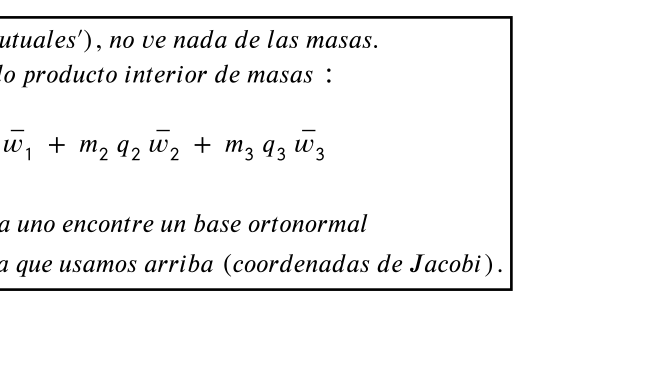
1. el triangulo de colapso total es el origen (0,0,0)
2. Los triangulos colineales tienen area cero, entonces son el plano $(x,y,0)$
3. colisiones binarias son presentados por 3 rayos saliendo de origen.
4. Triangulos equilaterales son el eje $(0,0,z)$.
5. Triangulos isósceles son presentados por planos (espaneado por un rayo de colision y triangulos equilateros).

ex: $Q_{31} = 0$
$\Rightarrow (|z_1|^2, 0, 0)$



ex:





$z_1 \cdot z_2 = 0$

$z_1 = \frac{u_1}{\sqrt{2}}, \; z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, u_2$

$|z_1|^2 - |z_2|^2 = \frac{1}{2}|u_1|^2 - \frac{2}{3}|u_2|^2$
$= 0$

$|u_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}|u_1|$

** observa que este reducción ('distancias mutuales'), no ve nada de las masas.
Alternativa manera de proceder es usando producto interior de masas :

$$< (q_1, q_2, q_3), (w_1, w_2, w_3) > := m_1 q_1 \bar{w}_1 + m_2 q_2 \bar{w}_2 + m_3 q_3 \bar{w}_3$$

para que tenemos $CM_0 = (1,1,1)^{\perp}$. Proxima uno encontre un base ortonormal para CM_0 con este producto interior de masas, analogo a que usamos arriba (coordenadas de Jacobi).

Soluciones especiales (equilibrios relativos)

¿Existe soluciones del problema de 3 – cuerpos que son equilibrios?
es decir, q para que $\nabla U(q) = 0$?

NO: $U(\lambda q) = \lambda^{-1} U(q)$ $\qquad$ eq pt $\Rightarrow U(q) = 0$
$\Rightarrow \underset{ex}{\nabla U(q) \cdot q} = -U(q)$

órbitas periodicas? Buscamos un tal órbita de la forma :

$$q(t) = e^{i\omega t} q_o = e^{i\omega t}(a_1, a_2, a_3).$$

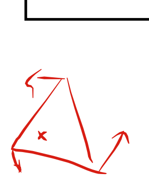
Sustituyendo en las ecuaciones de movimiento da las condiciones :

$$-\omega^2 a_1 = m_2 \frac{a_2 - a_1}{|a_2 - a_1|^3} + m_3 \frac{a_3 - a_1}{|a_3 - a_1|^3},$$
$$\ldots$$

$\left[\partial_{q_j} U = -\omega^2 \partial_{q_j} I \right]$

$I = \sum m_j |q_j|^2$

$\underline{\nabla U = -\omega^2 \nabla I}$ $\qquad$ Lagrange mult!



$I = 1$

$\{U = c\} \quad c \gg 1$