Ecuaciones de Hamilton

El punto de salida es considerar las ecuaciones de movimiento en el espacio total :

para n masas puntuales, $q_1,\ldots,q_n$ sometido a fuerzas conservativas desde $U(q)$ tenemos

$$m_j \ddot{q}_j = \partial_{q_j} U.$$

Convertimos este sistema de segundo orden a un de primer orden :

$$\dot{q}_j = v_j$$
$$\dot{v}_j = \frac{1}{m_j}\partial_{q_j} U$$

Podemos intercambiar la division por masa en tomando $p_j = m_j v_j$:

$$\dot{q}_j = \frac{1}{m_j} p_j$$
$$\dot{p}_j = \partial_{q_j} U$$

$$E = \sum m_j \frac{|v_j|^2}{2} - U(q) = \sum \frac{|p_j|^2}{2m_j} - U = H(p,q)$$

La energía en terminos de p, q denotamos por :

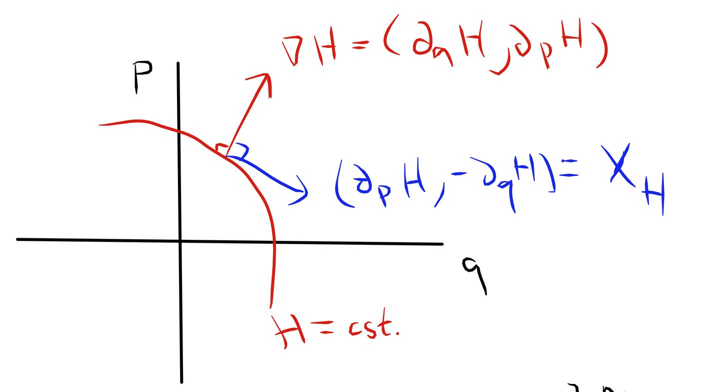
$$H = \sum \frac{|p_j|^2}{2m_j} - U(q)$$

Tenemos :

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \partial_{p_j} H \\ \dot{p}_j = -\partial_{q_j} H \end{cases}$$

Ham's eqs

H is for
* Huygens *



$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_0 H(x+\varepsilon u) = \underline{d_x H(u) = \nabla_x H \cdot u} \quad \forall u \in \mathbb{R}^{2n}$$

Estructura simplectica

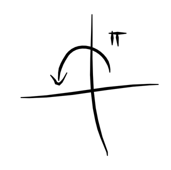
Equaciones de Hamilton tiene la forma :

$$\frac{d}{dt} x = -J\nabla_x H$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}}_{-J}\underbrace{\begin{pmatrix} \partial_q H \\ \partial_p H \end{pmatrix}}_{\nabla H}$$

$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n\times n} \\ I & 0 \end{pmatrix}$ rot matrix

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $n=1$



Notar que J es una matriz rotacional de $\mathbb{R}^{2n}$ con producto interior estandard :

$$J^T = -J \quad y \quad -id = J^2 = -JJ^T = -J^T J$$

Definimos una forma bilinear y anti – simetrica :

$$\omega(\vec{u},\vec{v}) := \vec{u}\cdot J\vec{v},$$

la forma simplectica estandard sobre $\mathbb{R}^{2n}$.

$$\omega(u,v) = -\omega(v,u)$$

$$\dot{x} = X_H = \nabla^{\omega} H = \mathrm{Sgrad}(H)$$

$$\begin{aligned} dH(u) &= u\cdot\nabla H \\ &= \nabla H\cdot u \\ &= J\nabla H\cdot Ju \\ &= \omega(J\nabla H, u) \\ &= \omega(u, \underbrace{-J\nabla H}_{X_H}) \end{aligned}$$

El gradiente simplectica, X_f, de un función, $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ definimos por :

$$df(v) = -\omega(X_f, v) = \omega(v, X_f) \text{ para todos vectores } v.$$

Comentario : la forma simplectica y el matriz J son relacionadas a una identificación

$$\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$$
$$(q,p) \mapsto \vec{z} = (z_1,\ldots,z_n) = (q_1 + ip_1, \ldots, q_n + ip_n).$$

Bajo este identifiación, el matriz J es multiplicación por i :

$$\vec{z} \mapsto i\,\vec{z}.$$

La forma simplectica es el parte imaginario del producto Hermitiano estandard :

$$\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle := z_1\bar{w}_1 + \ldots + z_n\bar{w}_n = \vec{z}\cdot\vec{w} + i\,\omega(\vec{z},\vec{w})$$

donde $\omega(\vec{z},\vec{w}) = \vec{z}\cdot i\vec{w}$.

Teorema de Liouville

Observa que la divergencia de $X_H = \left(\partial_p H, -\partial_q H\right)$ es :

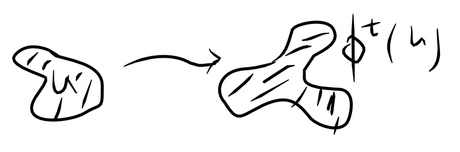
$$\mathrm{div}(X_H) = \partial^2_{pq} H - \partial^2_{qp} H = 0.$$

Entonces el flujo de X_H preserva volumen :

$$dp_1 \ldots dp_n dq_1 \ldots dq_n.$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{vol}(\phi_v^t(U)) = \int_U \mathrm{div}(v)\, d\mathrm{vol}$$

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \det(id + tA) = \mathrm{tr}A$$



$\mathrm{vol}(X) \geq \mathrm{vol}(\bigcup \varphi^n(U))$

$U \subset$

$\varphi : X \to X$

$\varphi^n(U) \subset X$

$\phi = \phi^1_{X_H}$

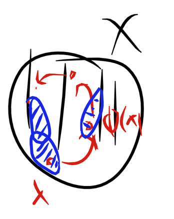
$\mathbb{R}^{2n}$

$H^{-1}(e_0, e_1)$

Teorema de recurrencia de Poincaré

Deja que $X \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto con 'volumen' finita : $vol(X) < \infty$.

Si $\phi : X \to X$ es invertible y preserva volumen de subconjuntos entonces : para cada subconjunto abierto $U \subset X$, existe $x \in U$ y $k > 0$ para que, $\phi^k(x) \in U$.



prf: $0 < \mathrm{vol}(U) = \mathrm{vol}(\varphi^n(U)) \ \forall n$

if $U, \varphi(U), \varphi^2(U), \ldots$ disjt.

$\mathrm{vol}(X) \geq \sum \mathrm{vol}(\varphi^n(U)) = \infty$

$\varphi^l(U) \cap \varphi^m(U) \neq \emptyset$ some $0 \leq l < m$

$y = \varphi^l(z) = \varphi^m(x)$ some $x, z \in U$

$\varphi^{m-l}(x) \in U$ $k = m - l$ $\square$

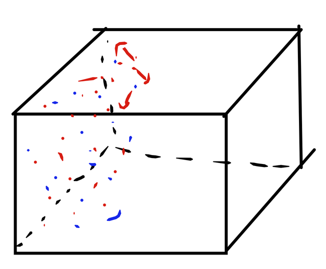
Si unos niveles de energía, $H^{-1}(e_0, e_1) \subset \mathbb{R}^{2n}$ tienen volumen finita, entonces con ϕ el tiempo uno mapa del flujo de X_H, podemos aplicar la teorema de recurrencia.

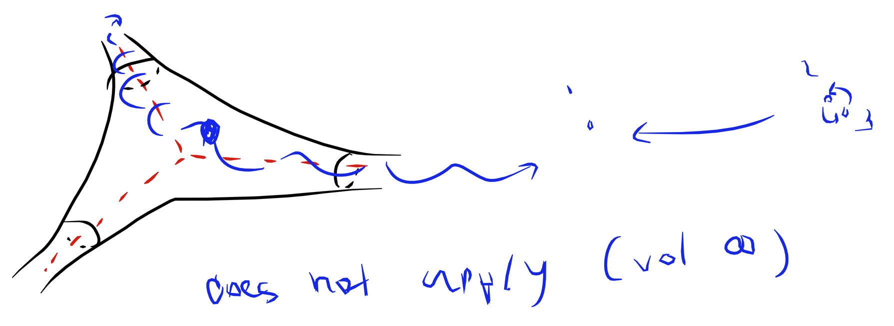
$$H = \sum m_j \frac{|v_j|^2}{2}$$

$T \gg 0$

erg. thrm.

space avg. = time avg.





---

de E – L hacia ecuaciones de Hamilton

Consideramos una sistema mecánica dado por una Lagrangiana :

$$L(q,v).$$

Las ecuaciones de Euler – Lagrange son :

$$\frac{d}{dt}\partial_v L = \partial_q L$$

$p_j = m_j v_j$

$(\partial_v^2 L > 0)$

Ponemos

$$p := \partial_v L(q,v)$$

y suponemos que para cada q fijada, la mapa

$$u \mapsto \partial_v L(q,u)$$

es invertible.

Entonces podemos pensar de $p(q,v)$ o $v(p,q)$.

$$E = \partial_v L \cdot v - L$$

La Hamiltoniana es :

$$H(q,p) := p\cdot v - L(q,v)$$

donde ponemos $v(q,p)$ para v.

Por regla de cadena, las ecuaciones de $E - L$ convierta a :

$$\dot{q} = \partial_p H$$
$$\dot{p} = -\partial_q H$$

Ejemplos

0. Ya vimos para una sistema de partículas :

$$L = \sum \frac{m_j |v_j|^2}{2} + U(q)$$

tenemos :

$$p_j = \partial_{v_j} L = m_j v_j$$

y

$$H = \sum p_j \cdot \frac{p_j}{m_j} - L = \sum \frac{|p_j|^2}{2m_j} - U(q)$$

1. Una fuerza central en coordenadas polares :

$$L = \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{2} + U(r)$$

$$p_r = \partial_{\dot{r}} L = \dot{r}$$
$$p_\theta = \partial_{\dot{\theta}} L = r^2\dot{\theta}$$

$$H = \underline{\frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2}} - U(r)$$

2. $L = \frac{|\dot{q}|^2}{2} + U(|q|)$, $q \in \mathbb{C}$ en una marca rodeando :

$$q = e^{it}Q$$
$$\dot{q} = e^{it}(iQ + \dot{Q})$$

$$L = \frac{|\dot{Q} + iQ|^2}{2} + U(|Q|)$$

$$P = \partial_{\dot{Q}} L = \dot{Q} + iQ$$

$$H = P\cdot\dot{Q} - L = P\cdot(P - iQ) - \frac{|P|^2}{2} - U$$

$$= \underline{\frac{|P|^2}{2} - P\cdot iQ - U}$$