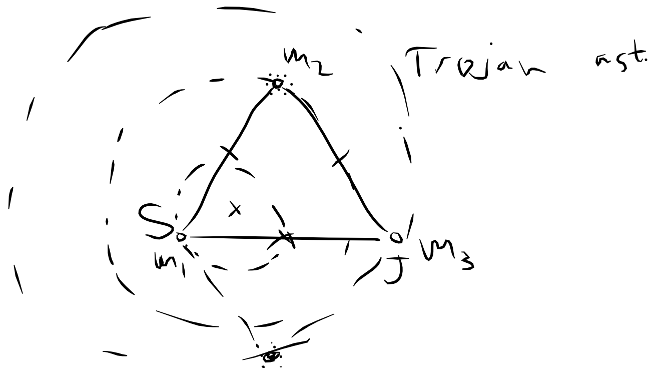
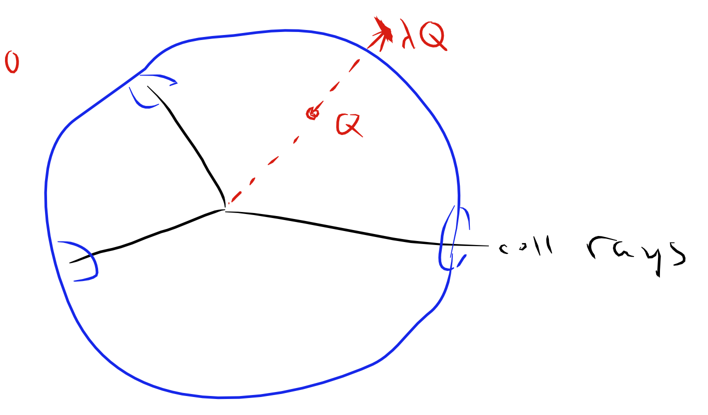


$3 - cuerpos\ continuado$

$Fijando\ las\ integrales$

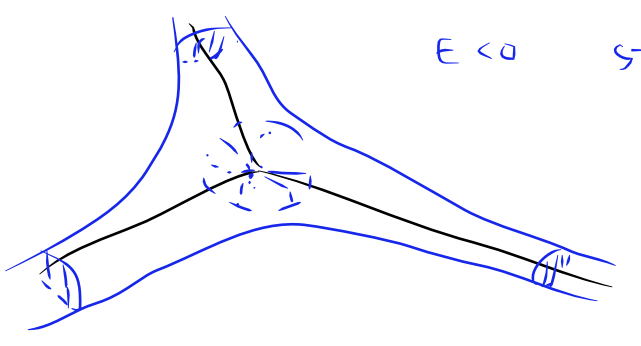
$$E = K(V) - U(Q) \geq -U(Q)$$
$$\Rightarrow$$
$$U(Q) \geq -E$$
$$\Rightarrow$$
$$U(\lambda Q) \geq -\frac{E}{\lambda},\ \ cada\ \lambda \in \mathbb{R}_{>0}.$$

$E<0$



$E \geq 0$
no constraints

$E<0$ stuck inside pants



$\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$

$\langle v, w\rangle = \sum m_j v_j \bar{w}_j$

$I(q) = \sum m_j |q_j|^2$

Con el producto interior $<\ ,\ >$ de masa, ponemos :

$$r^2 = <q, q> = I,$$
$$s = \frac{q}{r}\ \ (para\ que\ <s, s> = 1)$$
$$u = \sqrt{r}\, v,\ \ para\ que :$$
$$2K = <v, v> = \frac{<u, u>}{r}.$$

Tenemos :
$$\underline{C = Im <v, q>}$$
que da, par Cauchy − Schwarz,
$$\frac{C^2}{r} \leq <u, u> \quad *$$

r s

$E = \frac{\langle v,v\rangle}{2} - U(q) \qquad v = \frac{u}{\sqrt{r}}$

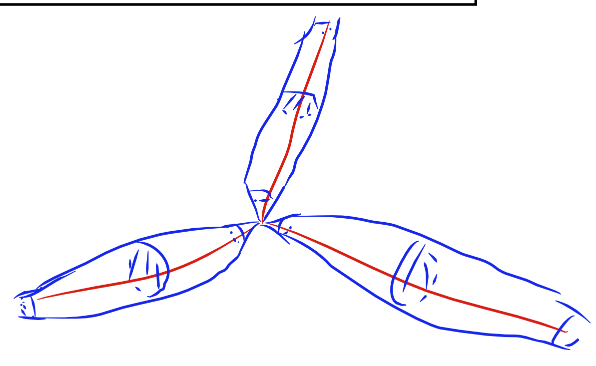
$= \frac{\langle v,v\rangle}{2} - \frac{1}{r}U(s)$

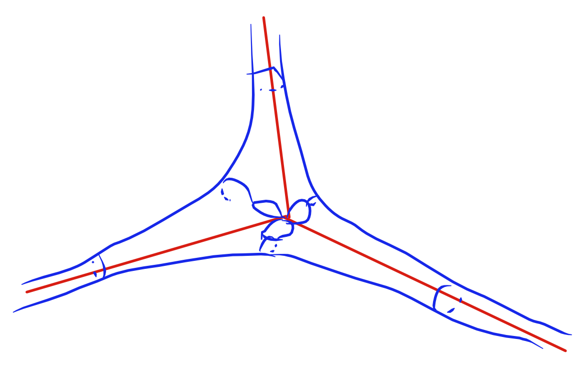
$\Rightarrow rE = \frac{\langle u,u\rangle}{2} - U(s) \geq \frac{c^2}{2r} - U(s)$

$c^2 = Im^2\langle v,q\rangle \leq |\langle v,q\rangle|^2 \leq \langle v,v\rangle\langle q,q\rangle$

$= \frac{\langle u,u\rangle}{r}\cdot r^2$

$U(s) \geq \frac{c^2}{2r} - rE \qquad \underline{E<0}$
$\underline{\underline{C \neq 0}}$





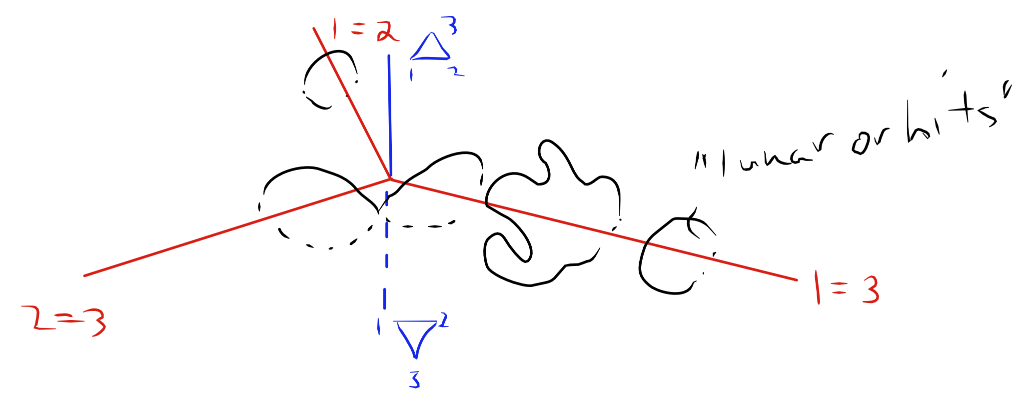
$Proyección\ y\ clases\ de\ homotopia$

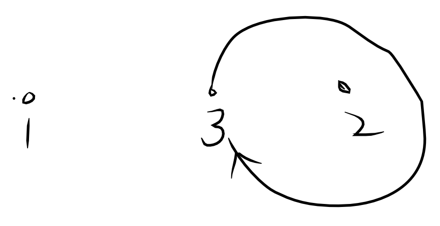
Cada solución, $q(t) \in CM_0 \subset \mathbb{C}^3$ del problema de 3 − cuerpos en el plano determina una curva $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ por projección.

$CM_0 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^3$

Un enfoque para comprender este problema es tratar de determinar condiciones sobre estas curvas en el espacio de triangulos congruentes.

Si quitamos las rayas de colisiones, podemos buscar si existe órbitas con ciertas 'propiedades de bobinando' (clases de homotopia)





$Método\ directo\ (calculo\ de\ variaciones)$

Para una funcional $A : \Gamma \to \mathbb{R}$

1. *A acotada desde abajo* $(inf_{\gamma\in\Gamma} A \in \mathbb{R})$
2. *A esta coercitiva* $(\ ||\gamma|| \to \infty \Rightarrow A(\gamma) \to \infty)$
3. *Γ esta cerrada (en algún sentido)*
4. *A es semi − continuo desde abajo* $(liminf(A(\gamma_n)) \leq A(\gamma_*)$ *cuando* $\gamma \to \gamma_*)$
5. *Minimizadores satisficen E − L (regularidad).*

$\gamma_1, \gamma_2, \ldots \in \Gamma \qquad A(\gamma_n) \longrightarrow \inf A = a$

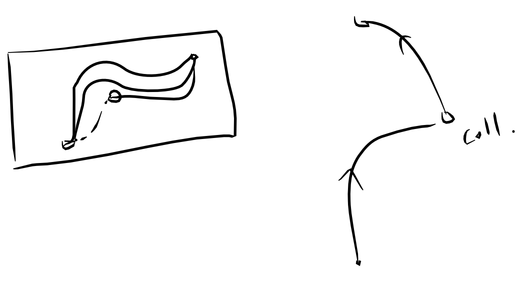
$\|\gamma_n\| < cst. \xrightarrow{\|\cdot\|} \underline{\underline{\gamma_n \to \gamma_*}}\}$

$\to \gamma_* \in \Gamma$

$A(\gamma_*) = a \qquad \gamma_*$ min!

Para el problemas de mecánica, el método aplica excepto que Γ sea cerrada bajo limites.

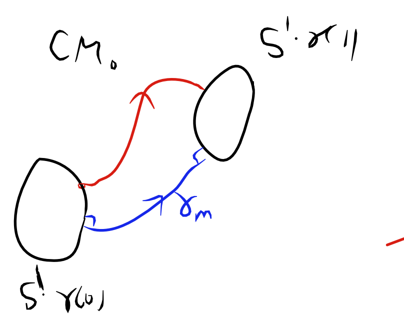
Tipicamente, la potencial no es definida por todos puntos (colisiones) y requiere verificación para determinar si una minimizador de A evite estes puntos.

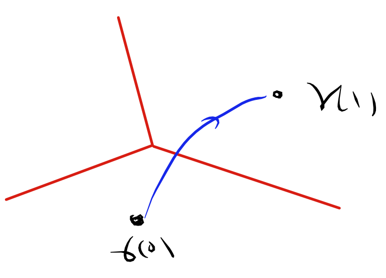


$El\ ocho$

Primero, considera dos puntos en $\mathbb{R}^3\setminus$ colisiones.
El principio de extremal acción descende a una principio de acción que describe proyecciones de soluciones con momento angular cero.

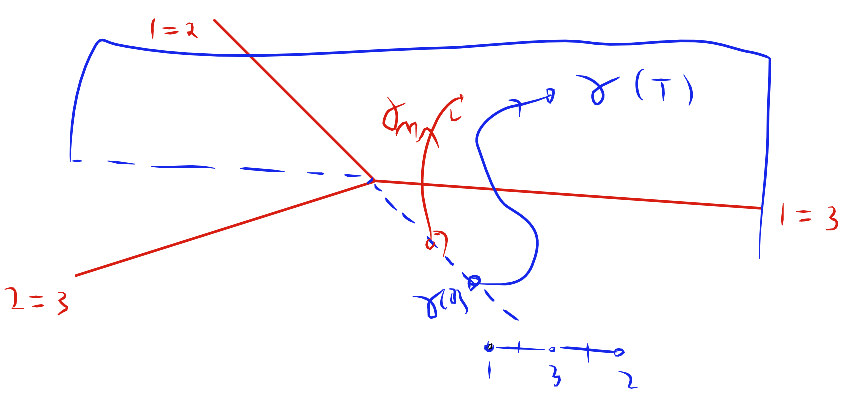
$0 = \dot{\gamma}_m \cdot i\gamma_m = C$





Para establecer el ocho, consideramos masas iguales $(m_j = 1)$ y las curvas Γ que empiezan en un rayo de configuraciones de Euler terminan en una plano isosceles.

T fixed



Para excluir colisiones de un minimizador, chequear que :

$$A(\gamma) \geq A_K(\gamma)$$

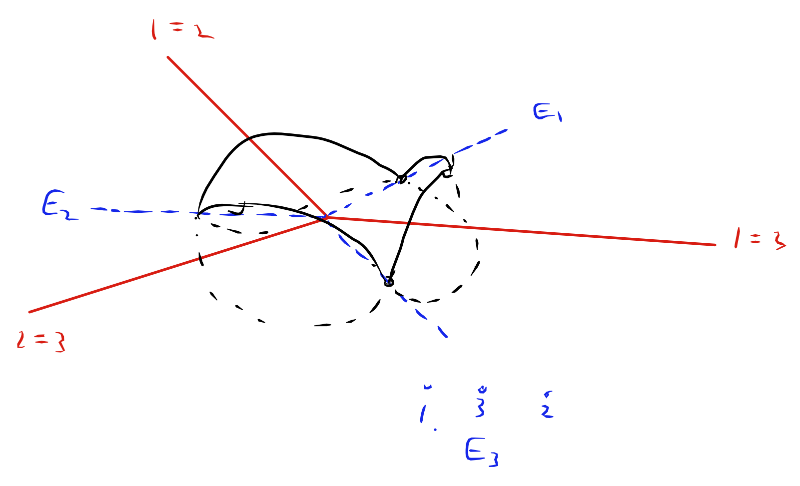
donde A_K es el acción de la curva con una masa cero.
A_K es como el acción del problema de 2 − cuerpos.

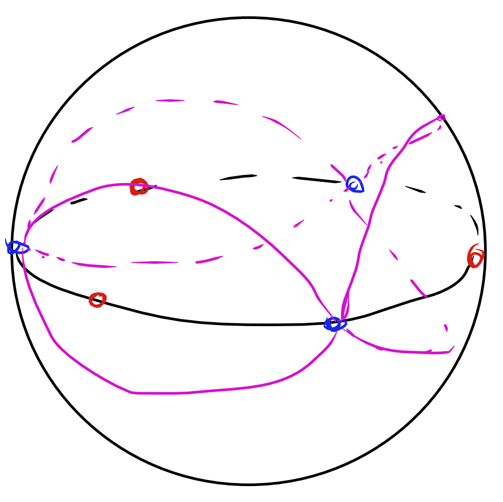
$\int \frac{\sum m_j |\dot{\gamma}_j|^2}{2} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \ldots$

Acción minimal de órbitas de problema de 2 − cuerpos se puede calcular explicitamente (hw).
Uno obtiene un valor explicita para :

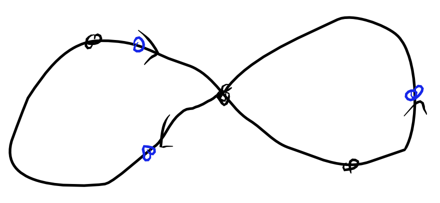
$$a_K := \inf_{\gamma\in\Gamma_c} A_K(\gamma) \leq a_c = \inf_{\gamma\in\Gamma_c} A(\gamma)$$
donde Γ_c son curvas en Γ con colisiones.

Si encontramos una curva en Γ sin colisiones que tiene acción menor que a_K, este implica que el minimizador no tiene colisiones!





3-bodies



Historia :

1. *Poincaré − sur les solutions périodiques et le principe de moindre action* (1896)
2. *Moore − Braids in classical mechanics* (1993)
3. *Chenciner, Montgomery − A remarkable solution to the three body problem* (2000)

$U \sim \frac{1}{r^\alpha} \qquad (\alpha = 1$ Newton$)$

$\alpha < 2$ coll's are problem.

$\left[\ \underline{\alpha \geq 2}\right.$
coll's ∞ action